UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

TESIS DOCTORAL

Un estudio sobre el papel de las definiciones y las demostraciones

en cursos preuniversitarios de Cálculo Diferencial e Integral

Presentada por: Cecilia Calvo Pesce

Dirigida por: Dra. Carmen Azcárate

Bellaterra, Barcelona

Mayo de 2001

Agradecimientos

A Carmen.

A Fernando, Mario y sus alumnos del Crandon y del Miranda.

A Andrés, Carolina, Gonzalo, Laura y Santiago.

A quienes leyeron partes de este trabajo y con sus aportes lo mejoraron.

A los compañeros de trabajo en la facultad y el liceo, que en distintos momentos de estos tres años cubrieron mis tareas para que pudiera completar este trabajo.

A quienes me ofrecieron su ayuda para realizar los trámites de presentación de este trabajo evitando que tuviera que viajar para hacerlo.

A mi familia y mis amigos, quienes me alentaron y soportaron a lo largo de este tiempo.

Quan surts per fer
el viatge cap a Ítaca,
has de pregar que el camí sigui llarg,
ple d'aventures, ple de coneixences.
Has de pregar que el camí sigui llarg,
qui siguin moltes les matinades
que entraràs en un port
que els teus ulls ignoraven,
i vagis a ciutats
per aprendre dels que saben.
Tingues sempre al cor la idea d'Ítaca.
Has d'arribar-hi, és el teu destí,
però no forcis gens la travessia.
És preferible que duri molts anys,
que siguis vell quan fondegis l'illa,
ric de tot el que hauràs guanyat
fent el camí,
sense esperar
que et doni més riqueses.
Ítaca t'ha donat el bell viatge,
sense ella no hauries sortit.

Lluis Llach

Un país lejano puede estar cerca
puede quedar a la vuelta del pan
pero también puede irse despacito
y hasta borrar sus huellas

en ese caso no hay que rastrearlo
con perros de caza o radares

la única fórmula aceptable
es excavar en uno mismo
hasta encontrar el mapa.

Mario Benedetti

ÍNDICE

I. INTRODUCCIÓN. 1

I.1 Características de la Enseñanza Matemática en las Etapas Elemental y Avanzada. 1

I.1.1 Caracterización según los conceptos que tratan. 1

I.1.2 Caracterización según los procesos de pensamiento que intervienen . . 2

I.1.3 Caracterización según sus estudiantes. 2

I.1.4 Caracterización según las estrategias de enseñanza utilizadas 3

I.1.5 La etapa de transición. 4

I.2 ¿Qué pretende esta tesis? 4

II. CONSIDERACIONES TEÓRICAS. 7

II.1 Contrato Didáctico y Transposición Didáctica. 7

II.1.1 La teoría de la Transposición Didáctica. 7

II.1.2 La teoría de las Situaciones Didácticas. 9

La institucionalización. 10

La devolución y el Contrato Didáctico 11

II.1.3 Consideraciones finales 12

II.2 Encapsulación, visualización y algoritmización. 13

II.2.1 La encapsulación. 13

El pensamiento proceptual. 14

La ambigüedad en el pensamiento matemático. 17

II.2.2 La visualización. 18

La visualización en los cursos de Cálculo. 18

Objetivos de la visualización en el ámbito del Cálculo. 21

El papel de la computadora. 22

II.2.3 La algoritmización. 24

Tareas y técnicas. 24

Las técnicas algorítmicas. 25

La dimensión técnica y la dimensión conceptual. 26

El papel de las herramientas informáticas. 27

II.2.4 Consideraciones finales. 29

II.3 Definiciones y demostraciones. 30

II.3.1 La definición en matemática. 30

II.3.1.1 Dos características de las definiciones matemáticas. 31

La convencionalidad 31

La minimalidad. 34

II.3.1.2 Los esquemas conceptuales. 35

II.3.1.3 Ejemplos y no-ejemplos. 39

II.3.1.4 El papel de las definiciones en el aprendizaje de la Matemática. 40

II.3.1.5 Consideraciones finales. 42

II.3.2 La demostración. 43

II.3.2.1 Argumentar, explicar, probar, demostrar. 44
II.3.2.2 Las funciones de la demostración. 45
La demostración en la comunidad matemática. 46
La demostración en la clase de Matemática. 47
II.3.2.3 Los contraejemplos. 49
II.3.2.4 Consideraciones finales. 52

III. PARTE EXPERIMENTAL: ASPECTOS METODOLÓGICOS. 54

III.1 La tesis de maestría. 54

III.2 El cuestionario. 55

III.3 Las entrevistas. 55
III.3.1 Perfil de los entrevistados. 56
III.3.2 Comentarios sobre el guión de la entrevista. 56
III.3.3 Algunas consideraciones desde el punto de vista matemático. 61
III.3.4 Análisis de las entrevistas. 61

IV. PARTE EXPERIMENTAL: ANÁLISIS DE LOS DATOS. 64

IV.1 Análisis de los cuestionarios 64
IV.1.1 Datos provenientes de la tesis de maestría. 64
IV.1.2 Nuevos datos. 68
IV.1.3 Conclusiones del análisis de los primeros datos. 76

IV.2 Algunas consideraciones desde el punto de vista matemático. 77
IV.2.1 Definiciones de función de concavidad positiva. 77
IV.2.2 Teoremas relativos a la aproximación del área bajo el gráfico para funciones de concavidad positiva. 83

IV.3 Análisis de las entrevistas. 89
A1. Sobre las definiciones de rectángulo y trapecio. 89
A2. Sobre las caracterizaciones de función de concavidad positiva. . . . 92
A3. Sobre ejemplos y no-ejemplos de función de concavidad positiva 103
A4. Sobre la clasificación de funciones que tienen por gráfico una recta como ejemplos o no ejemplos de función de concavidad positiva 109
IV.3.A Conclusiones del análisis con relación a las definiciones. 114
B1. Sobre la interpretación de los enunciados. 117
B2. Sobre la lectura de los diagramas involucrados en las pruebas visuales. 119
B3. Sobre la verbalización de los argumentos visuales requeridos en las pruebas que aparecen en las entrevistas. 124
B4. Sobre la consideración como ejemplos genéricos de los diagramas involucrados en las pruebas visuales. 131

B5. Sobre el carácter global de los diagramas que aparecen en las pruebas visuales. 137

B6. Sobre la validez de la prueba del primer teorema independientemente del número de intervalos en que se aplique el método trapezoidal. 139

B7. Sobre la modificación de hipótesis en los dos primeros teoremas .142

B8. Sobre las conjeturas acerca de las aproximaciones brindadas por los métodos rectangulares para funciones de concavidad positiva .147

IV.3.B Conclusiones del análisis con relación a las pruebas. 150

V. CONCLUSIONES. 153

V.1 Introducción. 153

V.2 Consideraciones teóricas. 154

V.3 Parte experimental: aspectos metodológicos. 155

V.4 Parte experimental: análisis de los datos. 156

V.5 Implicancias en la tarea docente. 160

V.6 Tareas futuras. 161

VI. BIBLIOGRAFÍA. 162

VII. ANEXOS. 166

VII.1 Copia del cuestionario propuesto. 166

VII.2 Guión de la entrevista. 167

VII.3 Trascripción de las entrevistas. 174

I. INTRODUCCIÓN.........1
I.1 Características de la Enseñanza Matemática en las Etapas Elemental y Avanzada.........1
I.1.1 Caracterización según los conceptos que tratan.........1
I.1.2 Caracterización según los procesos de pensamiento que intervienen.........2
I.1.3 Caracterización según sus estudiantes.........2
I.1.4 Caracterización según las estrategias de enseñanza utilizadas.........3
I.1.5 La etapa de transición.........4
I.2 ¿Qué pretende esta tesis?.........4

I. INTRODUCCIÓN

Nuestra actividad docente nos ha llevado a observar cada año las dificultades que presentan los estudiantes para enfrentar las exigencias de los cursos de Matemática, tanto en la etapa secundaria post-obligatoria como en los primeros años de la etapa terciaria. Esta observación nos llamó a la reflexión sobre esta problemática y el trabajo que aquí presentamos es, en parte, producto de esa preocupación.

Podemos presentar como una primera razón de este trabajo la búsqueda de elementos que influyan favorablemente en el aprovechamiento por parte del estudiante de sus estudios preuniversitarios en Matemática. Para poder profundizar en la presentación de las motivaciones que guían este trabajo, y poder explicitarlas en forma de objetivos, creemos adecuado caracterizar primero la etapa de la enseñanza de la Matemática en que nos ubicamos: el Bachillerato, y a eso nos dedicaremos en este capítulo de introducción.

La puntualización realizada en el párrafo anterior no implica que consideremos que el Bachillerato deba ser diseñado exclusivamente desde una concepción de estudios preuniversitarios, sino que consideramos que, para aquellos estudiantes que planeen realizar estudios universitarios vinculados a la Matemática, el Bachillerato debería funcionar efectivamente como un período de transición. Tampoco implica que alguna de las reflexiones aquí vertidas no se aplique a la Matemática incluida en los planes de estudios de las otras opciones ofrecidas por el Bachillerato, pero saber cuáles de estas reflexiones son pertinentes y en qué grado sería tema de otro trabajo.

I.1 Características de la Enseñanza Matemática en las Etapas Elemental y Avanzada

Mientras que por “etapa elemental” nos referiremos a aquella que tiene lugar en las clases de Matemática hasta Secundaria Obligatoria, por “etapa avanzada” entenderemos la etapa asociada a la Enseñanza Matemática Universitaria, principalmente, en facultades de Matemática, Física o Ingeniería. Entre ambas ubicaremos una “etapa de transición” que aparece en diferentes momentos y con distintas duraciones, según el país, según la etapa histórica y en ocasiones, según el área de la Matemática a la que estemos haciendo referencia.

Para ubicar nuestro trabajo se nos hizo necesario buscar una caracterización de las etapas elemental y avanzada de la enseñanza de la Matemática, en esta primera sección presentamos los resultados de la revisión de bibliografía realizada a este respecto.

I.1.1 Caracterización según los conceptos que tratan

Si se intenta caracterizar la enseñanza de Matemática Avanzada por los conceptos matemáticos que maneja se encuentra el inconveniente de la falta de un claro corte entre los conceptos propios de esta etapa y los considerados de Matemática Elemental. Los conceptos tratados en Matemática Avanzada son, en su mayoría, producto de la evolución de conceptos elementales y en ocasiones, esta evolución representa un período difuso y difícil de describir.

Aunque el dominio de la Matemática Avanzada es vasto, la mayor parte de la investigación en su enseñanza y aprendizaje se centra en el Cálculo. Las razones pueden ser varias, entre ellas se puede mencionar que es el área de Matemática Avanzada que más tiempo ocupa en la enseñanza institucionalizada actual y que su comunicación posee un gran número de problemas no triviales que reclaman estudio. Distintas investigaciones han identificado los mismos y persistentes errores y dificultades de los estudiantes de cursos de Cálculo en distintos entornos sociales y con diferentes rangos de habilidad: la dificultad de distinguir entre límite y cota, la dificultad al interpretar y manipular proposiciones que incluyen cuantificadores, las inconsistencias relacionadas con conjuntos infinitos, y más en general: la presencia de procedimientos (tales como hallar límites, derivar, primitivizar, resolver ecuaciones diferenciales, etc.) asociados a estructuras cognitivas muy pobres y manejados en un nivel puramente algorítmico, la escasa visualización de los conceptos involucrados, la ausencia de conexiones cognitivas entre lo visual y lo simbólico, tanto para representar objetos como procesos matemáticos (Dreyfus, 1990). Estos errores y dificultades más generales, que acabamos de mencionar y que seguramente trascienden las fronteras de los cursos de Cálculo y el ámbito de los “conceptos”, indican exigencias para los alumnos que no están presentes de igual forma en la etapa elemental y sugieren discontinuidades con la etapa avanzada.

I.1.2 Caracterización según los procesos de pensamiento que intervienen

Tampoco existen elementos que distingan los procesos involucrados cuando una persona está haciendo Matemática, en procesos avanzados y procesos elementales. Abstracción, análisis, categorización, conjeturación, definición, formalización, generalización, demostración, son procesos que no están confinados en la etapa Avanzada, lo que varía de una a otra etapa es el peso y la frecuencia de su uso. Existen ciertos problemas que involucran sólo conceptos elementales y cuya resolución implica la intervención de procesos de pensamiento de los más característicos de la etapa avanzada (ej.: resolución de algunos problemas que aparecen en competencias matemáticas para jóvenes preuniversitarios) y por otro lado, un tratamiento exclusivamente rutinario de los temas más avanzados no exige más que un entrenamiento al que se pueden someter los estudiantes sin que éstos desarrollen ningún tipo de comportamiento diferente al que mostraban en etapas elementales (Dreyfus, 1991).

I.1.3 Caracterización según sus estudiantes

En cuanto a las características de los grupos de estudiantes que toman cursos avanzados de Matemática, una primera impresión llevaría a creer que existe una gran discontinuidad entre la etapa universitaria y las etapas previas a que el estudiante acceda a la Universidad, debido a que en la primera existe una voluntad explícita de los estudiantes por realizar estos cursos. Sin embargo, un análisis más cuidadoso desestima la existencia de tal discontinuidad, los alumnos siguen estudiando un conjunto de materias en el que la

Matemática no es siempre prioritaria; a menudo, es sólo un prerrequisito para cursos más avanzados que no son de Matemática pero representan el verdadero interés del estudiante. Así la actitud frente a la Matemática no presenta cambios tan destacables como se podría creer. (Robert & Schwarzenberger, 1991).

I.1.4 Caracterización según las estrategias de enseñanza utilizadas

Es principalmente en esta faceta donde se detectan más diferencias entre una y otra etapa. En el siguiente cuadro, elaborado sobre la base del que aparece en Alsinet et al. (1996), aparece una reseña de las diferencias que podrían presentarse bajo ciertos modelos de enseñanza:

	Etapa Elemental		Etapa Avanzada
Estructura de las unidades didácticas	- Son cortas, y en ellas no se presenta diferenciación entre la teoría y la práctica.		- Se presenta mucha información, en poco tiempo y sin ser precedida por una familiarización previa con las nociones que involucra; - los espacios dedicados a la teoría y a la práctica se presentan diferenciados y a menudo, distanciados en el tiempo y dirigidos por profesores diferentes, donde el profesor más calificado (en el área matemática) suele encargarse de la teoría.
Estrategias utilizadas en el aula	- Basada en la resolución de problemas, entre los que están ausentes los pedidos de justificaciones; - presenta una tendencia hacia la rutinización de tareas, que convive con un rechazo ideológico a lo no creativo; - el uso de definiciones se restringe a la descripción de objetos ya conocidos.		- En las clases teóricas se trabaja sobre la base de exposiciones magistrales centradas en la presentación de definiciones, teoremas y aplicaciones; - la demostración formal sustituye plenamente a la explicación discursiva como método de validación; - las definiciones ya no describen objetos conocidos sino que los construyen formalmente; - en las clases prácticas, los problemas para resolver pasan a un segundo plano y son sustituidos en gran número por problemas para demostrar; - no se fomenta la rutinización de tareas pero se exige implícitamente.
Dispositivos didácticos	- Libros de texto, fichas de trabajo, u otros materiales impresos que el profesor sigue literalmente, muy procesados para que estén "a punto" para ser usados por el alumno y conteniendo toda la información requerida.		- Aunque se sugieren libros de texto, el profesor no los suele seguir estrictamente; - el alumno produce su propio material, el cual a menudo debe completar con búsquedas autónomas de información.

Roles del profesor y los alumnos	- *Profesor*: es el responsable del aprendizaje del alumno. - *Alumnos*: alcanza con que “sigan la clase” y hagan lo que el profesor les indica en cada momento.		- *Alumnos*: son responsables de su aprendizaje, por lo que: deben ampliar el horario de estudio más allá de la permanencia en el aula, deben poder justificar todo lo que afirman (la intuición es ahora insuficiente), deben encontrar el equilibrio entre sus conocimientos prácticos y teóricos, deben ser capaces de comunicar adecuadamente esos conocimientos y deben ser capaces de evaluar la corrección, relevancia o elegancia de esa formulación. - *Profesor*: guía una parte del proceso de estudio.
Evaluación	- Sobre la base de exámenes o pruebas parciales complementadas con aportaciones más globales que incluyen valoraciones de la participación en clase o del desempeño en tareas domiciliarias; - en las pruebas se pide mayoritariamente reproducir lo hecho en clase, con escasa exigencia de justificaciones; - los mecanismos de evaluación ocupan cada vez más espacio en el proceso de enseñanza tendiendo a integrarse en él.		- Sobre la base de exámenes, donde se suele pedir la resolución de problemas poco rutinarios y donde la teoría, que ocupa la mayor parte del tiempo de clase, no tiene una presencia equivalente; - distanciada del proceso de enseñanza en tiempo y también en espíritu desde que considera a las clases prácticas y teóricas impartidas como simples ayudas de un proceso de estudio que el alumno debe realizar por sí solo, siendo este proceso de estudio lo que se pretende evaluar.

I.1.5 La etapa de transición

Después de haber analizado las caracterizaciones disponibles de las etapas elemental y avanzada de la enseñanza de la Matemática y de convencernos de lo difuso que resulta el pasaje de una a otra, creemos más adecuado que intentar marcar la frontera, considerar entre ambas una etapa de transición. Esta nueva etapa se caracterizaría por tres aspectos que en esta primera instancia apenas mencionaremos, para ser motivo luego de un análisis en mayor profundidad:

- el traspaso de la responsabilidad del aprendizaje desde el profesor al alumno,
- cambios en la vinculación del alumno con las tareas rutinarias, con el tratamiento de la información visual y con los símbolos usados para designar tanto objetos como procesos matemáticos, y
- el incremento, en frecuencia y relevancia, de dos comportamientos matemáticos: la demostración y la definición.

I.2 ¿Qué pretende esta tesis

Como habíamos mencionado al comenzar este capítulo, la primera motivación de este trabajo consistía principalmente en identificar y estudiar actividades que podrían influir favorablemente en el aprovechamiento por parte del estudiante del período de transición entre las etapas elemental y avanzada de sus estudios en Matemática. Esta búsqueda nos reclamó la caracterización de esta etapa de transición; lo cual ya comenzamos a hacer en este capítulo de introducción, detectando ciertas discontinuidades entre las distintas etapas, cuyo estudio debemos profundizar en los capítulos que siguen.

Para ello, en las próximas páginas analizaremos las discontinuidades detectadas en el pasaje entre las etapas elemental y avanzada, a partir de una revisión de bibliografía seleccionada y organizada según el criterio que nos dicta el objetivo perseguido. Presentaremos este análisis en tres grandes bloques según la dimensión en que se centra la detección de esas discontinuidades[1]:

- *Aspectos institucionales:* La enseñanza de la Matemática en cualquier etapa debe atender las características propias de la institución en la que tiene lugar. Éstas se manifiestan en un Contrato Didáctico y en un proceso de Transposición Didáctica que le son específicos y que por tanto varían notablemente entre la Secundaria Obligatoria y la Universidad, afectando al propio conocimiento matemático involucrado.
- *Aspectos cognitivos:* La enseñanza de la Matemática en cualquier etapa también debe atender las restricciones asociadas al desarrollo cognitivo de los individuos a los que está destinada. En este trabajo nos concentraremos en el estudio de algunas actividades cognitivas que adquieren suma importancia en la etapa que nos ocupa: el uso de algoritmos que permiten desproblematizar la realización de tareas extensas o reiterativas, el uso de símbolos que "sustituyen" a los procesos u objetos a los que nombran y sobretodo, el uso de representaciones visuales.
- *Aspectos epistemológicos:* El análisis de los aspectos cognitivos e institucionales aparece en este trabajo de manera auxiliar, apoyando a lo que se podría considerar el centro del marco teórico: el análisis de los comportamientos matemáticos de demostración y definición, entendidos como fundamentales para poder entender la transición de la Enseñanza de la Matemática entre las etapas elemental y avanzada.

Después de estas primeras consideraciones teóricas respecto al período de transición, presentaremos la parte experimental del trabajo.

El contenido matemático que subyace en las actividades que aquí analizaremos es, en general, el tema Integrales y, en particular, las relaciones entre la concavidad de una función positiva y el tipo de aproximación dada por los métodos trapezoidal o rectangulares al valor del área bajo su gráfico. Las razones que nos llevaron a elegir el tema Integrales radican en la necesidad de ilustrar las consideraciones realizadas en el análisis teórico sobre la base de un contenido matemático concreto. El tema Integrales se presta especialmente a nuestro propósito debido a su ubicación en la etapa de transición en gran parte de los currículos de Matemática. También este tema muestra su adecuación a nuestros intereses debido a la riqueza de sus perfiles visuales, numéricos y algebraicos que ya habíamos detectado en nuestra tesis de maestría (Calvo, 1997). Realizamos la recolección de datos para esta parte del trabajo sobre la base de un diseño tradicional: un cuestionario aplicado, en nuestro caso, a estudiantes del último año de Bachillerato (orientación científica) y entrevistas a estudiantes del primer año universitario (Licenciatura de Matemática) organizadas en torno a la lectura, por parte de los entrevistados, de algunas pruebas visuales y a otras actividades vinculadas con esas pruebas.

---

[1] En esta clasificación seguimos a Artigue (1995), en ella se entiende por *dimensión institucional o didáctica* aquella que está asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza, por *dimensión cognitiva* la asociada a las características cognitivas del público al que se dirige la enseñanza y por *dimensión epistemológica* la asociada a las características del saber en juego.

Al analizar estos datos, por un lado, buscaremos rectificar o ratificar algunas de las conclusiones a las que habíamos llegado en el trabajo de investigación realizado para la tesis de maestría. Por otro lado, teniendo en mente lo recogido en las consideraciones teóricas respecto al período de transición, realizaremos un análisis centrado en dos ejes: las actividades de definición y las actividades de demostración. Intentaremos identificar en ellas aquellos elementos que, tal como lo planteamos en nuestro objetivo de trabajo, podrían influir positivamente en el aprovechamiento por parte del estudiante de la etapa de transición, por ejemplo: la variedad de caracterizaciones para los objetos matemáticos con que se trabaja, la riqueza del repertorio de ejemplos y no-ejemplos asociados a esos objetos, la discriminación entre atributos relevantes e irrelevantes de los ejemplos, la aceptación de funciones de la demostración más allá de la validación de una afirmación, la reflexión sobre el uso de diagramas en las actividades de justificación.

Como habíamos mencionado al comenzar este capítulo de introducción, la preocupación, compartida por muchos de nuestros colegas, por entender y atender las dificultades que presentan los estudiantes para enfrentar las exigencias de los cursos de Matemática, tanto en la etapa de transición como en los primeros años de la Universidad, fue motivadora de este trabajo. Creemos por tanto que, aunque el centro del trabajo sea exponer algunas consideraciones teóricas que permitan la necesaria caracterización de la etapa de transición y realizar un detallado análisis de la respuesta de algunos alumnos a ciertas tareas elegidas especialmente, no habríamos avanzado con relación a nuestra preocupación inicial si, como mínimo, no intentáramos presentar algunas de las conclusiones a las que lleguemos en forma de posibles aportes a la tarea docente.

II CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Tal como habíamos adelantado en el capítulo previo, comenzaremos este trabajo analizando las discontinuidades detectadas en el pasaje entre las etapas elemental y avanzada, agrupándolas en tres bloques:

La primera sección la dedicaremos a las nociones de Contrato Didáctico y Transposición Didáctica, intentando con ellas dar más luz sobre lo que señalamos como una característica de la etapa de transición: el traspaso de la responsabilidad del aprendizaje desde el profesor al alumno

Otra de las características que señalamos en relación con la etapa de transición fue la expectativa de cambios en la vinculación del alumno con las tareas rutinarias, con el tratamiento de la información visual y con el manejo de los procesos, de los objetos resultantes de dichos procesos y de los símbolos usados para nombrarlos. Es por eso que la segunda sección la dedicaremos a estudiar algunos aspectos de las actividades cognitivas conocidas como encapsulación, visualización y algoritmización.

En la última sección de este capítulo nos dedicaremos al análisis de las actividades de demostración y definición en Matemática, entendiendo que el cambio de status de estas actividades en el aula es una característica fundamental de la etapa de transición.

II.1 Contrato Didáctico y Transposición Didáctica

Tanto la teoría de la Transposición Didáctica como la teoría de las Situaciones Didácticas comparten la premisa de considerar los sistemas didácticos compuestos de tres polos en continua interacción: el conocimiento matemático, el alumno y el profesor, pero difieren en el nivel en el que enfocan el estudio de estos sistemas didácticos. Mientras que la teoría de las Situaciones Didácticas se sitúa a un nivel local, la teoría de la Transposición Didáctica abarca desde las instituciones donde tiene origen el conocimiento que se dispone enseñar hasta las instituciones destinatarias de esa enseñanza, ofreciendo así una visión de tipo global de los fenómenos didácticos (Artigue, 1994).

Son estos dos puntos de vista los que nos interesa rescatar para contribuir con ellos al análisis de la transición desde una perspectiva institucional. En la presente sección realizaremos un primer acercamiento a algunas nociones de estas teorías, después del cual plantearemos algunas consideraciones con relación al uso que haremos de estas nociones en el contexto de nuestro trabajo.

II.1.1 La teoría de la Transposición Didáctica

Cuando un matemático se dispone a comunicar el fruto de su trabajo como investigador a otros miembros de su comunidad, da inicio a un proceso de transformación del conocimiento que constituye uno de los objetos de estudio centrales de la Didáctica de la Matemática y que analizaremos a continuación: la Transposición Didáctica.

Como decíamos, esta transformación comienza en el seno de la comunidad matemática como respuesta a exigencias impuestas por la comunicación, o sea, para permitir que el receptor conozca los resultados a los que ha llegado su colega y se convenza de su validez sin verse obligado a invertir tiempo y esfuerzo en redescubrir cada uno de estos resultados. Es así, que el matemático debe distinguir, entre la totalidad de sus reflexiones, un trayecto que conduzca al conocimiento que quiere transmitir, descartando los intentos que no tuvieron éxito, ocultando las razones subjetivas que lo guiaron, suprimiendo las pausas y los retrocesos que tuvieron lugar durante su búsqueda, aunque esto signifique esconder el hilo conductor de su investigación, la lógica de su descubrimiento. Se produce, de esta manera, una despersonalización, descontextualización y destemporalización del conocimiento característica de la presentación de conocimientos matemáticos en libros, revistas, congresos y seminarios (Brousseau, 1986).

A las clases de la escuela primaria y secundaria llegan sólo unos pocos de los conocimientos matemáticos que ha ido construyendo la comunidad a lo largo de su historia. En la selección de este subconjunto de conocimientos matemáticos que será enseñado, participan (directa o indirectamente y con distintos grados de implicación) diversas personas e instituciones: profesores, matemáticos con interés en la enseñanza, representantes políticos, asociaciones de padres, editores y autores de libros de texto, etc.; integran lo que Chevallard (1991) denomina *noosfera*, o sea, la esfera donde se debate acerca de los contenidos y métodos de la enseñanza y cuyas opiniones influyen en alguna medida en las decisiones que a este respecto se toman.

La noosfera accede por dos vías a la adaptación de la enseñanza vigente: mediante cambios en los contenidos y mediante cambios en los métodos. Estas vías difieren entre sí en la relación costo-eficiencia: mientras que los contenidos se presentan como una variable controlable a partir de cambios en programas, sugerencias oficiales, presentación de manuales, etc., se carece de canales seguros a través de los cuales se pueda promover la modificación de los métodos de enseñanza. Esta situación conduce a la noosfera a actuar mayoritariamente mediante manipulación de los contenidos, seleccionando los elementos del saber propio de la comunidad matemática que serán enseñados, e integrando unos con otros para organizar una enseñanza que, además de compatible con sus propósitos, sea viable (Chevallard, 1991).

Luego de decidirse qué conocimientos se enseñarán, éstos deben integrarse a los textos que guían el trabajo del profesor (entendiendo "textos" en un sentido amplio, que incluye: libros, programas, sugerencias oficiales) para lo cual deben continuar siendo objeto de transformaciones que tomen en consideración distintos factores como ser: qué se entiende por actividad matemática escolar.

Desde que se considera que estudiar matemática no se restringe a aprender definiciones y teoremas y reconocer la ocasión de aplicarlos, sino que implica también que el estudiante se involucre en la actividad (planteando a la vez que resolviendo problemas, probando y refutando, construyendo modelos, lenguajes y teorías, comunicando y contrastando sus conclusiones con sus pares), el profesor deberá dar a sus alumnos los medios para recrear una historia particular para cada conocimiento que se ha decidido enseñar. O sea, el profesor debe transformar el conocimiento: recontextualizarlo y repersonalizarlo.

El producto del aprendizaje, conducido por el profesor mediante la propuesta de situaciones problemáticas destinadas a que el alumno haga suyo y dé sentido al conocimiento, debe ser consistente con el que comparte la comunidad científica y cultural de la época. Para ello el profesor debe intervenir nuevamente, ahora a través de la institucionalización de dicho conocimiento, intentando redescontextualizarlo de la historia particular en la que se lo ha presentado e identificarlo con el conocimiento propio de la comunidad científica. Según Brousseau, la práctica empírica de la enseñanza de la Matemática no conduce espontáneamente a los profesores a una simulación correcta de la enseñanza, ya que, en general, se ven tentados a economizar el doble trabajo de recontextualización y redescontextualización presentando directamente el texto del saber tal como sale de la comunidad científica (por ejemplo: mediante una sucesión de axiomas, definiciones y teoremas tal como aparece en los libros propios de la disciplina).

Habiendo analizado los distintos cambios que se operan sobre un mismo conocimiento tanto dentro como fuera del sistema de enseñanza, Yves Chevallard introduce la expresión Transposición Didáctica para nombrar al proceso de transformación de un conocimiento desde que es "objeto del saber", propio de la comunidad matemática, pasando a ser después "objeto a enseñar" y llegando a ser por último un "objeto de enseñanza" cuando alcanza al alumno. Es importante destacar que las transformaciones a las que se hace referencia no son en ningún caso simplificaciones del saber propio de la comunidad científica sino que se trata de adaptaciones del saber que hacen (o por lo menos, pretenden hacer) posible su integración en la enseñanza.

La introducción de instrumentos informáticos en la enseñanza hace más complejo el esquema presentado al tener que tomar en cuenta las transformaciones que se operan sobre un conocimiento cuando éste se presenta en el aula utilizando dichos instrumentos. Esta cuestión condujo a Balacheff a refinar la noción de Transposición Didáctica mediante la noción de Transposición Informática. El trabajo de identificación de las transformaciones a las que da lugar el uso de instrumentos informáticos, es esencial para comprender los desfasajes existentes entre el funcionamiento escolar usual del conocimiento y el funcionamiento permitido por los instrumentos en cuestión y para analizar los problemas de legitimidad institucional que puedan surgir (Artigue, 1997).

II.1.2 La teoría de las Situaciones Didácticas

Esta teoría, presentada en primer término por Guy Brousseau en su artículo “Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática”, busca estudiar, apoyándose en enfoques constructivistas del aprendizaje, las situaciones de apropiación de conocimiento matemático a partir de la adaptación del alumno a ambientes que se le presentan en un inicio como problemáticos (Artigue, 1994).

Presentaremos a grandes rasgos, algunas de las ideas fundamentales de esta teoría con el fin de poder presentar luego la noción de Contrato Didáctico, la cual nos resultará esclarecedora de ciertos aspectos que analizaremos más adelante.

Con el objetivo de que los alumnos se apropien de un determinado conocimiento, el profesor les propone una serie de situaciones tales que la estrategia óptima para resolver el problema que cada situación implica, se obtiene usando algún aspecto de dicho conocimiento. En este contexto, se entiende que el alumno aprendió ese conocimiento cuando fue capaz de adaptarse, mediante modificaciones de su estrategia, a las diferentes situaciones elegidas para caracterizar a ese conocimiento.

La variedad de situaciones presentadas debe cubrir distintos tipos de respuestas por parte del alumno al que se le propone. Según esta perspectiva cada situación puede ser de una de las siguientes clases:

- *Situación de acción* se trata de la propuesta de un problema tal que el alumno puede actuar sobre él (aunque no sea siguiendo desde un primer momento la estrategia óptima) y hacer elecciones durante esta acción, al mismo tiempo que la situación le brinda información sobre los resultados de su acción. Este *diálogo* que mantiene el alumno con la situación le permite tomar decisiones (aunque no pueda aún formularlas o justificarlas) y actuar en consecuencia.
- *Situación de formulación* es aquella que promueve el intercambio de información entre el alumno y un interlocutor (que puede ser otro alumno, el profesor o él mismo) mediante mensajes redactados en lenguaje matemático (no necesariamente escrito), usando un conjunto de signos y reglas, ya conocidos o nuevos.
- *Situación de validación* es la ocasión en que el alumno somete el mensaje matemático al criterio de su interlocutor justificando su exactitud y pertinencia. Se plantea así un *debate* donde el interlocutor puede participar pidiendo explicaciones suplementarias ante aquellas que no comprende, o rechazando aquellas que puede refutar, lo que puede llevar al alumno a nuevas acciones, nuevas formulaciones y nuevas validaciones. (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997)

Para que alrededor de estas situaciones exista aprendizaje y asegurar con éste la transmisión de los conocimientos culturales que se desea adquieran los alumnos, se requieren dos tipos de intervenciones del profesor: *institucionalizaciones* y *devoluciones*.

La institucionalización

Se entiende por institucionalización la acción mediante la cual el profesor atribuye a un conocimiento, aprendido como fruto de las situaciones escogidas para representarlo, la condición de objeto matemático digno de interés científico. En la terminología de Brousseau se diría que el conocimiento en cuestión adquiere así el status de “saber”.

Para este cambio de status del conocimiento es indispensable la intervención del profesor ya que el alumno que ha aceptado su responsabilidad ante los problemas propuestos tiende a pensar que los ha resuelto por ejercicio normal de sus conocimientos anteriores, sin distinguir la presencia de un nuevo conocimiento. Esta intervención también resulta ineludible desde que el alumno no es libre de elegir la interpretación de sus construcciones, ésta debe ser compatible con los significados reconocidos por la comunidad para hacer posible la participación del alumno en las actividades sociales.

La institucionalización se lleva a cabo mediante la elección de algunas de las actividades promovidas por las situaciones que el profesor había propuesto a sus alumnos para representar al conocimiento, señalando ahora los aspectos que deben ser retenidos y relacionándolos con otros conocimientos aprendidos anteriormente. En la enseñanza tradicional el tiempo de clase se invierte casi exclusivamente en este tipo de intervención del profesor, en detrimento del trabajo del alumno con las situaciones matemáticas específicas de los conocimientos que se quieren enseñar (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997)

La devolución y el Contrato Didáctico

La devolución[1] es la acción mediante la cual el profesor traspasa al alumno la responsabilidad de la situación que le propone con relación a un determinado conocimiento, aceptando él la responsabilidad de esta transferencia. Esta acción tiene lugar en el seno de la negociación de un contrato muy particular: el *Contrato Didáctico* (específico del conocimiento en cuestión) el cual contempla, por ejemplo:

- que las consignas y reglas que rigen la situación que el profesor propone, sean entendibles para el alumno,
- que el alumno no conozca de antemano la estrategia para resolver la situación, pues en ese caso no se trataría de un aprendizaje, sino un reforzamiento o consolidación del conocimiento (lo cual no deja de ser un objetivo atendible en algunas circunstancias),
- que el alumno se enfrente a la necesidad de elegir entre más de una posibilidad en su búsqueda de la solución (cuando esta cláusula del contrato es transgredida se presentan fenómenos como, por ejemplo, el efecto Jourdain: el profesor reconoce como muestra de conocimiento un comportamiento del alumno que no es más que una respuesta que tiene causas triviales ajenas al conocimiento en cuestión),
- que, puesto que el medio natural del alumno no es didáctico, las situaciones propuestas provoquen en el alumno una interacción con el conocimiento asociado lo más independiente posible de las intenciones didácticas del profesor, para lo cual éste comunicará o callará informaciones complementarias, preguntas, sugerencias, etc.

El Contrato Didáctico es un sistema de obligaciones recíprocas entre profesor y alumno referentes al conocimiento matemático que se busca enseñar pero no tiene la forma de un verdadero contrato por varias razones: no se puede explicitar completamente, está en continua evolución y renegociación en función de los conocimientos aprendidos, los "firmantes" del contrato aceptan la responsabilidad de acciones que no controlan (por ejemplo, el alumno acepta la responsabilidad de resolver problemas cuando aún no conoce la estrategia de solución) lo que ante un verdadero contrato los colocaría constantemente en "irresponsabilidad jurídica". Sin embargo, cuando una de las partes siente que la otra ha roto el contrato se revela como si verdaderamente existiera un contrato firmado (por ejemplo, cuando un alumno no justifica su respuesta o cuando el profesor propone un problema cuyo enunciado el alumno no comprende) (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997).

Antes de terminar analicemos la relación del Contrato Didáctico con otros contratos vigentes en interacciones sociales: El Contrato Didáctico no rige todos los aspectos de la relación que se establece entre los alumnos y el profesor. Existe un contrato más general, el *Contrato Pedagógico*, que no depende del contenido de estudio y que a su vez es parte de un contrato aún más amplio, el *Contrato Escolar*, que gobierna las instituciones escolares (en un sentido amplio: escuelas, institutos, universidades, etc.) Se pasa de la esfera de influencia del Contrato Pedagógico a la del Contrato Didáctico cuando la relación entre dos: profesor y alumno, se convierte en una relación entre tres, incluyendo ahora a la obra matemática a estudiar. Pero el funcionamiento del Contrato Didáctico se ve afectado por el contenido e interpretación que se ha hecho del Contrato Pedagógico, al igual que este se ve afectado por el Contrato Escolar.

[1] El significado original del término *devolución* corresponde al de un acto por el cual un rey, por decisión propia, abandona parte de su poder para remitirlo a una cámara.

El Contrato Pedagógico exige del alumno, por ejemplo, confianza en el profesor, en las decisiones que él toma y respeto hacia su persona, del profesor, entre otras cosas, exige atención hacia sus alumnos y sus condiciones de trabajo. Este contrato también mantiene cierto carácter implícito, por ejemplo, un alumno no puede preguntar al profesor si debe respetarle sin que su pregunta sea considerada una falta de respeto. Pero a diferencia del Contrato Didáctico, goza de una cierta estabilidad, seguramente debida a que el primero está asociado siempre a un conocimiento y éste evoluciona a medida que se cumple el contrato, exigiéndole continuas puestas al día. (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997)

Otro contrato del que nos interesa dar cuenta aquí es el que Balacheff & Laborde (1985) llaman *Contrato Experimental*, y que rige las interacciones que tienen lugar en situaciones diseñadas con la finalidad de recabar información, por ejemplo, para investigaciones en Didáctica. Este contrato, al igual que los mencionados antes, consta de cláusulas explícitas, como son las consignas que definen la situación, y también de abundantes cláusulas implícitas, como por ejemplo: las restricciones percibidas por los alumnos con relación a la finalidad del experimento, reglas heredadas de algún Contrato Didáctico vigente en las aulas a las que pertenecen los participantes del experimento y que no es posible dejar de lado en este tipo de situaciones o el requerimiento de que el profesor que está cumpliendo el papel de observador se comporte de una manera radicalmente diferente a como lo hace en situaciones de enseñanza: sin ayudar al alumno, sin corregirle, sin permitirle que lea en sus palabras o gestos la corrección de las respuestas que brinda, etc.

II.1.3 Consideraciones finales

- Lo analizado en esta sección nos permite, por sobre todo, enmarcar algo más la descripción de la etapa de transición que realizamos en la sección I.1.5. Tuvimos allí dificultades para distinguir las etapas elemental y avanzada de la enseñanza de la Matemática en términos de los conceptos que tratan y los procesos de pensamiento involucrado, ya que encontrábamos una continuidad entre una y otra etapa en este sentido, pero lo que ahora podríamos expresar es que lo que varía es el Contrato Didáctico asociado a la actividad matemática según la institución sea, la Secundaria Obligatoria, el Bachillerato o la Universidad.
- También podríamos retomar ahora la caracterización que realizamos de las etapas de la enseñanza de la Matemática según estrategias de clase utilizadas con la perspectiva que nos ofrece la teoría de Chevallard: en el ámbito universitario es más frecuente encontrar que se presente al alumno el conocimiento con un texto muy cercano al que lucía al salir de la comunidad matemática (ej.: mediante una sucesión de axiomas definiciones y problemas), dejando para que el alumno individualmente, en la órbita de su trabajo "práctico", realice las tareas de repersonalizar y recontextualizar el conocimiento para luego volver a despersonalizarlo y descontextualizarlo (responsabilidad que en etapas previas le correspondía a su profesor y éste la cumplía planificando actividades motivadoras para la presentación de un tema e institucionalizando posteriormente aquellos aspectos de las actividades que requerían ser destacadas por su condición de objeto matemático de interés)
- Otro aporte de la presente sección es un vocabulario más preciso que podrá dar más luz a algunas consideraciones que realizaremos, por ejemplo, al explicar las dificultades involucradas en el procesamiento visual de la información (sección II.2.2), al analizar el papel de las técnicas algorítmicas en el aprendizaje de la Matemática (sección II.2.3), al estudiar los factores que afectan la elección de una

definición (sección II.3.1.1) o al considerar las funciones de la demostración en la clase de Matemática (sección II.3.2.2).

II.2 Encapsulación, visualización y algoritmización

En esta sección estudiaremos algunos aspectos cognitivos que pueden contribuir al análisis de la etapa de transición. En el primer capítulo habíamos caracterizado esta etapa, en el ámbito cognitivo, por el cambio de la vinculación del alumno con:

- o el manejo de los procesos, de los objetos resultantes de esos procesos y de los símbolos usados para nombrarlos,
- o el tratamiento de la información visual, y
- o las tareas rutinarias.

Comencemos viendo por qué elegimos centrarnos en estos tres aspectos.

Para entender el desarrollo del pensamiento matemático Tall (1994) propone las siguientes hipótesis sobre la naturaleza cognitiva de los individuos:

Principio Cognitivo 1: Para sobrevivir, en el sentido darwiniano del término, el individuo debe tratar de maximizar el uso de su estructura cognitiva mediante focalizaciones sobre conceptos y métodos, descartando estados intermedios que no tengan valor futuro.

Principio Cognitivo 2: El cerebro posee un pequeño foco de atención y un gran espacio para almacenar información, debido a esto, el crecimiento cognitivo requiere un mecanismo eficaz de compresión de las ideas para poder abarcarlas en el pequeño foco de atención disponible y un mecanismo de vinculación de estas ideas con la información relevante almacenada que permita conducirla al foco de atención cuando sea requerida.

Principio Cognitivo 3: Un poderoso agente en el aprendizaje con comprensión es la realización de construcciones matemáticas por uno mismo y la reflexión sobre el propio conocimiento.

Del segundo principio se origina un interés especial por el desarrollo de actividades cognitivas que permitan comprimir información y construir relaciones significativas entre los distintos aspectos de la información almacenada. En Matemática estos métodos, que pasaremos a analizar a continuación, se caracterizan por el uso de:

- o Símbolos que permiten ser manipulados mentalmente en sustitución de los procesos u objetos que ellos nombran.
- o Representaciones visuales que reflejen la estructura de conceptos o procesos matemáticos.
- o Algoritmos que mediante rutinas manejen procesos muy largos de manera que su extensión no requiera mucha atención.

II.2.1 La encapsulación

Según Dubinsky (1991) la construcción de los conceptos matemáticos se puede describir sobre la base de varios mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversibilidad de objetos y procesos ya existentes en la estructura cognitiva del individuo. Por su relación con la construcción de los conceptos involucrados en este trabajo, nos detendremos en la encapsulación.

Este mecanismo, fundamental para el funcionamiento del pensamiento matemático, es la conversión de un proceso (dinámico) en un objeto matemático (estático) y el estudio de algunos de sus aspectos será de lo que nos ocuparemos a continuación.

Algunas situaciones requieren para su comprensión que ciertos conceptos, que podrían ser considerados en algún contexto como procesos, actúen como objetos estáticos. Por ejemplo, muchos estudiantes que han asimilado el proceso de estimar el área bajo una curva mediante áreas de rectángulos apropiados, cuya suma se somete luego a un pasaje al límite, tienen dificultades en la etapa en que se hace variar uno de los extremos del intervalo dando origen a una nueva función. La causa de esta dificultad es que los estudiantes se ven exigidos aquí a encapsular la totalidad del proceso del cálculo de área en un único objeto: un número. Esta encapsulación es imprescindible para la construcción de nuevos conceptos matemáticos como ser el operador integral (o sea, el operador que asocia a cada función f integrable en $[a,b]$ la función I: $[a,b] \to$ R tal que I(t)=$\int_a^t f$), dándose la situación de que las dificultades al apreciar el carácter funcional de la relación involucrada, impiden la comprensión de cuestiones tan básicas en este ámbito como el Teorema Fundamental del Cálculo. Pero la necesidad de que el estudiante capte esta relación funcional va más allá, también es requerida para poder aplicarle el operador límite y considerar la integral impropia o para definir el logaritmo, si se opta por hacerlo a partir de una integral.

Harel & Kaput (1991) analizan esta necesidad de encapsulación en el uso de lo que denominan: operadores uniformes, en contraposición a operadores puntuales. Un ejemplo de este último tipo de operadores es la suma de funciones: para construir f+g a partir de f y g sólo es necesario conocer para cada elemento del dominio común las imágenes funcionales de una y otra función y sumarlas. Por el contrario, el operador integral, al igual que el operador derivada (el que asocia su derivada a cada función derivable), son uniformes: para conocer sus valores funcionales no es suficiente conocer algunos valores funcionales, la función f actúa como un único objeto por lo que exige sea encapsulada. Un momento en que se aprecia la dificultad de captar la calidad uniforme del operador derivada es al trabajar con funciones como $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & si\ x \neq 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$, donde la respuesta habitual de los estudiantes es “derivarla” punto a punto, obteniendo: $f\,'(\mathrm{x}) = \begin{cases} \cos x & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases}$ cuando en realidad no existe f ’(0). A este ilustrador ejemplo de Harel & Kaput podemos agregar el de una dificultad similar que se presenta en relación al carácter uniforme del operador integral: al trabajar con la función I(t)=$\int_0^t f$ cuando $f(x) = \begin{cases} x & si\ x > 1 \\ x^2 & si\ x \leq 1 \end{cases}$ algunos estudiantes comenten el error de considerar que para t>1: $\mathrm{I}(t) = \int_0^t x dx$, en vez de $\mathrm{I}(t) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^t x dx$.

Describamos ahora con más detalle cómo se da este mecanismo de encapsulación y en qué instancias previas al Cálculo Diferencial e Integral, los alumnos han recurrido a él.

El pensamiento proceptual

Habitualmente se distingue entre las destrezas o procedimientos que el sujeto necesita adquirir para poder hacer cosas y los conceptos o hechos básicos que se espera que conozca y sobre los cuales operará con aquellas destrezas. Esta distinción sugiere una dicotomía entre procedimientos y conceptos, entre cosas para hacer y cosas para saber, que ciertos autores creen que no refleja adecuadamente los procesos de aprendizaje de la Matemática (Gray & Tall, 1994).

Los fundamentos de la aritmética son el concepto de número y la habilidad de contar, la repetición desde los primeros años del niño de la secuencia de los nombres de los números se hace parte del procedimiento que consiste en señalar cada uno de los elementos de una colección hasta que el último nombre mencionado se identifica con el número de elementos de esa colección. Así el proceso de contar se encapsula en el concepto de número. Esta interrelación entre el proceso de contar y el concepto de número permite reconsiderar la aparente dicotomía entre conocimiento procedimental y conceptual a la que se hacía referencia en un principio.

Los símbolos pueden ser interpretados de maneras diversas. A veces se los puede interpretar como representantes de un concepto mientras que en otras ocasiones se los reconoce como indicadores de un proceso. Por ejemplo, el símbolo "5+4" representa el proceso de adición y también el resultado de esa suma. Pero no sólo se disponen de ejemplos de esta dualidad en el campo de la aritmética elemental, por ejemplo, una representación decimal periódica (ej.: 0,99999999...) es a la vez un proceso de aproximación al número a partir de la consideración de más y más de sus cifras decimales y el número límite de ese proceso.

En este contexto, se llama "procepto elemental" a la amalgama de tres componentes: un proceso, un objeto matemático que es producto de ese proceso y un símbolo que representa tanto al proceso como al objeto. Un "procepto", propiamente dicho, consiste en una colección de proceptos elementales que tienen en común el mismo objeto (ej.: el procepto 6 incluye, el proceso de contar hasta 6, de sumar 3+3, de multiplicar 3x2, etc.). En el primer paso de la construcción de un procepto se halla la construcción de un procepto elemental, luego éste se va enriqueciendo a medida que el sujeto crece cognitivamente hasta conformar una estructura conceptual muy rica donde el símbolo representará todos los enlaces de esa estructura, los conceptuales y los procedimentales. A este tipo de pensamiento se lo conoce bajo el nombre de "pensamiento proceptual".

En el ámbito de la aritmética, se puede ilustrar esta clase de construcción con el caso del desarrollo de las primeras estrategias usadas por los niños para obtener una suma. Al inicio, la estrategia que utilizan es "contar todo": cuentan los elementos de un conjunto cuyo cardinal coincide con el primer sumando, cuentan los elementos de un conjunto cuyo cardinal coincide con el segundo sumando, unen ambos conjuntos y cuentan los elementos del conjunto resultante comenzando desde 1. Tan largo procedimiento les puede ocultar la relación entre el último número obtenido y los anteriores, impidiéndoles la encapsulación del objeto final. Pero cuando se dan cuenta que es innecesario recontar el primer conjunto nace una nueva forma de enfrentar el problema, "contar a partir del primer sumando": ese primer sumando (o el mayor de ambos en una etapa posterior) ya no evoca un procedimiento de conteo sino un objeto y sólo el segundo sumando actúa como un procedimiento (ej.: para realizar 3+2 contaría "TRES, cuatro, cinco"). Una tercera etapa en el desarrollo de estrategias para sumar es la que podemos etiquetar como "deducir nuevos hechos de los ya conocidos", por ejemplo: si al sumar 9+6 se obtuvo 15 por resultado y luego se debe sumar 9+8, al haber incrementado un sumando en dos unidades, se deduce que se debe aumentar en dos unidades la suma.

El estudiante que hace uso del pensamiento proceptual apropiándose, por ejemplo, de la segunda estrategia, realiza una tarea más simple que el estudiante que enfrenta el problema en forma exclusivamente procedimental. Estos estudiantes no sólo hacen una tarea cualitativamente diferente, el llevar a cabo procedimientos que exigen tanto su atención y su memoria activa les genera un sentimiento de inseguridad frente a la Matemática que afecta su rendimiento. Mientras que el pensamiento procedimental focaliza en los procedimientos y sus soportes físicos, el pensamiento proceptual se caracteriza por la habilidad de compactar etapas en la manipulación simbólica, partiendo de una visión flexible del símbolo y una utilización óptima de la limitada capacidad de la memoria a corto plazo (Gray & Tall, 1994).

Gray & Tall afirman que la flexibilidad en interpretar el simbolismo es la raíz de un pensamiento matemático exitoso y la ausencia de esta capacidad lleva al individuo al agotador uso de procedimientos que deben ser almacenados en la memoria de forma aislada (ej.: el uso de la regla que considera los signos y los valores absolutos de los sumandos para suma de enteros). Aquellos estudiantes que se concentran exclusivamente en los procedimientos pueden conseguir éxito en su tarea a corto plazo pero resignan la flexibilidad que los conduciría al éxito final. (Gray & Tall, 1993).

Volviendo a la etapa de la enseñanza de la Matemática que nos ocupa, un ejemplo del carácter proceptual de los conceptos involucrados, es el caso de los límites. Aquí resaltan las características propias de un procepto cuyo proceso asociado no siempre permite “calcular” el producto de ese proceso. En este caso, la estrategia es, por excelencia, deducir nuevos hechos de los antes conocidos, pero a diferencia de la aritmética, donde los nuevos hechos tienen el mismo status que los anteriores (pueden ser calculados siguiendo los mismos procesos aritméticos) aquí existen unos pocos hechos “elementales” (ej.: $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \to c} x = c$, $\lim_{x \to c} k = k$, etc.) derivados de la propia definición de límite y otros que se deducen de éstos a partir de un “álgebra de límites” cuya justificación exige el uso de la definición de límite. Este último comentario parecería indicar que los proceptos en Matemática Avanzada funcionan en un modo algo diferente que los proceptos en Matemática Elemental. (Tall, 1991b).

Otro ejemplo proveniente de los cursos de Cálculo sería el de la derivada. Se empieza con un proceso de acercamiento de rectas secantes al gráfico para obtener mediante el límite de sus pendientes la pendiente de la recta tangente, para cada elemento del dominio se encapsula todo ese procedimiento en un número real a partir del que se define la función derivada; luego esta función exigirá también que se la trate como un objeto ya sea para aplicarle el mismo proceso y obtener la derivada de segundo orden o para estudiar su signo para extraer información del comportamiento de la función inicial. Cuando un individuo se enfrenta a la expresión “$f'(a)$” flexiblemente habría de inclinarse por considerarla el resultado de un límite, la pendiente de una recta especial o la indicación mediante su signo del comportamiento de la función f en el punto a.

Bajo esta perspectiva, entonces, Gray & Tall destacan la importancia de:

- Ver en la bifurcación de estrategias entre el uso flexible de los símbolos como objetos o procesos y la fijación en procedimientos cognitivamente más exigentes, uno de los más significativos factores de la diferencia entre éxito y fracaso en Matemática; esta diferencia se ve afectada además por el carácter acumulativo de este fenómeno (las estrategias menos flexibles al sumar impactan en las que el alumno usará luego para multiplicar, y éstas en la que usará al aplicar potencias).

- Profundizar en la naturaleza proceptual de los conceptos matemáticos más aun que en los métodos procedimentales, valorizando el éxito a largo plazo frente al deslumbramiento de los métodos que aseguran éxito inmediato.
- Promover tareas de discusión en las que el profesor pueda escuchar al estudiante, pues sólo de esta manera es que puede detectar estrategias inapropiadas en su razonamiento.

La ambigüedad en el pensamiento matemático

Es sobre la base del pensamiento proceptual que en una disciplina caracterizada por la precisión el estudiante debe desarrollar "tolerancia" hacia la ambigüedad (Hanna, 1991). La formalización de la Matemática conlleva la elección de definiciones precisas para cada uno de los conceptos, lo cual esconde el uso ambiguo que los matemáticos hacen de los proceptos. Esta práctica dificulta el ingreso de los novatos al Pensamiento Matemático Avanzado, donde la fuerza radica en que bajo una definición que otorga un preciso significado a un símbolo, se ocultan otros que permiten manejarlo con flexibilidad. Con un enfoque estrictamente formal de la materia se puede estar ocultando al estudiante los verdaderos caminos por los que opera la Matemática (Tall, 1991b).

Lo que exige ambigüedad a los matemáticos en el uso de procesos y objetos es lo limitado de nuestra capacidad mental, de la que ya se había hecho mención al tratar los principios cognitivos de Tall. Pero en este intento de optimización del uso de la estructura cognitiva, los matemáticos no sólo son ambiguos en la consideración de los símbolos como procesos y objetos sino que también lo son considerando a veces al símbolo como si fuera el propio objeto que hay que manipular.

El hombre posee iniciativa simbólica, o sea, posee la capacidad de asignar símbolos a objetos e ideas de manera que puede invocarlos, relacionarlos y operar con ellos. Aunque es indiscutible la importancia de distinguir a voluntad entre símbolo y concepto, Pimm (1990) destaca la relevancia que posee en Matemática el uso de la simbolización como facilitador de la manipulación rápida y eficaz de los objetos a partir de eliminar su distinción con los símbolos que los representan. Es ventajoso disponer del mayor número posible de operaciones matemáticas en el nivel reflejo simbólico (o sea, viendo a su símbolo como si éste fuera el objeto), para aliviar la carga cognitiva pero sólo si uno puede convertir a voluntad estos actos reflejos en acciones sobre los objetos originales y someterlos al pensamiento y control conscientes. El matemático comprende lo que hace pero el estudiante en muchas ocasiones se apropia de esa conducta sin comprenderlo. Un llamado de alerta a este respecto es que, según Pimm, mientras que a los 6 años los niños conocen lo suficiente de su lengua materna como para distinguir los símbolos del lenguaje de los significados a los que están vinculados, con el lenguaje matemático, sin embargo, esta distinción es muy posterior y mucho más difícil de lograr.

Es fundamental el papel del símbolo al momento de encapsular procesos pues ayuda a verlo como un objeto que el símbolo nombra, pero como se ha visto, su actuación como sustituto de los conceptos involucra el peligro de que la notación no refiera al usuario ningún contenido mental más allá de la experiencia física, la manipulación de la propia notación. Es necesario entonces contrarrestar este efecto y una forma de hacerlo sería no introducir las notaciones antes de que los estudiantes construyan sus referentes mentales para estas notaciones (Harel & Kaput, 1991), no enseñar técnicas de integración previas a que el estudiante posea una estructura cognitiva asociada al concepto de integral que le permita dar significado a las manipulaciones que hace con el símbolo, no introducir la notación $\int_a^t f$ antes que el estudiante aprecie que las diferencias entre la integral y el concepto de área bajo el gráfico, merecen un nombre nuevo y una notación diferente porque se trata de un nuevo concepto.

II.2.2 La visualización

En el presente trabajo se entenderá la visualización como un proceso que incluye tanto la interpretación y la comprensión de modelos visuales que reflejan la estructura matemática de conceptos y procesos, como la habilidad de traducir en imágenes visuales información dada en forma simbólica. Además de estos aspectos de codificación y decodificación, se incluirá bajo esta denominación el procesamiento directo de información en forma visual (Dreyfus, 1990).

Así, pues, el uso que se hará aquí del término visualización difiere del uso que se hace de él en el lenguaje cotidiano o en psicología, donde se relaciona más con la formación de imágenes mentales que con la construcción, identificación y manipulación de diagramas (ya sean éstos tratados mentalmente, con lápiz y papel o con ayuda de la computadora) asociados a un concepto o problema matemático que permitan su comprensión o colaboren en su resolución.

Para tener éxito en Matemática es importante poseer representaciones mentales de un concepto que incluyan varios aspectos de dicho concepto (gráfico, numérico, algebraico) relacionados entre sí y que permitan flexibilidad en el pensamiento a partir de la convocatoria de los diferentes aspectos del concepto dependiendo del contexto. Así “tener un concepto” se puede entender como “tener el control sobre la representación que se desea convocar de tal concepto” siendo el carácter de conexión entre las distintos representaciones del concepto el que permite la flexibilidad deseada y no la mera existencia de variedad de estas representaciones. (Dreyfus, 1991).

Tanto la visualización como la integración de las diferentes representaciones de un concepto resultan ser aspectos muy problemáticos para el estudiante, no se aprenden automáticamente como se había supuesto en el pasado, sino que necesitan ser enseñados explícitamente e integrados a los distintos tópicos del currículo. (Dreyfus, 1990).

La visualización en los cursos de Cálculo

Varios estudios empíricos (Orton, 1983; Heid, 1988) muestran, entre los estudiantes de diferentes cursos de Cálculo, dominio del modo algebraico sobre el gráfico y carencias de significado en límites y aproximaciones. Según estos estudios los fenómenos anteriores se pueden explicar por un desequilibrio en el ámbito de la enseñanza entre el énfasis puesto sobre los procedimientos algorítmicos frente al punto de vista conceptual y por una prematura algoritmización de los procesos diferenciales e integrales que los aleja de su real significado.

Artigue (1991) sigue la misma línea a la hora de explicar este tipo de fenómenos; ella afirma que la introducción al Cálculo presenta dificultades a los estudiantes debidas a diferentes factores: el nivel altamente sofisticado de la estructura de sus fundamentos, la existencia de obstáculos como son la noción de infinito o la conceptualización de los reales, dificultades en el aprendizaje de técnicas específicas como ser el uso de cotas o de supremos e ínfimos, dificultades de formalización ya que el tratamiento formal del Cálculo introduce definiciones que entran en conflicto con las concepciones espontáneas del estudiante y el uso de cuantificadores que no operan en la misma dirección que el pensamiento intuitivo. Frente a estos conflictos la enseñanza tradicional se refugia en una algebrización del Cálculo: manipulación de fórmulas más que de funciones, énfasis en el cálculo de derivadas más que en la teoría de aproximaciones lineales, cálculo de primitivas más que la búsqueda de significado para la integración, aprendizaje de recetas para solucionar ecuaciones diferenciales más que desarrollar aproximaciones numéricas o gráficas de esas soluciones.

Comencemos presentando ejemplos de aspectos visuales relacionados con conceptos que forman parte de los primeros cursos de Cálculo Diferencia e Integral.

Las visualizaciones que se proponen en el tema integrales se basan mayoritariamente en relacionar la noción de integral con la noción de área, pero esta relación merece alguna puntualización. El registro matemático está repleto de metáforas: las hay "extra matemáticas" (cuando interpretan ideas desde el punto de vista de acontecimientos del mundo real) y también las hay "estructurales" (cuando las ideas proceden del propio mundo matemático). Como ejemplos de las primeras se tiene: el nombre de curva osculatriz o el modelar una ecuación como una balanza y como ejemplos de las últimas: el nombre de triángulos esféricos o el visualizar un número complejo como un vector. En este último ejemplo se ve resaltada una característica propia de las metáforas estructurales: no sólo se transfiere la representación gráfica del vector al complejo sino también su forma de sumar, el concepto de módulo, etc. La identificación que constituye la base de la metáfora sólo garantiza que se conservarán determinadas propiedades estructurales. Al ver que no se cumplen otras surgen a veces confusiones que alteran ambos sistemas, el original y aquel al que es aplicada la metáfora, es por esto imprescindible que el profesor realce la distinción entre el uso literal y metafórico de los términos, muestre el carácter convencional de esta metáfora y que existen diferencias entre ambos. Un ejemplo de esta falsa adscripción de significado de un término a otro es el uso de la expresión "área negativa" que surge de la metáfora de la integral como el área de la región "bajo la gráfica" en el caso en que la función es negativa en el intervalo considerado (Pimm, 1990).

Eisenberg (1994) presenta dos casos que pueden ilustrar la inclinación de los estudiantes por procesar información analíticamente antes que en forma visual en el contexto del tema Integrales.

- Cuando se pidió representar gráficamente la función $f(x) = \begin{cases} |x-2| & si\, 1 < x < 3 \\ 0 & sino \end{cases}$ y a continuación calcular $\int_{3/2}^{3} |x-2|\,dx$, el 90% de los encuestados graficó correctamente la función pero sólo el 44% de ellos calculó correctamente la integral (72% por integración y 28% a partir del análisis del gráfico).
- Cuando se pidió reproducir la demostración de que si f es positiva y estrictamente creciente en $[a,b]$ entonces $(b-a)f(a) < \int_a^b f < (b-a)f(b)$, se apreció una clara tendencia de los estudiantes hacia la presentación de la demostración analítica, aun

cuando la justificación gráfica es asombrosamente simple y cuando en el curso se habían dado de este teorema demostraciones visuales y algebraicas.

Los anteriores son apenas dos ejemplos de los muchos que se podrían presentar como evidencia de la preferencia de los estudiantes por procesar los conceptos matemáticos en un camino analítico antes que visual. Dreyfus & Eisenberg (1990) creen que esto se debe a que la información dada sobre la base de diagramas exige una actividad mental de más alto nivel que el procesamiento analítico, esto implicaría la necesidad de desarrollar el procesamiento visual en forma explícita dentro del currículo si se considera ésta una capacidad importante para que adquiera el estudiante.

- Un argumento didáctico radica en que el conocimiento académico es muy intrincado y contiene muchos enlaces y conexiones: como no puede ser presentado a los estudiantes como un paquete, la Transposición Didáctica lo ordena secuencialmente, omitiendo o destruyendo los enlaces entre conceptos y procedimientos que deben ser reconstruidos posteriormente. La secuencialización del conocimiento matemático produce entonces una compartimentación que transforma el “cuerpo de conocimiento” que es la Matemática en un gran número de “trocitos de conocimiento” aislados. Así es que la Matemática escolar se presenta usualmente en forma lineal y sobre la base de algoritmos y una presentación analítica se ajusta a sus exigencias por lo que es natural que los estudiantes prefieran este enfoque a la hora de procesar información.

- Un argumento cognitivo proviene de analizar el problema desde el punto de vista del procesamiento de la información, de la facilidad de reconocimiento y eficiencia de búsqueda de la información según ésta sea presentada en forma de diagrama o de sentencias. Como los diagramas preservan las relaciones entre los componentes de un problema se considera que permiten mayor acceso a la información que mediante el uso de sentencias; pero los diagramas incluyen mucha información implícita y concentrada, usan convenciones, exigen abstracciones cuyo desconocimiento impide acceder a la totalidad de la información que el diagrama aporta, a menos que se conozca como leer el diagrama. Para tomar conciencia de esta realidad basta tomar un problema que contenga una figura y tratar de redactarlo sin que esta aparezca: parte de la información que brinda la figura es necesaria, otra irrelevante; el estudiante para responder debe vencer la dificultad de detectar la información que necesita e ignorar la restante.

- Eisenberg (1994) aporta como otra posible razón, las creencias de la comunidad acerca de la naturaleza de la demostración. La influencia del bourbakismo en el énfasis de la expresión analítica de las ideas matemáticas ha sido tan marcada que es a menudo considerada la única forma aceptable de comunicación. Los matemáticos, mayoritariamente, no consideran las “demostraciones sin palabras”, o sea, las pruebas visuales como demostraciones, sino apenas como ayudas mnemotécnicas o como soportes para el seguimiento de “la” demostración analítica.

Por otro lado, se sabe que muchos matemáticos profesionales hacen uso de la visualización en su trabajo y que muchos disléxicos aprenden a suplir sus carencias en la realización de tareas secuenciales a partir del procesamiento visual de información, hasta pudiendo llegar a lograr un desarrollo mucho mayor que sus pares en este forma de procesar información (Faraday, Maxwell, Einstein, DaVinci son apenas unos pocos ejemplos de personas de este grupo). Eisenberg (1994) defiende la existencia de un continuo entre las personas cuyo modo de pensar es eminentemente visual y aquellas que lo hacen en forma analítica por excelencia. Se tiene evidencia que tampoco los matemáticos funcionan todos igual frente a las mismas tareas: están los que desarrollan su actividad a partir de una poderosa intuición de los procesos y su simbolismo, totalmente apoyados en la lógica del tema y encontrando redundantes las visualizaciones que se les presenten y están aquellos para los cuales las visualizaciones son indispensables (Tall, 1991b). No se trata de una dicotomía, sino que los individuos se hallan distribuidos entre ambos polos, lo que alienta a que, siempre que sea posible, se presenten en clase modos visuales y analíticos de representación de conceptos.

En este contexto, la visualización matemática busca más que una vaga intuición que sustituya superficialmente la comprensión de conceptos y procesos matemáticos, para lograrlo no puede ser presentada en forma aislada al resto de la actividad matemática. El estudiante debe conocer y aplicar en distintas etapas de su actividad: los modos gráfico, numérico y simbólico del lenguaje matemático, descubrir las ventajas y limitaciones de cada uno y aprender a traducir de uno a otro de estos dialectos con soltura.

Objetivos de la visualización en el ámbito del Cálculo

Zimmermann (1991) sugiere una lista de conocimientos y destrezas relacionadas con la visualización que debiera alcanzar un estudiante durante un curso de Cálculo, entre ellos se puede destacar:

1) Entender los lenguajes analíticos y gráficos como diferentes alternativas para la expresión de ideas matemáticas. Así es que resulta importante, no sólo, que sepa dibujar diagramas para representar ciertas situaciones dadas en forma analítica, sino que también sepa traducir a forma simbólica lo que le ofrece un diagrama, extraer de él información para resolver problemas y reconocer sobre la base de esa información cuando una solución obtenida analíticamente es incorrecta. Por ejemplo, al hacer $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} x \, dx = -\cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$, la solución analítica muestra que la integral "resultó" ser cero, pero ¿qué hubiera sucedido si se interponía un error en los signos? Si se acompaña esa solución de un gráfico el estudiante detectaría sus posibles errores, ya que el gráfico muestra que la integral "debe" ser cero.

2) Entender las reglas y convenciones asociadas con las representaciones gráficas. El uso efectivo de la visualización requiere la discusión explícita de cómo interpretar figuras y diagramas. Los conceptos se ilustran por gráficos genéricos que se rodean de atributos irrelevantes que deben ser identificados. Por ejemplo, al ilustrar la definición de integral definida, se representa una curva sin patologías, se selecciona un intervalo, se usa un número razonable de rectángulos, se eligen para ellos determinadas alturas, pero ¿se destaca, en algún momento, cuáles de estos elementos son esenciales y cuáles no?

3) Usar diagramas en justificaciones. El uso de información visual cumple un papel indiscutible, a nivel heurístico, en la motivación y comprensión de demostraciones (ej.: en el teorema de Rolle, en el teorema de Lagrange para derivadas, etc.), permitiendo transmitir lo que dice el teorema y ofreciendo argumentos de por qué eso es cierto.

Barwise & Etchemendy (1991), sin embargo, afirman que el papel de los diagramas en las demostraciones trasciende las dimensiones heurísticas o didácticas a que habitualmente se lo restringe, para cumplir también un papel de legitimador de razonamientos matemáticos. Ellos opinan que una razón por la que el uso de representaciones visuales no es valorado suficientemente en las demostraciones, es la falta de un sistema lógico que permita evaluar la adecuación de los razonamientos en que se utilizan inferencias heterogéneas. Esta carencia implica un desafío a la Lógica, como disciplina, en cuanto la motiva al estudio de los diferentes aspectos del uso en razonamientos de formas no lingüísticas de representación.

Una importante diferencia entre el uso de diagramas en demostraciones frente a sus usos en otros momentos del quehacer matemático consiste en que en el contexto de justificación el diagrama debiera describir el caso general bajo discusión y no las condiciones especiales de la situación, para lo cual es indispensable poder discriminar en el diagrama, con la ayuda del texto de la afirmación que se busca justificar, los aspectos que son relevantes a la situación que ilustra, de aquellos que no lo son[2].

4) Entender la estimación y la aproximación en contextos geométricos. Dado que todo aquello relacionado con el concepto de límite, en particular los conceptos de derivada e integral, se definen en términos de una sucesión sistemática de aproximaciones, éstas pasan a integrar el corazón del Cálculo. El recurrir regularmente a los diagramas que representan esta realidad permite una comprensión más profunda de los conceptos en cuestión, de los fundamentos del Cálculo en general y de sus aplicaciones (ej.: el cálculo de la longitud de una curva o del volumen de un cuerpo de revolución como aplicación del cálculo de integrales).

5) Disponer de un repertorio importante de imágenes visuales. Así como el músico tiene en mente un conjunto de melodías o el escritor dispone de una serie de frases o palabras de las que hace uso en su trabajo, el matemático (o la persona que usa la Matemática en sus tareas) posee un conjunto de imágenes asociadas a conceptos, teoremas o problemas especiales a las que recurre al resolver nuevos problemas o al enfrentarse nuevas situaciones. El estudiante no puede depender de la computadora cada vez que requiera el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$, o la derivada de $f(x) = x^2$, y a su vez, debe saber hacer una lectura reflexiva de la información que le ofrece la computadora (ej.: aunque a escala muy grande o muy pequeña, el gráfico de $f(x) = \frac{x^5-4x+1}{x^4+6x^2+12x}$ se vea como una recta, el alumno debe reconocer la presencia de una función no lineal). Es importante también que posea tantas representaciones como sea posible en relación con ciertos conceptos fundamentales (ej.: las interpretaciones de la función integral como la función cuya pendiente en cada punto es especificada por la curva dada o como la función "área bajo el gráfico" de la curva dada, son ambas importantes y la posibilidad de pasar de una a otra representación ofrece una flexibilidad al estudiante que seguramente encontrará provechosa).

El papel de la computadora

Respecto a este tema Artigue (1991) señala algunas ventajas de la utilización de la computadora en la clase de Cálculo siempre que sea acompañada de un contexto de enseñanza-aprendizaje coherente. La computadora permite establecer imágenes visuales de los fundamentos del Cálculo que enriquecen el repertorio de imágenes mentales

[2] Este tema será retomado en el contexto de la sección dedicada a la demostración.

dando al mismo tiempo una imagen de la Matemática como una actividad científica constructiva.

La investigación ha mostrado con insistencia que el aprendizaje es más significativo cuando el estudiante construye su propio conocimiento. Estas construcciones por parte del estudiante pueden ser inducidas por computadoras ya sea mediante el uso de software que permitan manipular visualmente ideas matemáticas y reflexionar sobre ellas, o mediante la posibilidad de dar una existencia menos abstracta a ciertas ideas matemáticas para las que no se disponen de soportes físicos adecuados y que así se pueden manipular y tratar como objetos, o más allá del contexto visual, mediante la programación de construcciones matemáticas en un lenguaje computacional que actúe paralelamente a la construcción de los procesos matemáticos subyacentes. (Dubinsky & Tall, 1991).

Los adelantos en tecnología provocarán continuamente nuevas reflexiones en esta área pero vale la pena recordar siempre que un matemático no es un espectador de un deporte y que el Pensamiento Matemático Avanzado pasa antes que nada por las acciones constructivas de la mente humana aunque ésta se sirva del enorme poder de procesamiento de la computadora (Dubinsky & Tall, 1991). La habilidad para trazar por sí mismo gráficos simples que representan una situación matemática y la habilidad para interpretar esos gráficos y usar esa información a la hora de resolver problemas, resultan fundamentales. Sin estas destrezas el uso de la computadora no podrá ser eficiente, no alcanza ver para comprender. (Zimmermann & Cunningham, 1991).

Si un individuo trabaja en un entorno restringido, en que los objetos considerados tienen todos una cierta propiedad, en ausencia de contraejemplos el individuo podría asumir que dicha propiedad es común a todos los objetos de la clase, sin delimitar hasta donde llega esa clase (Tall, 1991c). Al ampliarse el entorno de trabajo del estudiante mediante el uso de la computadora, se podrían resolver algunas de las consecuencias del obstáculo didáctico[3] originado en la falta de contraejemplos y la escasez de ejemplos, sin embargo, se plantea la interrogante de que los acercamientos intuitivos que se alientan en los estudiantes, mediante estos enfoques, representen un obstáculo futuro frente a los enfoques formales del tema (Artigue, 1991). Sobre este aspecto, por ejemplo, cabría reflexionar sobre los riesgos que podría involucrar la visualización de la integral como un área con relación a la existencia de integrales de diferentes signos o el trabajo con funciones continuas salvo en un conjunto finito de puntos con relación a la búsqueda de ejemplos de funciones no integrables.

Otras cautelas que se deberían tener presentes respecto al uso de la visualización, son la posibilidad de que los diagramas sugieran teoremas falsos (ej.: durante todo el siglo XIX se creía que las funciones continuas podían tener como máximo un número finito de puntos donde no fueran derivables) y la inconveniencia de restringir la justificación de propiedades exclusivamente a las pruebas visuales. Tall (1991a) propone, en cambio, valerse de las propias actividades de visualización para desmitificarla y minimizar así

[3] Para Brousseau un obstáculo cognitivo es parte del conocimiento del individuo, una pieza que en el pasado permitió resolver satisfactoriamente algunos problemas y ahora resulta inadecuada al enfrentarse con problemas nuevos, esta inadecuación, sin embargo, no resulta obvia al individuo y es por ello, muy resistente a la corrección. Brousseau clasifica los obstáculos cognitivos en: ontogénicos (debidos a limitaciones del sujeto en el momento de su desarrollo), didácticos (debidos a la opción del sistema educativo) y epistemológicos (debidos a la naturaleza del propio conocimiento) (Azcárate, 1995).

los inconvenientes que ésta puede provocar (ej.: los gráficos de f(x) = *sen*x y g(x) = *sen*x + $\frac{b(x)}{10000}$, donde *b* es una función continua y no derivable en todo punto que toma valores en [0,1], lucen iguales a simple vista y también lucen iguales al magnificar sus gráficos 10 o 100 veces, sólo al magnificarlos unas 1000 veces se puede comenzar a apreciar que una es derivable en todo punto y la otra no derivable en ninguno).

II.2.3 La algoritmización

Tareas y técnicas

En Chevallard, Bosch & Gascón (1997) se identifican seis grandes momentos en el proceso de estudio matemático: *el primer encuentro con el problema*, en el que se identifican los objetos matemáticos que lo componen, *la exploración*, en el que se construyen técnicas para llevar a cabo las tareas que pueden conducir a la solución, *el trabajo de la técnica*, en el que se busca dominar la técnica construida en el momento anterior y crear nuevas técnicas a partir de la combinación o la evolución de las anteriores, *el momento tecnológico-teórico*, en el que se busca la justificación e inteligibilidad de las técnicas creadas, *la institucionalización* a la que ya nos habíamos referido en la sección II.1.2 y en la que se legitima el uso de la técnica en el ámbito del aula y *la evaluación* en la que se prueba la eficacia de la técnica ante otros problemas.

En esta interpretación del trabajo matemático el papel que juegan las técnicas es fundamental, pero ¿qué se entiende por técnica? Según el enfoque antropológico de la Didáctica de la Matemática, que alienta al estudio de la actividad matemática entendida como una actividad humana entre las demás y cuyo precursor es Yves Chevallard (el mismo autor citado en la sección anterior por sus aportes a la teoría de la Transposición Didáctica): *"toda actividad que tenga lugar en una cierta institución proviene de la puesta en práctica, por los actores de esta actividad, de una cierta técnica"***.** El término "técnica" designa aquí a toda "manera de hacer", no es un sentido previo del término el que determina la validez del postulado anterior, sino al contrario, es este postulado el que fija implícitamente el sentido del término "técnica". Serían técnicas, entonces, cada una de las formas en que se puede llevar a cabo una tarea[4].

Para que una técnica tenga una vida estable dentro de una institución dada debe satisfacer la exigencia de justificación e inteligibilidad. Esta exigencia genera un discurso sobre la técnica para validarla y hacerla comprensible; a este discurso se le denomina tecnología y cada institución dedica una parte de su actividad a construir el marco tecnológico que cree adecuado para dar vida a sus técnicas. La actividad tecnológica requiere, a su vez, la puesta en práctica de ciertas técnicas (técnicas tecnológicas) que exigen también justificación e inteligibilidad, lo cual plantea la necesidad de una tecnología de las técnicas tecnológicas: la teoría. Este juego regresivo no se puede llevar muy lejos, el análisis empírico de las instituciones muestra que el nivel teórico es reducido y muy a menudo recurre a referirse a otra institución que es tomada como "aval epistemológico" (ej.: en la clase de Física se dice "en la clase de Matemática probarán que...", en la clase de Matemática se dice "en el próximo curso demostrarán...", etc.)[5] (Bosch, 1994).

---

[4] En este contexto se entiende como tarea una acción determinada e intencionada que se puede expresar mediante una orden (ej.: ¡Resuelve esta ecuación!), pudiendo dar lugar a una anticipación (ej.: Va a calcular un cociente) o a una constatación (ej.: Ha elevado al cuadrado).

[5] Ejemplo: frente a una tarea como "calcular la integral entre 0 y 3 de $f(x)=x^2$" tenemos varias técnicas posibles; una sería considerar una partición del intervalo en n subintervalos iguales, tomar la suma

Se considera que una tarea es rutinaria cuando existe para ella una técnica estabilizada que permite llevarla a cabo sin que se le planteen al actor problemas para completarla. Por lo anterior, ninguna tarea sería rutinaria a priori, sino que sólo se convertiría en rutinaria cuando existiera tal técnica. Sin embargo, no es difícil encontrar clasificaciones de tareas poco atentas a este aspecto que tildan de rutinaria toda tarea que involucre algoritmos y de no rutinaria aquella que se relaciona con resolución de problemas, situaciones de final abierto, etc.

Las técnicas algorítmicas

La tendencia a asociar el término técnicas al caso particular de técnicas algorítmicas se relaciona con el hecho de que en las clases de Matemáticas el uso de este tipo de técnica es notoriamente mayoritario, lo cual se puede deber a varias razones, entre ellas:

- Las facilidades que brinda, en el momento de su comunicación y su evaluación, el carácter secuencial de las estas técnicas;
- La eficacia de las técnicas algorítmicas para evitar conflictos en torno al Contrato Didáctico, ya que en su utilización se distribuyen claramente las responsabilidades de cada una de las partes: el profesor muestra cómo funciona y el alumno practica hasta dominarlas, sin la incertidumbre que suele acompañar a otras actividades en que el éxito es más incierto (Brousseau, 1986);
- La posibilidad, mediante el uso de este tipo de técnicas, de atenuar en un lapso relativamente corto el carácter novedoso de un “objeto de enseñanza” lo que permite superar (como mínimo en apariencia) la contradicción *antiguo/nuevo* que involucra la presentación de todo “objeto de enseñanza”. Chevallard (1991) entiende que en la superación de esta contradicción está la fuente de progreso del proceso didáctico[6]; pero ¿en qué consiste esta contradicción?: para que un “objeto a enseñar” pueda introducirse en el aula debe aparecer como un objeto con dos caras, por un lado, en un primer momento, debe aparecer como *nuevo* abriendo las fronteras del conjunto de conocimientos ya explorados y por otro lado, en un momento posterior, debe aparecer como *antiguo* autorizando se lo incluya en el conjunto de los conocimientos ya aprendidos. Normativamente esta contradicción se supera con el éxito del aprendizaje, pero es necesario hacer una puntualización al respecto de la noción de éxito aquí involucrada: en todo proceso de aprendizaje existe una tasa residual de fracaso y la enseñanza no se detiene cuando esta tasa se ha llevado a un valor nulo sino que generalmente se detiene antes, cuando ha bajado de un cierto umbral de suficiencia. La algoritmización permite descender rápidamente esta tasa de fracaso, actuando como una técnica de envejecimiento del “objeto de enseñanza” (que no siempre conduce a la superación de la contradicción sino apenas a un bloqueo que permite convivan la novedad no reducida con la antigüedad aparente).

Por otro lado, en el discurso de algunos didactas, el momento del trabajo de la técnica, en el caso de técnicas algorítmicas, se halla muy desprestigiado. Este rechazo puede

---

superior y considerar el ínfimo según n de esta suma; otra técnica sería tomar la primitiva de f, evaluarla en 3 y en 0 y restar esos resultados. Cada una de estas técnicas se apoya en una tecnología, que en el segundo caso, por ejemplo, podría ser el Teorema Fundamental del Cálculo, para una demostración del cual podría recurrirse como marco teórico a la teoría de los números reales, las propiedades de supremos e ínfimos, etc.

[6] Chevallard relega, con esta afirmación, a un segundo término el papel de la propuesta y resolución de problemas, a los que sí ve como motor de progreso en la construcción del saber por parte de la comunidad matemática.

entenderse como una reacción al peso excesivo de la algoritmización en las actividades de enseñanza, que ha llegado a sectores donde su algoritmización resultaba inimaginable y resulta contraproducente (ej.: a la enseñanza de una técnica de demostración por inducción completa).

Exagerar el peso de las técnicas algorítmicas, presentándolas como el modelo casi exclusivo de forma de llevar a cabo una tarea, puede generar en el alumno una imagen errónea de la actividad matemática y la falsa expectativa de que todas las indicaciones de su profesor sean de ese tipo: medios “eficaces” de resolver problemas. En este contexto las indicaciones de tipo heurístico serán malentendidas por el alumno que espera un método garantizado para hallar la solución de un problema, mientras que su profesor, que busca invitarle a investigar por sí mismo, no logra separar este tipo de indicaciones de aquellas de tipo algorítmico. La afirmación de que existe un método garantizado para establecer un resultado tiende a favorecer que el alumno descargue la responsabilidad fundamental del control del trabajo intelectual, bloqueando así toda devolución que pretenda su profesor (Brousseau, 1986).

Matizando el mencionado rechazo de parte del discurso didáctico al trabajo con técnicas algorítmicas, Chevallard, Bosch & Gascón (1997) comentan que el momento del trabajo de la técnica tiene funciones realmente importantes en el marco de la actividad matemática que es necesario tomar en consideración. Entre estas funciones destacan la obtención de un dominio robusto de la técnica (o sea, que pequeñas variaciones en las condiciones iniciales no afectan mayormente el desempeño) para poder integrarla al medio matemático del estudiante de forma totalmente desproblematizada.

Otro punto por el que puede resultar conveniente dar un lugar a los algoritmos en la enseñanza de la Matemática en la etapa que nos ocupa radica en que una gran parte de los alumnos preuniversitarios y de las carreras de Ingeniería continuarán sus estudios en el área de la informática donde el papel de los algoritmos y la importancia de su análisis son indiscutibles.

Como ya habíamos señalado, también Tall (1994) invita a una reflexión previa al rechazo incondicional a estas técnicas al afirmar que la algoritmización, al igual que el uso de símbolos en sustitución de objetos o procesos y la representación visual de información, es uno de los más importantes mecanismos de compresión de información y que esta compresión de información, junto con la vinculación con otra información ya almacenada, resultan indispensables para maximizar el rendimiento de la estructura cognitiva del individuo.

La dimensión técnica y la dimensión conceptual

Según Artigue (1997) se presenta equivocadamente un enfrentamiento entre prácticas didácticas identificadas como “antiguas” donde se resalta la dimensión técnica de la actividad matemática y prácticas “modernas” que buscan resaltar una dimensión más conceptual, pues el carácter dialéctico de estas dos dimensiones exige una coordinación entre ambas prácticas tanto a nivel de discurso como de práctica docente. El reto consiste en encontrar el punto de equilibrio entre ambas componentes.

En la misma línea de reconocer como superficial y errónea la dicotomía entre aprendizaje de algoritmos y aprendizaje con comprensión, Nesher (1986) cuestiona la posibilidad de una enseñanza que busque comprensión por parte de los alumnos sin atender a los aspectos procedimentales. Para ejemplificar su afirmación relata su experiencia en la preparación de una unidad didáctica sobre medias aritméticas, donde se intentaba que los alumnos no se limitaran a hacer el cálculo de esta media sino que reconocieran, por ejemplo, en ese número a un dato que brinda información sobre el conjunto de valores pero que no necesariamente tiene que ser uno de tales valores aunque sí debe pertenecer al intervalo determinado entre su mínimo y su máximo; pero ninguno de estos reconocimientos es posible si los alumnos no tienen previamente una mínima experiencia con el cálculo de medias aritméticas (tanto con lápiz y papel como con calculadora) sobre la cual reflexionar. Para Nesher la creencia extendida de que un aprendizaje con comprensión contribuye al desarrollo en los alumnos de un deseable sistema de control en la realización de algoritmos debería ser complementada con la creencia de que el desempeño en algoritmos y otros procedimientos contribuye a la comprensión de los objetos matemáticos involucrados. Sin embargo, no hay unanimidad a este respecto, Resnick (citada en Nesher, 1986) opina que el monitoreo y la reflexión son contradictorias con la noción de automaticidad involucrada en el desempeño de un algoritmo por lo que, en caso que se persigan como objetivos de aprendizaje, exigirían enseñanzas diferenciadas.

El papel de las herramientas informáticas

La introducción de las herramientas informáticas en el aula tiene un lugar indiscutible en esta reflexión. Generalmente se justifica la importancia de esta introducción en la capacidad potencial de estas herramientas de liberar al alumno de tareas rutinarias para invertir este tiempo en actividades más “nobles” y reflexivas, sin embargo, las experiencias realizadas muestran una tendencia opuesta a los comportamiento esperados En este sentido, Artigue (1997) comenta que la multiplicidad de acciones posibles en cada momento a un costo mínimo, favorece la aparición de comportamientos de ensayo desorganizados, sin más control que la expectativa de obtener resultados interesantes en alguno de los intentos; como el costo de la evaluación de lo ensayado es mucho más alto, se prescinde de esta reflexión fundamental para el aprendizaje. Cuando se ha resuelto así un problema matemático la falta de coherencia global impide la reconstrucción necesaria para sacar provecho de la actividad.

En el área del Cálculo Diferencial e Integral podemos encontrar algunas propuestas de uso de manipuladores simbólicos para proveer resultados de ejecuciones algorítmicas. Estas propuestas argumentan a favor de la introducción de esta herramienta apoyándose en:

- El ahorro de tiempo usualmente dedicado a la ejecución manual de tales procedimientos, lo que permitiría concentrarse en aspectos menos rutinarios que favorezcan la formación de una estructura cognitiva estable donde un desarrollo posterior de destrezas puede ser construido.
- La posibilidad de brindar a los estudiantes un rápido y sencillo acceso a una gama muy amplia de ejemplos de un concepto.
- La existencia de estudios que concluyen que una disminución en el énfasis de actividades algorítmicas en favor de una mayor dedicación a aspectos conceptuales no tiene efectos negativos en la comprensión de los estudiantes.

Revisemos un par de los estudios a que se hace referencia en el último punto. Heid (1988) analizó un grupo de estudiantes universitarios de ciencias empresariales que durante 12 semanas estudió conceptos de Cálculo usando un software de representación gráfica y manipulación simbólica, seguidas de tres semanas dedicadas exclusivamente al desarrollo de destrezas que hasta el momento eran llevadas a cabo por la computadora. Heid sostiene que los resultados obtenidos por estos estudiantes en cuanto a comprensión de conceptos superaron a los obtenidos por otro grupo que asistió a un curso tradicional (trataron los conceptos de Cálculo con más detalle, claridad y flexibilidad, aplicaron estos conceptos en forma más apropiada, y mostraron habilidades más refinadas a la hora de traducirlos de una representación a otra), mientras que los resultados en destrezas rutinarias fueron como mínimo similares a los del grupo que dedicó las 15 semanas a practicar este tipo de destrezas. Heid concluye de su estudio que una escasa atención al desarrollo de destrezas no sería perjudicial aun cuando se evalúe con un examen donde se enfatizan las destrezas algorítmicas como es el caso de los alumnos involucrados en su estudio.

Palmiter (1991) realizó un estudio con estudiantes universitarios de ingeniería que realizaron un curso de Cálculo asistidos por un software de manipulación simbólica y representación gráfica, en exámenes donde se los evaluaba sobre manipulación de algoritmos y comprensión de conceptos y considerando también las calificaciones obtenidas por esos mismos alumnos en los siguientes cursos de Cálculo. Estos datos fueron contrastados con los de otros estudiantes que realizaron un curso tradicional donde las tareas algorítmicas eran realizadas con papel y lápiz. El grupo "tradicional" cubrió el programa en 10 semanas mientras que el grupo "experimental" lo hizo en 5 semanas, en este segundo grupo no fueron presentadas las técnicas de integración, las cuales les fueron enseñadas después del examen para que no tuvieran inconvenientes en cursos venideros donde se suponían conocidas esas técnicas. El grupo experimental obtuvo mejores promedios que el grupo tradicional en el examen que les fue propuesto (el examen para ambos grupos fue el mismo pero el grupo experimental usó computadoras en la parte de cálculos por lo que se le dio para esta parte una sola hora en vez de las dos con que contó el otro grupo) y siguió obteniendo mejores calificaciones en los cursos de Cálculo posteriores. Palmiter concluye que la superioridad de rendimiento se debe a que al grupo experimental, con la participación de los manipuladores simbólicos, se le presentó el material conceptual sin la interferencia de los cálculos.

De todas maneras, cuando se destacan beneficios de los manipuladores simbólicos a menudo, se asume como prerrequisito para la obtención de resultados favorables, un dominio previo de la técnica por parte del alumno para que sea recién después que se integre la asistencia de la herramienta. En esta perspectiva, las actividades con manipuladores simbólicos consisten en la aplicación por parte de los estudiantes de una técnica ya aprendida para casos sencillos en casos de manipulación más trabajosa. Un manipulador simbólico es una herramienta y sólo puede ser completamente aprovechada por quienes saben usarla. Al igual que una calculadora, que no enseña a sumar pero se convierte en una poderosa herramienta cuando uno ya sabe sumar números pequeños y la utiliza para sumar números mayores, un manipulador simbólico comienza a ser relevante en el aprendizaje luego que el estudiante conoce para qué lo está usando. Se debe tener en cuenta que, por ejemplo, conocer las técnicas de derivación es muy diferente de saber qué significa la derivada, así que es importante acompañar el uso de estos manipuladores con un marco conceptual adecuado. (Dubinsky & Tall, 1991).

Se presenta actualmente la posibilidad de un nuevo uso de las computadoras en la clase de Matemática: el uso de software diseñado para ayudar al estudiante a conceptualizar ideas matemáticas. Los manipuladores simbólicos se diseñan sobre principios matemáticos, pero existen otros softwares cuya base es una combinación de principios matemáticos y cognitivos que permite al estudiante apoyarse en lo que ya conoce y así obtener un desarrollo cognitivo (ej.: el “Graphic Calculus” de Tall, van Blokland & Kok (1990)).

Según Tall (1991b) la computadora puede ser usada durante el aprendizaje con un objetivo muy preciso: llevar a cabo los procedimientos y permitir al estudiante concentrarse en sus productos. Permitiría así un cambio en la encapsulación de procesos: en vez de forzar al estudiante a aprender e interiorizar en primera instancia el proceso, le permite focalizar en las propiedades del producto, en sus relaciones a más alto nivel. Aparece de esta manera lo que Tall denomina principio de construcción selectiva del conocimiento, mediante el cual el estudiante es alentado a centrarse separadamente en los procesos matemáticos y los productos de tales procesos. La computadora permite que no siempre sea el foco en el proceso el que preceda al análisis de las propiedades del producto, brindando nuevas estrategias de enseñanza y aprendizaje en Matemática Avanzada.

II.2.4 Consideraciones finales

- En el apartado dedicado a la encapsulación de conceptos matemáticos, además de explicar detalladamente en qué consiste este mecanismo de construcción de nuevos conceptos y resaltar las ambigüedades a las que da lugar en el ámbito de la actividad matemática, realizamos algunas consideraciones que contribuyen a nuestro objetivo de caracterización del período de transición de la etapa elemental de la enseñanza de la Matemática a la etapa avanzada.

  En este sentido, destacamos que la frecuencia y relevancia del uso de proceptos aumenta a medida que transitamos hacia etapas más avanzadas de la enseñanza de nuestra disciplina, que se mantiene el carácter acumulativo de las dificultades provocadas por un tratamiento poco flexible de la dualidad proceptual y que aparecen en esta etapa proceptos cuya formación responde a mecanismos de complejidad mayor que los que conocían de la etapa elemental (ej.: el cálculo de un límite requiere estrategias cualitativamente diferentes a las requeridas en el cálculo del resultado de procesos propios de la aritmética como sumar o multiplicar)
- En el apartado dedicado a la visualización, nos centramos particularmente en su relevancia en el contexto de los cursos de Cálculo Diferencial e Integral que como sabemos son parte fundamental del período de transición. Entendemos que la visualización en estos cursos está llamada a ilustrar las nociones centrales como son la derivada y la integral, a ampliar el repertorio de ejemplos y no-ejemplos de los distintos conceptos y a colaborar en la justificación de afirmaciones que involucran a dichos conceptos; pero este trabajo involucra dificultades para los alumnos que requieren ser explícitamente contempladas en las actividades de enseñanza.

  Realizamos también un análisis de las dificultades que enfrentan los estudiantes al procesar información visual, recogiendo así consideraciones que nos resultarán de utilidad para interpretar los datos recogidos en la parte experimental de este trabajo.
- En el apartado dedicado a la algoritmización comenzamos resaltando la importancia de las técnicas en la actividad matemática y en particular nos dedicamos a matizar el desprestigio que, en ocasiones y aunque parezca contradictorio, convive con el uso generalizado de técnicas algorítmicas en el ámbito escolar.

  Indiscutiblemente, estas técnicas son fáciles de comunicar y evaluar y no están rodeadas de la incertidumbre que suele acompañar a otras actividades matemáticas. Pero estas características favorables de las técnicas algorítmicas condujeron a que se las usara de manera abusiva en la enseñanza, hasta llegar por momentos a organizarla alrededor de estas actividades, dejando así, en muchos individuos, la idea de que la ejecución de algorítmicos (determinación de raíces de un polinomio, cálculo de derivadas, desarrollos de Taylor, etc., etc.) es el centro de la actividad matemática. La respuesta a estos excesos fue enfrentar la dimensión técnica a la dimensión conceptual de la actividad, pero esta dicotomía resulta equivocada desde que el carácter dialéctico de estas dimensiones exige una coordinación constante entre ambas. La algoritmización, al no requerir un monitoreo constante durante su ejecución, libera espacio en la estructura cognitiva del estudiante lo que le permitiría atender aspectos más conceptuales involucrados en la tarea. Se podría ir más allá con este razonamiento: encargar a las computadoras de la ejecución de ese trabajo algorítmico y dedicarse en exclusividad en el aula a tareas más conceptuales; sin embargo, compartimos la idea de que los beneficios del uso de herramientas informáticas para que se encarguen del trabajo "menos noble" o "menos productivo", da frutos cuando existe un dominio previo, robusto (resistente a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales de la tarea) y fundamentado de la técnica.

Creemos así mismo que el papel del trabajo con técnicas rutinarias durante la etapa de transición debe ser acompañado de comentarios a los estudiantes que les permitan acercarse a una primera reflexión sobre la función que tiene, en el contexto de la actividad matemática, la realización de esas tareas que evidentemente puede hacer una máquina de las menos sofisticadas.

II.3 Definiciones y demostraciones

La caracterización que destacamos en la introducción de este trabajo para la etapa de transición entre los estudios elementales y avanzados en Matemática desde un punto de vista epistemológico, también se puede encontrar en la obra de Tall (1991c, p.20): "El movimiento desde el pensamiento matemático elemental al avanzado involucra una significativa transición: aquella que va de *descubrir* a *definir*, de *convencer* a *probar* en una manera lógica basada en esas definiciones… Es la transición desde la *coherencia* de la Matemática elemental a la *consecuencia* de la Matemática avanzada, basada en entidades abstractas que el individuo debe construir a través de deducciones a partir de definiciones formales".

II.3.1. La definición en Matemática

La definición de un concepto matemático es un enunciado verbal que predetermina al concepto de una manera no circular (sus elementos deben ser nociones primitivas de la teoría o nociones definidas previa e independientemente) y consistente (no puede involucrar contradicciones lógicas que derivarían en que ningún objeto verifique sus condiciones). En este marco, dos definiciones se consideran equivalentes cuando determinan el mismo conjunto de ejemplos.

En esta sección nos dedicaremos a analizar algunas publicaciones que tratan aquellos aspectos relacionados con la definición matemática que a nuestro entender tienen mayor relevancia en cuanto a nuestro objetivo de reflexionar sobre el período de transición entre las etapas elemental y avanzada de la enseñanza de la Matemática. Así, en primer término estudiaremos el carácter convencional de las definiciones y fundamentaremos la preferencia por definiciones minimales. Después destacaremos la función que cumplen las definiciones con relación a la consistencia de los esquemas conceptuales y también a la construcción y clasificación de ejemplos y no-ejemplos. Por último, analizaremos el papel de las definiciones en el aprendizaje de la Matemática en la etapa que nos ocupa.

II.3.1.1 Dos características de las definiciones matemáticas

La convencionalidad

Mientras que desde el punto de vista de la lógica formal una definición representa otorgar un nombre a un objeto caracterizado por ciertas propiedades, una mera abreviatura, sin que esto altere el alcance teórico de la disciplina, desde la perspectiva de la actividad matemática (y del aprendizaje de esta disciplina) la definición introduce una noción que no "existía" antes, que puede abrir problemas nuevos, brindar nuevas perspectivas para pensar en problemas viejos o colaborar en la organización del sistema teórico en que se inserta (Mariotti & Fischbein, 1997).

El establecimiento de una definición matemática, por tanto, no es un fin en sí mismo sino que responde a ciertas necesidades de organización y crecimiento del conocimiento; es en este contexto que adquiere relevancia la elección de la definición concreta que se presentará en la clase, puesto que las definiciones no están predeterminadas sino que son convencionales. El carácter convencional de las definiciones en Matemática se pone en evidencia en dos sentidos:

a) Algunas nociones matemáticas pueden ser caracterizadas de distintas maneras, equivalentes entre sí, y es el matemático, el autor de un texto o el profesor quien decide cual de estas caracterizaciones toma como definición. Aunque a veces es difícil tomar partido frente a una u otra caracterización (¿cómo definir paralelogramo: un cuadrilátero con ángulos opuestos iguales o un cuadrilátero con lados opuestos iguales?) lo habitual es que esta elección no sea arbitraria sino resultado de un análisis que atiende a distintos factores:

<u>Estéticos</u> Se trata de argumentos relacionados con la elegancia, la sencillez o la austeridad del enunciado de la definición. Por ejemplo, se puede considerar que definir $|x| = \sqrt{x^2}$ es más elegante que hacerlo como $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ (Vinner, 1991). Otro ejemplo que podemos presentar es el caso del triángulo "equilátero": dado el nombre que lleva, puede fundamentarse en argumentos estéticos la preferencia por definirlo en función de la igualdad de sus lados más que de sus ángulos.

<u>Operativos</u> En ocasiones el criterio usado para establecer una determinada definición se explica por las conclusiones que de ella se pueden extraer, por su papel como eslabón en la cadena mediante la que se sistematiza el conocimiento matemático o por su potencia como instrumento organizador de una prueba o la resolución de un problema (Bills & Tall, 1998; Moore, 1994). Como ejemplo para ilustrar este tipo de argumentos podemos presentar el caso de la definición de cuándo un subconjunto de un espacio vectorial es linealmente dependiente; aunque parecería más natural definir que eso sucede cuando alguno de los vectores que lo conforma depende linealmente de los otros, resulta más eficiente definirlo a partir de la existencia de combinaciones lineales no triviales que permitan obtener al vector nulo. Otro ejemplo que podemos presentar, en el ámbito de un curso de Matemática Discreta, es la elección de definiciones de máximo común divisor de dos enteros positivos, diferentes de la que lo determina como el mayor de los

divisores comunes a los dos números; en ocasiones se presentan como definiciones "mcd(a,b)=c si y sólo si c es un divisor común de a y b tal que todo divisor de a y b también divide a c" o "mcd(a,b)=mín{ma+nb>0/m,n Z}".
En los ejemplos se puede observar que el carácter operativo de una definición no es absoluto, en el sentido que una caracterización puede resultar más eficiente que otra para la justificación de afirmaciones que involucren al concepto pero no para la construcción e identificación de ejemplos.

Didácticos El conocimiento se somete a un proceso de Transposición Didáctica que lo prepara para ser comunicado, lo cual requiere que se elijan las definiciones que se presentarán según los conocimientos previos de los alumnos o los objetivos del curso. Por ejemplo, en un curso de Geometría Métrica, se puede definir triángulos congruentes como aquellos que se corresponden en una isometría si éstas fueron estudiadas o hacerlo mediante la formulación proveniente de alguno de los criterios de igualdad de triángulos. Otro caso que podemos mencionar es el de la definición de logaritmo neperiano, ésta puede ser establecida a partir de la integral: $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ o a partir de la función inversa de la exponencial de base e, habiendo definido ese número, por ejemplo, como el límite de una cierta sucesión; y aquí escoger una u otra depende de que se hayan trabajado previamente las integrales o las sucesiones, las funciones exponenciales y la invertibilidad de funciones.

A menudo el carácter arbitrario que luce una definición es reflejo de la destemporalización, descontextualización y despersonalización propias de la Transposición Didáctica: en algún momento la definición respondió a una necesidad que hizo pertinente la elección de sus términos pero el rastro de esas necesidades se fue perdiendo a lo largo de las modificaciones que fue sufriendo al incorporarse el concepto al sistema teórico organizado. Como ejemplo de esta situación podemos mencionar el caso de la definición de determinante de una matriz $(a_{ij})_{i,j=1,2,...,n}$ como la suma de los n! productos del tipo $(\pm)a_{1j_1}a_{2j_2}...a_{nj_n}$ tales que en cada producto hay un elemento y sólo uno de cada fila y de cada columna y el signo (±) es + o – según la permutación $(j_1,j_2,...j_n)\rightarrow(1,2,...,n)$ sea, respectivamente, par o impar. Pero no fue así que ingresaron los determinantes al mundo de la Matemática, sino a partir de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales[7], cuestión que no se ve reflejada en esa definición.

Lo que es importante de destacar ante este ejemplo o cualquier otro es que, independientemente de su historia previa, una vez que la definición es establecida el significado y la naturaleza del objeto quedan determinados.

b) También es producto de una convención el definir los conceptos de manera más o menos restrictiva (¿Las funciones constantes son monótonas o no? ¿Los paralelogramos son casos particulares de trapecios? ¿Las funciones polinómicas de primer grado tienen concavidad positiva? ¿Los triángulos equiláteros son también isósceles?)

---

[7] En 1750 Cramer describió por primera vez en forma explícita la solución de un sistema de n ecuaciones y n incógnitas, lo hizo mediante cocientes de expresiones multilineales dependientes de los coeficientes del sistema y fueron éstas expresiones multilineales las que años después recibieron el nombre de determinantes. En 1770, con Laplace, surge la idea de definir determinantes de orden n por recurrencia en n, a partir del desarrollo de alguna fila o columna y pasan a ser los determinantes objetos de estudio en sí mismos (Grossman, 1996).

Según este punto de vista De Villiers (1998) clasifica a las definiciones en jerárquicas (aquellas que hacen, por ejemplo, que los cuadrados resulten casos particulares de los rectángulos, éstos de los paralelogramos y éstos, a su vez, de los trapecios) o particionales (aquellas que piden, por ejemplo, a los triángulos isósceles tener exactamente un par de lados congruentes o las que piden que $f(x)>f(y)$ para todo $x>y$ para poder decir que f es creciente). Reconociendo que ambos tipos de definiciones son válidos, argumenta a favor de las jerárquicas en cuanto:

- Son más económicas al minimizar el listado de condiciones a verificar para la identificación de ejemplos (ej.: al admitir a las rectas coincidentes como un caso particular de rectas paralelas, basta con verificar que dos rectas dadas por sus ecuaciones tienen la misma pendiente para determinar su paralelismo sin necesidad de investigar, por ejemplo, qué sucede con las respectivas ordenadas en el origen para comprobar que no son la misma)
- Permiten disminuir el número de justificaciones (ej.: al admitir que las circunferencias son casos particulares de elipses, el teorema que afirma que las tangentes a una elipse trazadas en los extremos de un diámetro son paralelas entre sí, es aplicable directamente al caso de las circunferencias)
- Son más generales (ej.: el enunciado del teorema “los puntos medios de un cuadrilátero determinan un paralelogramo” con definiciones particionales involucradas debería ser enunciado como “los puntos medios de un cuadrilátero determinan un paralelogramo, un rectángulo, un cuadrado o un rombo”)
- Se adecuan mejor al carácter dinámico de los softwares diseñados para la enseñanza de la geometría (ej.: la correcta construcción de un paralelogramo en Cabri lleva a que éste permanezca al ser “arrastrados” sus elementos básicos sobre el plano, aun cuando estos elementos básicos toman las posiciones particulares que hacen del paralelogramo un rombo, un rectángulo o un cuadrado).

Aunque la mayor parte de los ejemplos presentados hasta aquí proviene de la geometría, la existencia de definiciones jerárquicas y particionales aparece también fuera del ámbito geométrico dando lugar a consideraciones análogas. Por ejemplo, la caracterización de la relación de inclusión entre conjuntos es definida a veces de modo que resulta una relación de orden estricto y otras veces, una relación de orden amplio (la existencia de símbolos tales como: , , es evidencia de esta variedad) y dependiendo de la definición considerada es válida o no la afirmación “A B = B A B”.

Vale la pena observar que esta preferencia por las definiciones jerárquicas, compartida en general por la comunidad matemática, podría llevarse a extremos que podrían dejar de ser convenientes. Por ejemplo, si se tomara una definición de trapecio que admitiera a los triángulos como casos particulares basándose en que el método trapezoidal en ocasiones requiere el uso de triángulos[8] (o también podría basarse en que la fórmula del área del trapecio puede considerarse una generalización de la del triángulo tomando la medida de la base menor como nula, o en que al usar softwares dinámicos el triángulo aparece como una deformación del trapecio) ¿no podría extenderse esta misma línea de consideraciones hasta que un segmento o un punto fueran también casos particulares de trapecios?

Frente a la preferencia de los matemáticos se encuentra la preferencia de los estudiantes por las definiciones particionales para los conceptos geométricos y por consecuencia,

[8] Ver en los capítulos dedicados a la parte experimental otras consideraciones sobre este asunto.

para otros conceptos matemáticos que recogen de ellos intuiciones para ser definidos. Según Mariotti & Fischbein (1997) esta preferencia por las definiciones particionales para cierto tipo de nociones se puede explicar, por sus características figurales (según las cuales un cuadrado es tan diferente de un rectángulo como un hexágono lo es de un pentágono, aunque mucho menos diferentes podrían verse prismas y rectángulos). Los autores basan su afirmación en la noción de concepto figural: *límite del proceso de integraciones sucesivas entre las facetas lógicas y sensoriales de un concepto*. A esta noción se adecuan especialmente las entidades geométricas debido a su asociación simultanea a un enunciado verbal y a una figura, a una definición y a una imagen mental que completamente controlada por esa definición no pierde ante ella su papel en la actividad matemática (Fischbein, 1993).

La minimalidad

Entre las condiciones necesarias y suficientes que involucran las definiciones se espera que no se incluya información redundante.

En la preferencia por definiciones minimales, además de consideraciones estéticas hay, por sobretodo, argumentos de economía en juego. Por un lado simplifican la verificación de que un cierto objeto, concreto o identificado por ciertas hipótesis, es ejemplo del concepto. Por otro lado favorecen el control de consistencia ya sea por el menor número de condiciones que debe asegurarse no involucran contradicciones o mediante la presentación de ejemplos. (Vinner, Linchevski & Karsenty, 1993)

Obviamente los ejemplos de definiciones no minimales son inacabables (ya que a cada definición conocida le podemos agregar información redundante sin que pierda el formato de una definición matemática), algunos se presentan con mayor frecuencia que otros: un rectángulo es un cuadrilátero con sus cuatro ángulos rectos, dos triángulos son semejantes si sus lados son proporcionales y sus ángulos iguales, etc. Aunque no es habitual encontrarlos dentro de la Matemática formalizada, también allí es posible detectar algunos casos; por ejemplo, se dice que dos funciones polinómicas f y g son iguales si $f(x)=g(x)$ para todo número real x, pero no es necesario que coincidan en todo el dominio ya que basta con que lo hagan en $n+1$ puntos siendo n el máximo entre los grados de ambas funciones.

Con respecto a este punto Vinner, Linchevski & Karsenty (1993) reportan una investigación entre futuros profesores de Matemática que evidencian discrepancias en la valoración de la minimalidad: mientras que algunos llegan a considerar incorrectas las definiciones que incluyen información redundante, otros no sólo las aceptan sino que las alentarían ante alumnos como reflejo de un conocimiento más amplio del concepto. Dentro del grupo de los futuros profesores que consideran relevante el carácter minimal de las definiciones, los argumentos que exponen son muy variados, desde quienes lo consideran un medio de optimizar el número de condiciones que debe verificar un objeto para ser considerado ejemplo[9] hasta quienes lo consideran un medio para aliviar la memoria ("si debes recordar muchos detalles aumenta tu chance de cometer algún error").

[9] La contrapartida de este último argumento pasa por los beneficios que brinda el exceso de información para la detección de no-ejemplos.

II.3.1.2 Los esquemas conceptuales

Tal como fue comentado al analizar el fenómeno de la Transposición Didáctica, la forma en que se presenta la Matemática en los textos avanzados y las publicaciones científicas, no refleja el proceso de su creación y eso induce a muchos profesores a plantear sus clases mediante secuencias definición-teorema-aplicación que no tienen en cuenta los procesos involucrados en el aprendizaje. Esta organización de la Matemática en textos y aulas presupone: que los conceptos se adquieren a partir de sus definiciones y que los estudiantes las usarán al momento de demostrar teoremas y resolver otro tipo de problemas. Sin embargo, este supuesto ha sido falseado por la realidad empírica. (Vinner, 1991).

Cuando se percibe el nombre de un concepto matemático, lo que suele ser evocado no es la definición del concepto sino lo que Vinner & Tall (1981) llaman "concept image" ("esquema conceptual" en el contexto de este trabajo) y que definen como "toda la estructura cognitiva del sujeto asociada a un concepto".

El esquema conceptual está formado por representaciones visuales, ejemplos, no-ejemplos, caracterizaciones verbales y procedimientos vinculados al concepto, por recuerdos de experiencias con el concepto, por enunciados de algunas de sus propiedades, etc. (Azcárate, Moreno & Romero, 1998). Dentro de las mencionadas caracterizaciones verbales algunas pueden tener la estructura de una definición matemática y a éstas las identificamos como las "definiciones personales" que el individuo posee del concepto en cuestión, no entendiendo por esto que necesariamente las haya inventado o haya modificado las presentadas por el profesor o el libro, sino pretendiendo destacar que nos referimos a aquellas definiciones que efectivamente forman parte del esquema conceptual del individuo.

La estructura cognitiva así conformada no es estática sino que evoluciona con el tiempo, como consecuencia de las experiencias que va teniendo el individuo con el concepto o por la influencia del olvido.

Como ya mencionamos, cuando se propone a un estudiante una tarea con relación a un concepto matemático muy a menudo el profesor supone que la definición es activada. Sin embargo, esa no es la situación que se da en la práctica; usualmente, el estudiante ignora la definición y responde de acuerdo a alguna porción de su esquema conceptual (la cual no es necesariamente representativa de toda su estructura cognitiva asociada al concepto). Esta conducta a menudo conduce a la respuesta correcta, sólo los problemas no rutinarios motivan al individuo a tomar en cuenta la definición y a apreciar que el uso de los hábitos de la vida diaria en contextos técnicos no es siempre apropiado.

En el uso cotidiano del lenguaje no es necesario recurrir a las definiciones de las palabras que participan en una frase para entenderla (basta mencionar el caso de la definición de los colores). En un contexto técnico la situación ya no es la misma, aquí las definiciones no sólo ayudan a formar el esquema conceptual sino que juegan un papel importante en las tareas que con él se enfrentan (ej.: para ver que es un hexágono regular la sección de un cubo con un plano que pasa por el centro del cubo y por los puntos medios de dos aristas consecutivas, no basta que luzca como tal y tampoco basta comprobar que tiene seis lados iguales, es necesario recurrir a la definición de hexágono regular). Es de esperar que, en un comienzo, los estudiantes de Matemática tengan dificultades para hacer uso de las definiciones en forma sistemática dado que su papel no se ejercita de igual manera en la vida cotidiana. (Vinner, 1991).

Es importante que el profesor sea consciente de las dificultades cognitivas que involucra la definición de conceptos matemáticos para sus alumnos. El papel que jugarán las definiciones dentro de su curso deberá adecuarlo a los objetivos del mismo. Si los estudiantes son futuros estudiantes de Matemática más avanzadas el profesor no sólo deberá presentar y discutir las definiciones sino que debe introducir a sus estudiantes en su uso como criterio definitivo ante tareas matemáticas. Para esto no basta con una presentación de la definición formal, es necesario compararla con el esquema conceptual que tiene el estudiante, pues sólo el fracaso en la aplicación del esquema conceptual puede incentivarlo a consultar la definición.

En el marco del modelo de adquisición de conceptos presentado en los párrafos anteriores adquiere relevancia el análisis de la adecuación de las imágenes, ejemplos, propiedades y procesos que integran el esquema conceptual asociado a un concepto, respecto a las definiciones personales[10] y la adecuación de éstas respecto a las presentadas por el profesor o el libro.

Desde la antigüedad, es explícitamente aceptado el hecho de que una proposición y su negación no pueden ser simultáneamente verdaderas. Esto implica que cuando un individuo detecta en su pensamiento proposiciones contradictorias intentará desechar una de éstas. Pero raramente un individuo sostiene proposiciones contradictorias simultáneamente; las situaciones que reflejan lo inadecuado de un esquema conceptual son debidas, mayoritariamente, a la compartimentación de los conocimientos matemáticos o a la presencia de inconsistencias.

Compartimentación: ésta puede implicar que un mismo individuo sostenga una proposición en un momento y en otro sostenga su negación. Aunque este fenómeno tiene relación con el olvido, también es de suma relevancia la calidad de las asociaciones y conexiones de las diferentes unidades de información que dispone el individuo (Vinner, 1990).

En este sentido, Garbín (2000) presenta evidencia empírica en relación a que un mismo problema matemático (la suma de la serie geométrica de razón _, en este caso) propuesto en distintos contextos (algebraico, geométrico, físico, etc.) y usando distintos registros (lingüísticos o gráficos) genera en los alumnos a los que se propone el problema, respuestas contradictorias entre sí.

La compartimentación de los conocimientos matemáticos se ve influida también por la compartimentación de los diferentes contextos en que adquiere dicho conocimiento (Tirosh, 1990) Como ilustración podemos mencionar el caso de la tangente: en cursos de Geometría la tangente a una elipse o a una parábola se define como la recta que corta a la curva en un punto dejándola toda en un mismo semiplano y en cursos de Cálculo se

---

[10] Hemos optado aquí por una interpretación del esquema conceptual que, en la misma línea de Tall & Vinner (1981), incluye a todos los aspectos cognitivos asociados al concepto y por tanto, también a la definición personal del concepto, en caso que el individuo disponga de alguna. Sin embargo, no hay unanimidad respecto a esta interpretación tal como se puede percibir en otro escrito del propio Vinner (1991) en que caracteriza al esquema conceptual de manera más restringida (p. 69: "El esquema conceptual es algo no-verbal asociado en nuestra mente al nombre del concepto") y explícitamente ubica fuera de él a la definición personal del concepto. Nuestra interpretación coincide con la asumida por el Seminario de Pensamiento Avanzado de la UAB y reflejada en Azcárate, Moreno & Romero (1998).

define la tangente al gráfico de una cierta función como aquella recta que pasando por el punto en cuestión tiene como pendiente la derivada de esa función en el punto; y estas dos definiciones no definen el mismo conjunto de ejemplos.

Inconsistencias: Una teoría formal se considera inconsistente cuando, en base a sus axiomas y reglas de inferencia, una sentencia y su negación pueden ser demostradas (o sea, si dadas dos proposiciones verdaderas p y q , se cumple que p   r y que q   ~ r). Esto implica la descalificación de dicha teoría pues, formalmente, si son verdaderas dos proposiciones contradictorias toda otra proposición puede ser demostrada a partir de ellas mediante cálculo proposicional (p ~ p   q es una tautología cualquiera sea q), ¿qué valor tendría una teoría donde toda sentencia es verdadera?

Sin embargo, las contradicciones que han aparecido a lo largo de la historia de la Matemática no han actuado de manera descalificante para toda la teoría matemática, sino que han sido tratadas localmente. Los matemáticos dedicados a áreas no directamente relacionadas con aquella donde se presentó la contradicción, continuaron su trabajo sin pensar que la posible inconsistencia podría desmoronar la totalidad de la teoría matemática[11]. El comportamiento de la comunidad matemática, en estas circunstancias, es similar al de los individuos enfrentados a sus propias inconsistencias (Vinner, 1990).

Posibles causas de las inconsistencias que exhiben los alumnos

1) La naturaleza de la actividad matemática

<u>Las creencias</u>: La percepción que pueden tener algunos estudiantes de la Matemática es la de una herramienta para otras ciencias, que consiste en una colección de reglas, métodos y afirmaciones desconectadas, donde no se busca la no-contradicción sino su utilidad. En este contexto nada invalidaría la presencia de inconsistencias (Tirosh, 1990).

<u>La relatividad de las afirmaciones</u>: El estudiante que no puede captar lo "relativo" de las afirmaciones matemáticas al contexto en que se aplica o al sistema axiomático que se tome por referencia podrá trasladar resultados de un contexto a otro donde éste resulta falso (Tirosh, 1990) Podemos ilustrar este aspecto con algunos ejemplos: la suma de los ángulos de un triángulo es 180 grados en el plano pero es más si se trata de triángulos esféricos, en el campo de los números reales la ecuación $x^2+1=0$ no tiene solución pero sí la tiene en el campo complejo, la resta entre dos números es menor que el minuendo cuando los números involucrados son naturales pero no cuando son números enteros.

<u>El uso del lenguaje</u>: La necesidad de comunicar la Matemática llevó a la formación de un registro matemático donde el uso de palabras cotidianas es frecuente. La presencia de estas palabras favorece la aparición de confusiones, ambigüedades e inconsistencias (ej.: límite, continuidad, conjunto abierto) (Tirosh, 1990).

No sólo se usan palabras que tienen otros significados sino que la forma de expresarse es diferente a la ejercitada en contextos extramatemáticos; en Matemática que *un* elemento de un conjunto cumpla con una propiedad significa que *uno o más* lo hacen y

---

[11] Ya habíamos mencionado que las definiciones matemáticas se diferencian de las definiciones que se dan en contextos no técnicos y también de las definiciones formales que trata la lógica. Vinner (1990) también recurre a la distinción entre lo matemático y lo formal para explicar el tratamiento de las inconsistencias en el seno de la comunidad matemática, en base a que el lenguaje matemático, sus reglas de formación, sus axiomas y reglas de inferencias no han sido completamente explicitadas y de acuerdo al trabajo de Gödel, nunca podrán ser presentadas de esta manera.

que *algunos* de los elementos cumplan una propiedad no impide que sean *todos* los que lo hagan. De esta forma, por ejemplo, al definir trapecio como un cuadrilátero con *un* par de lados paralelos, resulta que los rectángulos son trapecios, lo que puede sorprender al alumno que esperaba un único par de lados paralelos.

2) La naturaleza de la enseñanza de la Matemática
Al organizar la enseñanza de un concepto matemático comenzando por las situaciones simples antes que las más complejas, se tiende a presentar primero ejemplos muy particulares que favorecen la sobregeneralización de sus propiedades como si fueran comunes a todas las instancias del concepto (ej.: en los cursos de Cálculo se suele comenzar con funciones polinómicas, racionales, exponenciales, trigonométricas, todas ellas continuas y derivables en casi todo punto, y esto dificulta al estudiante imaginar funciones continuas en todo punto irracional y discontinuas en los racionales, o continuas pero no derivables en todo punto) (Tall, 1990).

Esta característica de la enseñanza matemática, junto con la falta de estrategias de instrucción que tomen en consideración las ideas previas de los estudiantes, la desconexión entre las presentaciones formales e intuitivas de los temas y el énfasis en lo procedimental sin conexión con lo conceptual, hacen más fértil el campo para la aparición de inconsistencias.

Por otro lado, la explotación de las inconsistencias como estrategia de trabajo en el aula no asegura resultados positivos, algunos estudiantes no se alterarán ante las evidencias porque esa información no se le presenta como contradictoria desde su punto de vista y otros sensibles a la evidencia de inconsistencia la podrán resolver de una manera no deseada como sería rechazar la proposición correcta (Vinner, 1990).

3) La naturaleza de las definiciones matemáticas
Las particularidades de estas definiciones en relación a las que se usan en contextos no técnicos (minimalidad, predeterminación del conjunto de ejemplos, participación ineludible en la justificación de las afirmaciones, etc.) exigen del estudiante la aceptación de reglas propias del contexto matemático (Vinner, 1990). Estas peculiaridades impiden la existencia de "excepciones a la regla" o de hipótesis implícitas, fuente inagotable de incoherencias[12] entre la definición personal del alumno y el conjunto de objetos que considera ejemplos o no-ejemplos del concepto definido.

Considerando los esfuerzos explícitos que se realizan en las etapas preuniversitarias de enseñanza matemática, para acercar Matemática y realidad, la grieta que aparece entre el contexto cotidiano y el técnico (que también se evidencia en la etapa de justificación de propiedades tal como analizaremos en la próxima sección) parece indicar un aspecto clave en el análisis de la etapa de transición hacia los comportamientos matemáticos avanzados.

---

[12] Siguiendo a Garbín (2000) distinguimos, en este último párrafo, inconsistencias e incoherencias: la primera para referirnos a la relación del esquema conceptual con la teoría matemática, la segunda para indicar la existencia de contradicciones al interior del esquema. Decidimos mencionar apenas lateralmente esta útil distinción pues el análisis de los datos experimentales que recogimos en el contexto de este trabajo, no se veía especialmente iluminado por la distinción (tal como veremos en el apartado IV.3.A4 la presencia de respuestas incoherentes al clasificar las funciones lineales como ejemplos o no-ejemplos de funciones de concavidad positiva, deja poco lugar para discutir sobre la consistencia de la noción de concavidad positiva).

II.3.1.3 Ejemplos y no-ejemplos

Los atributos relevantes de un concepto son las características que un objeto debe poseer para poder ser considerado un ejemplo de dicho concepto, o sea, las características que actúan como condiciones necesarias. Cada definición menciona solamente un subconjunto propio de estos atributos; mientras que aquellos atributos relevantes que no fueron incluidos en la definición se deben deducir lógicamente de los que sí lo fueron. Por ejemplo, que el término general de una serie de números reales tenga límite cero es un atributo relevante para la convergencia de la serie que no es explícitamente presentado en la definición usual de serie convergente.

Cada ejemplo, ineludiblemente, posee también características que son atributos no requeridos, directa ni indirectamente, por la definición (atributos irrelevantes). Aunque es innegable que los ejemplos colaboran al interpretar una definición, el problema que involucran radica en que si la gama que se presenta al alumno no es lo suficientemente rica se corre el riesgo de que generalice los atributos comunes a dichos ejemplos como si fueran todos relevantes al concepto.

Los ejemplos prototípicos de un concepto, son ejemplos que por distintas circunstancias destacan entre los restantes y que la mayoría de los individuos compartimos como parte de nuestros esquemas conceptuales. Es así que sus atributos irrelevantes corren mayores riesgos de ser transferidos como característicos del concepto (Wilson, 1990). En algunas ocasiones, esto lleva al alumno a rechazar objetos que cumplirían con la definición (ej.: un cuadrado como ejemplo de rombo o una función constante como ejemplo de función monótona) y en otros casos, la fuerza de este tipo de ejemplos es tal que un alumno reconoce como ejemplo un objeto que asocia al prototipo aunque no cumpla con los requisitos de su definición del concepto (ej.: considerar $\sqrt{169}$ como un número irracional o el gráfico de la función coseno hiperbólico como una parábola). Hershkowitz (1990) afirma que es posible detectar la existencia de ejemplos prototípicos, aun en conceptos “artificiales” presentados verbalmente (inventados para la investigación para asegurar que el pedido de generar ejemplos fuera el primer contacto del individuo con el concepto), tanto en alumnos como en profesores. Considerando que son inevitables, Wilson (1990) en su análisis del uso y las limitaciones de los prototipos afirma que, se debería alentar a los alumnos a considerar, analizar y flexibilizar su repertorio de prototipos.

La presentación de un concepto a partir de ejemplos y no-ejemplos lleva a los alumnos a obtener caracterizaciones que no implican condiciones suficientes o que no poseen las características lógicas de una definición matemática. En estos casos sería el profesor el encargado de armonizar las dimensiones espontánea y teórica apoyándose en la necesidad de sistematizar el conocimiento (Mariotti & Fischbein, 1997) y teniendo en cuenta que la introducción de estas restricciones lógicas posteriores puede resultar tan arbitraria como la presentación de una definición formal previa a la proposición de tareas de clasificación e identificación. Para ejemplificar, Mariotti & Fischbein relatan un episodio en que a partir de la observación de distintos cuerpos geométricos y el conocimiento desde cursos anteriores de los nombres que se dan a algunos de estos cuerpos, se pregunta a los alumnos ¿qué es un paralelepípedo? Los alumnos empiezan describiéndolo como un cuerpo que tiene sus caras paralelas dos a dos. Luego de analizar el caso del prisma de base hexagonal se ajusta esa descripción pidiendo que se trate de un cuerpo en que todas las caras tienen “la misma forma”. El relato que presenta el artículo no va más allá pero se podría cuestionar esta nueva formulación a partir de considerar el dodecaedro regular cuyas doce caras pentagonales son paralelas dos a dos. Se podría refinar una vez más la descripción pero ¿qué asegura que haya terminado allí el proceso? También se podría llamar paralelepípedo a todos los objetos determinados por esa descripción aunque queden incluidos estos elementos que no se tenían previstos pero ¿es eso lo que se desea?

En el aula no todas las definiciones construyen al concepto, en el sentido en que no todas modelan ante el alumno un objeto que es nuevo para él y cuyas propiedades serán impuestas o deducidas de su definición. Con algunos conceptos el alumno tiene experiencias anteriores a su presentación formal y ello da lugar a formulaciones que delinean un objeto ya conocido a partir de seleccionar convencionalmente algunas propiedades comunes al conjunto de objetos que se quiere caracterizar (ej.: al presentarse la noción de "función de concavidad positiva" muchos alumnos ya tuvieron contacto con palabras como "cóncava" o con la relación existente entre el signo del número a y la gráfica de la parábola $y=ax^2+bx+c$)

Después de establecida la definición el concepto pasa a ser lo que se deriva deductivamente de ella y puede resultar que ciertos objetos que no se esperaba que fueran ejemplos, son consecuencias lógicas de la definición. Estos objetos que un individuo maduro matemáticamente interpretaría como ejemplos no prototípicos, pueden ser vistos por el alumno como evidencia de un fallo en la definición, como una invitación a modificar la definición, cuando lo que podría flexibilizarse es el prototipo.

Según Sierpinska (1992), esta dificultad en la interpretación del papel de las definiciones en la actividad matemática puede considerarse un obstáculo epistemológico[13]: *La definición se ve como una descripción de un objeto ya conocido por los sentidos o por "insight", no es la definición quien determina al objeto sino que el objeto determina a la definición.*

II.3.1.4 El papel de las definiciones en el aprendizaje de la Matemática

Si los estudiantes enfrentan las tareas matemáticas que le son propuestas usando parte del contenido de su esquema conceptual, sin recurrir a la definición, cabe preguntarse por qué debemos preocuparnos por la presentación de definiciones en el aula en vez de concentrar esfuerzos en la selección de aproximaciones informales que permitan construir al alumno un esquema conceptual consistente con la definición que maneja la comunidad matemática. La respuesta a esta pregunta contempla varios aspectos:

1. Uno de estos aspectos se relaciona con la convicción de que el ingreso al pensamiento matemático avanzado implica reconocer que los conceptos que viven en la obra matemática tienen una definición a priori sin la cual no podrían ser reconocidos como "conceptos matemáticos", y que son esas definiciones el punto de referencia fundamental con el que contrastar los diferentes elementos que integran el esquema conceptual en la búsqueda de su consistencia.

Ante la convicción de que el estudiante no debería ser un mero espectador de la Matemática que se busca aprenda, resulta indispensable que las actividades de definición no descansen exclusivamente en las opciones tomadas por el profesor o el libro de texto. Creemos que el estudiante debería ser en ocasiones invitado a dar

[13] Recordar la nota al pie nº 3, en la sección dedicada a la visualización, sobre los obstáculos cognitivos.

caracterizaciones de objetos matemáticos con los que ya esté familiarizado o con otros que podría crear mediante su acto de definición.

En este contexto el estudiante deberá buscar enunciados con los que caracterizar a un cierto conjunto de ejemplos, respetando los principios de no circularidad y consistencia. Balacheff (1988b) en su tesis de doctorado se detiene a analizar algunas actividades de definición llevadas a cabo por estudiantes. Allí señala que se pueden encontrar dos tipos de fundamento para la búsqueda, por parte del estudiante, del contenido de la definición de un objeto que aparece involucrado en la resolución de un problema que ha aceptado resolver:

- *Exógenos*: cuando busca reconstituir referencias reconocidas culturalmente o relacionadas con el saber escolar: “la definición que debería conocer”
- *Endógenos*: cuando busca explicitar la concepción en función de las exigencias de la situación problemática.

En este contexto las definiciones no son estáticas sino que van evolucionando a medida que transcurre la resolución del problema y se van superando conflictos que surgen de la contrastación con ejemplos y no-ejemplos o con contraejemplos de las conjeturas en las que participan.

2. Para los conceptos figurales, a los que ya nos referimos al comienzo de esta sección, es especialmente interesante el análisis de la relevancia de su definición frente a la sola consideración de las otras porciones de su esquema conceptual asociado (en este caso integrado, entre otras cosas, por la representación mental del objeto geométrico: la figura y por una variedad de modelos materiales de dicho objeto: algunos dibujos).

En estos casos es la figura quien guía al razonamiento en la búsqueda y análisis de diferentes alternativas hacia el descubrimiento de relaciones en las que está involucrada el concepto, pero son las restricciones lógicas impuestas por la definición quienes controlan la corrección de este razonamiento (Fishbein, 1993). Este control idealmente debería ser simultaneo a la lectura de la figura pues en ello radica la fuerza de la figura frente a los dibujos.

En este punto también coincide Laborde (1993) cuando afirma que: “*el significado de una figura no puede ser delineado sólo por el dibujo aun idealizado*[14]*, sino que requiere ser acompañado de un texto u otra forma discursiva*”. Es así que el esquema conceptual asociado a estos conceptos figurales debiera ser integrado por una definición personal que permita detectar la irrelevancia de algunas propiedades de los dibujos que el esquema conceptual incluye, respecto del objeto que estos dibujos intentan modelar.

3. Otro aspecto de la respuesta se relaciona con el desarrollo de estrategias de trabajo matemático provenientes del manejo de las definiciones de los conceptos involucrados. Moore (1994), en su análisis de la influencia que ejerce en un estudiante el conocimiento de las definiciones de conceptos matemáticos sobre su desempeño en problemas que involucran esos conceptos, analizó un aspecto del manejo de las definiciones que denominó “concept usage”. Se agruparían bajo esta etiqueta las estrategias que maneja el individuo con relación al concepto, ya sea:

- *Generando ejemplos y no-ejemplos*. Diversas investigaciones han resaltado la mayor dificultad involucrada en generar ejemplos propios frente al chequeo de si cierto

[14] Por idealizado Laborde se refiere a ir más allá de las imperfecciones o imprecisiones de los dibujos concretos.

objeto es un ejemplo o no (Selden & Selden, 1998) Esta diferencia no se justifica únicamente en una mayor demanda cognitiva sino que también refleja la enorme dependencia del alumno con relación a la guía de su profesor y el desafío involucrado en el traspaso de la responsabilidad de la actividad matemática desde el profesor al alumno que analizamos en otra sección de este trabajo.

- *Aplicando la definición dentro de una demostración* y aprovechando así su aporte a nivel de gramática, vocabulario y notación matemática. Para poder activar este uso de la definición es imprescindible la dotación de sentido a la definición por sí misma y no sólo a través del esquema conceptual asociado (Moore, 1994).
- *Usando la definición para estructurar una demostración globalmente*. Bills & Tall (1998) destacan también la importancia de considerar este aspecto al caracterizar una definición como "operativa formalmente para un individuo" cuando éste puede usarla en la creación o reproducción significativa de un argumento formal, resaltando que esta operatividad depende del desarrollo de un rango de estrategias que permiten su uso en razonamientos deductivos.

  Los siguientes son algunos ejemplos de estas estrategias cuya ausencia, como comprobamos a diario, frena a los alumnos en el momento de formalizar la solución de un problema:

  - Para justificar la inyectividad de una función concreta, la estrategia sugerida por la definición "cada elemento del recorrido de la función tiene una única preimagen" consiste en suponer la igualdad entre dos elementos de la imagen: f(x) = f(y) y deducir que provienen de la misma preimagen: x = y (Moore, 1994).
  - En el caso de la definición de supremo de un conjunto como "la menor de las cotas superiores de dicho conjunto", una estrategia para probar que cierto candidato S es efectivamente el supremo de un conjunto A pasaría por probar primero que S es cota superior de A y después, tomando un $\varepsilon>0$ genérico, probar que existe algún elemento de A mayor que $S-\varepsilon$ (Bills & Tall, 1998).
  - Para verificar la dependencia lineal de un cierto conjunto de vectores (habiendo optado por la definición que en la sección II.3.1.1 consideramos más operativa para este tipo de conjuntos), la estrategia consistiría en formar una combinación lineal entre ellos de coeficientes desconocidos, exigirle que resulte el vector nulo y deducir de eso que no todos los coeficientes son necesariamente cero.
  - En los teoremas de límite de la función suma o producto, sería la propia forma de la definición $\varepsilon-\delta$ de límite quien permite estructurar la demostración.

II.3.1.5 Consideraciones finales

Partimos de la premisa de considerar al trabajo con definiciones como parte de las actividades matemáticas propias de la etapa de transición, de las cuales debe responsabilizarse el alumno en esa etapa. En este contexto desarrollamos en esta sección una serie de consideraciones, algunas de las cuales destacaremos a continuación.

Entre las características compartidas por las definiciones matemáticas, consideramos especialmente su no-circularidad, su consistencia interna, su deseable minimalidad y por sobre todo, nos detuvimos a analizar su carácter convencional. Éste, radica en la posibilidad de elegir un enunciado u otro según criterios estéticos, operativos o didácticos y según el alcance más o menos restrictivo que se desea otorgar a la definición.

Frente a esta posibilidad de elegir, para algunos conceptos, entre definiciones jerárquicas o particionales, las consideraciones realizadas en las páginas previas nos alertan sobre la necesidad de discutir explícitamente en clase la clasificación de los casos límites y justificar las ventajas de las definiciones jerárquicas, cuando por ellas se opte con relación a conceptos figurales, debido a la documentada preferencia de los alumnos por enunciados particionales para estos conceptos.

En relación con la elección de una definición frente a otra por su carácter operativo, destacamos el papel de las actividades de definición como favorecedoras del desarrollo de estrategias de trabajo vinculadas a la resolución de problemas, a la construcción e identificación de ejemplos y a la justificación de afirmaciones.

Ante la certeza que ante una tarea que involucra a un cierto concepto matemático, el alumno activa distintos contenidos de su esquema conceptual antes que la definición del concepto, adquiere relevancia la consistencia entre el contenido de ese esquema conceptual y la definición y la coherencia interna de dicho esquema conceptual. Un aspecto particularmente importante en este sentido, es la coherencia del repertorio de ejemplos y no-ejemplos y la discriminación entre atributos relevantes e irrelevantes de esos ejemplos.

Así, teniendo por meta favorecer la formación de esquemas conceptuales consistentes con los que comparte la comunidad matemática, coherentes internamente y que permitan el desarrollo de estrategias de trabajo, no es indiferente la elección de la definición que se presenta a los alumnos para un concepto. De la misma manera que tampoco es indiferente la elección de los ejemplos y no-ejemplos que la acompañan, las imágenes visuales que se sugieren, los problemas de aplicación que se proponen ni las palabras del lenguaje natural con que se lee la definición cada vez que ésta es invocada, a lo largo de todo el proceso de enseñanza.

II.3.2 La demostración

Como ya mencionamos, uno de los quiebres más notables que se aprecian entre la enseñanza de la Matemática elemental y la avanzada radica en el cambio en la adjudicación de importancia y en la frecuencia de aparición de ciertos comportamientos matemáticos, fundamentalmente: la definición y la demostración. El primero fue analizado en la sección anterior y ahora es el turno de analizar el segundo: lo haremos sin pretender agotar un tema tan amplio sino centrándonos en los aspectos que creemos más relevantes a la transición hacia el pensamiento matemático avanzado.

El tratamiento de la demostración en la clase de Matemática enfrenta una serie de dificultades características de esta etapa: ausencia de sentimiento de necesidad de demostración por parte del alumno, dificultades para que genere sus propias demostraciones, reticencia a aceptar que la existencia de un contraejemplo invalida irrevocablemente una afirmación matemática, etc. (Dreyfus, 1990). Para estudiar estos aspectos decidimos comenzar caracterizando la demostración frente a otras actividades de justificación para, a partir de ello, desmitificarla como ritual discursivo resaltando su carácter explicativo, comunicativo y sistematizador. Para finalizar este análisis creímos importante considerar una actividad matemática íntimamente ligada a la demostración como es la refutación.

II.3.2.1 Argumentar, explicar, probar, demostrar

Mientras que, siguiendo a Balacheff, por argumentación entendemos cualquier discurso destinado a obtener el consentimiento del interlocutor sobre una afirmación, una explicación es una argumentación en que el consentimiento se busca a partir de la explicitación del carácter verdadero de la afirmación, utilizando exclusivamente argumentos de contenido y renunciando a otro tipo de argumentos como podrían serlo los de autoridad, los afectivos o los de reputación.

Las pruebas son explicaciones en que la explicitación del carácter verdadero de la afirmación se realiza sobre la base de normas aceptadas por una comunidad dada en un momento dado. Cuando la comunidad involucrada es la matemática y las normas plantean la presentación de una sucesión de enunciados cada uno de los cuales es una definición, un axioma, un teorema previo o un elemento derivado mediante reglas preestablecidas de los enunciados que le preceden, las pruebas reciben el nombre de demostraciones (Balacheff, 1987).

Mientras que la demostración se relaciona con la búsqueda del saber, una argumentación podría valorizar la eficiencia por encima del rigor. La argumentación, cuya práctica es usual en la vida cotidiana, puede actuar como obstáculo frente a la demostración de manera análoga a como puede hacerlo la descripción frente a la definición, ya que el cambio que implica perseguir la certeza más allá de la confianza no tiene por qué ser aceptado naturalmente por el alumno cuando ingresa a la clase de Matemática. Esta observación cuestiona la conveniencia de centrar la presentación de la demostración sobre la base de sus similitudes con la argumentación (Balacheff, 1990) y alerta sobre el riesgo de hacer creer a un alumno que realizó una demostración cuando no ha hecho más que argumentar sin vinculación con una axiomática y un conjunto de reglas de inferencia.

Aunque aquí hemos tomado la postura de Balacheff en cuanto a caracterizaciones jerárquicas entre argumentación, explicación, prueba y demostración, otros autores establecen vínculos de otro tipo entre estas actividades. Por ejemplo Duval (1992) opone la argumentación a la demostración como mecanismos de justificación de una afirmación: la demostración debe basarse en un razonamiento válido, fundamentalmente deductivo y resultante de la aplicación del Modus Ponens; la argumentación, por el contrario, no obedece a restricciones de validez ni organización de las razones manejadas, sino a restricciones de pertinencia, de vinculación entre los contenidos de la afirmación y de las razones con que se busca justificarla. Mientras que en la primera la conclusión se impone necesariamente al individuo que comprende su funcionamiento, en la segunda esta imposición no es en absoluto garantida. Aunque Duval plantea la existencia de una gran distancia cognitiva entre demostración y argumentación reconoce que la distancia a nivel discursivo puede no ser tan grande y admite el debate entre la existencia de una ruptura o de continuidad entre una y otra actividad a nivel cognitivo.

Pero este abanico de discursos justificativos para enunciados matemáticos, desde las argumentaciones a las demostraciones no es el único que aporta analizar. Balacheff (1988a) también presenta un ordenamiento de diferentes tipos de justificaciones escolares según el grado de generalidad involucrado. Este ordenamiento cubre la gama entre las pruebas pragmáticas (aquellas que recurren a la acción sobre los objetos y no a sus propiedades para justificar afirmaciones sobre ellos) y las pruebas conceptuales (las que recurren a la formulación de propiedades y relaciones entre los objetos en cuestión). Entre estos extremos destaca cuatro etapas que nos interesa analizar:

- *Empirismo ingenuo*: cuando el alumno valida la afirmación después de verificarla para algunos casos particulares.
- *El experimento crucial*: cuando el alumno toma en cuenta la problemática de la generalidad y la "resuelve" mediante el uso de un caso particular que reconoce como "no especial". Un ejemplo de este uso que puede aparecer en un curso propio de la etapa de transición sería la argumentación de que el producto de matrices es asociativo pues cuando $A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \pi \\ 1/7 & -9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2.1 & e & 123 \\ -\sqrt{2} & 0 & 0.\overline{4} \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 13 \\ 5/7 \\ -6 \end{pmatrix}$ se cumple que *(A.B).C=A.(B.C)* y si se cumple para estas matrices que no "exhiben" características especiales, debería cumplirse para todas las otras.
- *El ejemplo genérico*: cuando el alumno justifica la afirmación operando sobre un objeto concreto al que considera representante de todos los pertenecientes al dominio de dicha afirmación. Un ejemplo, también de un curso de Matemática típico del período de transición que nos ocupa, con el cual podemos ilustrar este tipo de pruebas, se relaciona con el siguiente resultado: "si $\{e_1, e_2, e_3\}$ es una base de R^3 y $\{a_1, a_2, a_3\}$ R entonces existe una transformación lineal $T: R^3 \rightarrow R$ tal que $T(e_i) = a_i$ para $i = 1,2,3$": se toma una base concreta de R^3 (como ser {(1,1,1), (1,2,0), (3,4,1)}) y se construye para ella la transformación *T* siguiendo un procedimiento que sería perfectamente válido para cualquier otra base (o sea, que a pesar de no ser un razonamiento general es naturalmente generalizable). Otro ejemplo sería el uso de pruebas visuales acompañadas de comentarios sobre la independencia del diagrama específico usado, como los que aparecen en la parte experimental de este trabajo.
- *El experimento mental*: cuando el razonamiento del alumno se independiza de la representación del objeto aunque no necesariamente se trate de una prueba con la estructura de una demostración.

II.3.2.2 Las funciones de la demostración

A menudo la demostración existe para el alumno como un ritual, un discurso que debe repetir o cuyo estilo debe imitar si se le pide probar un enunciado, más que como una herramienta explicativa basada en un sistema común de validación construido y aceptado por él y su grupo (Balacheff, 1982). Algunas de las razones de este hecho podrían encontrarse en la propia actividad matemática dentro del aula y en el Contrato Didáctico que la rige:

a) Se centra la función de la demostración exclusivamente en la verificación de resultados, sin siquiera acompañar esta práctica de la discusión de las razones por las que se repiten una y otra vez validaciones ya hechas por otros.
b) Se trata la demostración como un objeto que el profesor acepta o rechaza cuando la recibe de su alumno, antes que resaltar su papel dentro de un proceso de justificación (Balacheff, 1982). Un ejemplo de esto es el tratamiento que en ocasiones se da a las demostraciones por Inducción Completa, en que el alumno imitando un modelo presenta a su profesor un trabajo que éste considera correcto o no, sin fomentar la reflexión sobre la actividad de justificación realizada. Esta situación favorece la disociación entre lo que el alumno hace para asegurarse de un resultado y lo que ofrece a su profesor cuando éste se lo pide.

c) No se recrean las condiciones que permiten apreciar la necesidad de la demostración frente al riesgo de equivocarse al aceptar un enunciado falso o rechazar uno verdadero y al riesgo de no lograr convencer a los demás al comunicar un resultado matemático (Balacheff & Laborde, 1985) Se sobrevalora de esta manera el papel motivador de un supuesto deseo de certeza por parte del estudiante.
d) Se presentan demostraciones formales a los alumnos, sin haberlos acercado previamente al simbolismo lógico y su manipulación, invocando habilidades naturales de razonamiento que se perfeccionarían en la práctica. Sin embargo, las dificultades con las deducciones basadas en el Modus Tollens, con el tratamiento de condicionales o con el uso de cuantificadores han sido documentadas por varias investigaciones que invitan a analizar la pertinencia de una instrucción explícita de estos tópicos. Esta instrucción debería tomar en consideración explícitamente su aplicación en contextos matemáticos, ya que en ocasiones los cursos de lógica tradicionales, se detienen en algunos aspectos que no se usan directamente en las demostraciones (ej.: diagramas de Venn) mientras que no enfatizan otros aspectos estrechamente relacionados con esta actividad (Selden, A. & J., 1996). Un ejemplo de esos aspectos relacionados con la demostración es el siguiente: las afirmaciones de la forma "p q" se pueden demostrar probando que "–q –p" o que "p y –q implican una contradicción" y la equivalencia de estas estrategias rara vez se explicita relacionando las tablas de verdad de "p q", "–q –p" y "(p –q r) (p –q –r)".

Aunque no todas las funciones de la demostración en la comunidad matemática son igualmente relevantes en el aprendizaje, es importante considerarlas para no llevar la demostración al aula sólo como un ritual que identifica la práctica matemática, sino para presentarla como un comportamiento con "razón de ser" dentro del proceso de aprendizaje (Hanna, 1995).

La demostración en la comunidad matemática

La revolución en la enseñanza de la Matemática en la década del 60 se basó, entre otras cosas, en la creencia de que la más importante característica de la Matemática moderna era la demostración formal. Este punto de vista se debía, sin duda, a las repercusiones del grandioso trabajo realizado durante la primera mitad del siglo sobre los fundamentos de la Matemática. Los partidarios de brindar una firme fundamentación a partir de definiciones, axiomas y reglas de inferencia, diferían en las consideraciones filosóficas sobre la Matemática (intuicionistas, formalistas y logicistas), pero coincidían sobre la importancia otorgada a la demostración. Fue este énfasis compartido el que influyó profundamente en los diseños de currículum de Matemática de aquella época (Hanna, 1991).

La situación actual no es muy diferente. Los resultados del trabajo de Gödel (con relación a la existencia de enunciados tales que ellos y su negación resultan indemostrables y a la imposibilidad de asegurar la consistencia de la teoría matemática sin admitir la consistencia de una cierta teoría que la contenga) y la participación de computadoras en la justificación de resultados matemáticos, han llevado a la comunidad matemática a debatir acerca del papel de la demostración en su actividad actual. Pero aun si en este debate no es alcanzado un consenso sobre criterios de validación, las distintas posturas permanecerán unidas por la importancia que le otorgan a la demostración en el ámbito de la actividad matemática (Hanna, 1995).

Aunque la existencia de una demostración es considerada prerrequisito para la publicación de un resultado, para que el alcance del resultado demostrado trascienda esas páginas, es más importante la comprensión de los conceptos que subyacen y su significancia que la presencia de una justificación rigurosa. Se estima que se publican aproximadamente unos doscientos mil teoremas al año, entre éstos, sólo unos pocos son aceptados activamente por la comunidad matemática y son las demostraciones de estos pocos teoremas las que se revisan, corrigen y afinan; la mayoría de demostraciones que aparecen en artículos de investigación nunca es revisada (se calcula que como mínimo la mitad de ellas poseen errores, aunque las afirmaciones que intentan justificar son esencialmente verdaderas) (Hanna, 1991).

En la comunidad matemática, una demostración se convierte en demostración luego del acto social de ser aceptada como tal. A pesar de que en el proceso de dicha aceptación interviene más una estimación de su plausibilidad que una verificación de los procesos deductivos involucrados, esta decisión no es caprichosa. La comunidad juzga de acuerdo a ciertos criterios que incluyen una combinación de los siguientes factores: *comprensión del teorema*, de los conceptos involucrados, de sus implicancias, de sus antecedentes lógicos; *significancia*, o sea, utilidad del resultado en alguna rama de la Matemática como para que merezca el esfuerzo de validarlo; *compatibilidad* con el conjunto de resultados ya aceptados por la comunidad; *reputación* de su autor como experto en el área del teorema; y *argumentación convincente*, es decir, existencia de un argumento matemático (riguroso o no) que justifique la afirmación y que sea del grupo de los razonamientos ya aceptados en el pasado (ej.: en algunos momentos de la historia no eran consideradas convincentes pruebas de existencia que no pasaran por la construcción del objeto cuya existencia se deseaba validar). La publicación de una demostración rigurosa, por sí sola, no favorecería la aceptación activa de lo que afirma, ya que ni siquiera sería examinada en ausencia de los factores de motivación antes nombrados. (Hanna, 1991).

La demostración en la clase de Matemática

La transición hacia el pensamiento matemático avanzado, implica que el estudiante pase de la argumentación a la demostración como método de validación de un resultado matemático.

1. Para algunos profesores la clave está en hacer las demostraciones lo más claras posible, intentando que quede claro el por qué y el para qué de cada paso y en presentar la demostración como la respuesta a una necesidad de tal manera que la estructura de la Matemática formal sea vista por el alumno como un objetivo significativo (Tall, 1991b). Pero dada la posición del profesor en el aula como garante de la legitimidad y validez de las actividades matemáticas que allí se realizan resulta muy difícil “devolver” a los alumnos la responsabilidad de sus afirmaciones y más aún que emerja de esta devolución la necesidad de una demostración más allá de una simple argumentación.
2. Para otros profesores, la salida está en introducir al estudiante en actividades de conjetura, verificación, debate, que fomenten el pasaje hacia explicaciones basadas en normas convenidas por el grupo, desmitificando el “ideal” de demostración como un ritual formalista característico de la comunidad matemática, que en el aula sólo puede contemplarse (Tall, 1991c).
3. A fin de tomar en cuenta el papel de la demostración como medio de justificación, explicación y comunicación y de reconocer el proceso social que implica la aceptación de un nuevo resultado por parte de la comunidad matemática, algunos

profesores han recurrido en los últimos tiempos a enfatizar la función explicativa de una demostración. Tanto las demostraciones que sólo validan como las que también revelan y usan las ideas matemáticas que la motivaron (su "propiedad característica") son legítimas desde que ambas cumplen los requerimientos de una demostración matemática, pero se diferencian en que mientras que unas informan que un teorema es verdadero las otras además muestran por qué es verdadero, sin que esto involucre necesariamente una pérdida de rigor. El reto está, entonces, en identificar pruebas alternativas a las que se usan en los cursos y que mayoritariamente no cumplen este papel realmente explicativo (Hanna, 1989). Estas pruebas podrán ser de diferentes clases: un diagrama, una discusión guiada por reglas previamente convenidas por el grupo, una demostración totalmente rigurosa; pero sean de la clase que sean, no deberían dejar de lado el reconocimiento de que el alumno sabe que lo que es nuevo para él forma parte de un conjunto de conocimientos ya aceptado como verdadero por los matemáticos, por lo que el desafío radica en que entienda por qué es verdadero (Hanna, 1995).

Como decíamos, la demostración responde a necesidades de explicación y comunicación tanto como a requerimientos de justificación y en este sentido, creemos importante mencionar que las pruebas visuales, o sea, las justificaciones que usan diagramas (acompañados, en mayor o menor grado, por un texto), también pueden cumplir esos requerimientos de comunicación y explicación (en la sección dedicada a la visualización ya habíamos realizado algunas consideraciones al respecto del valor heurístico y explicativo de los diagramas). Y en algunas ocasiones, este carácter explicativo de las pruebas visuales es mayor que el de una demostración formal, puesto que se libera parte de la atención requerida para el seguimiento de las cadenas deductivas que la demostración involucra.

Pero cuando analizamos el papel de la visualización en las actividades de justificación no sólo destacamos el valor heurístico y explicativo de los diagramas sino que también alertamos acerca del riesgo de usar en el proceso de justificación atributos del diagrama que son irrelevantes al concepto que ese diagrama modela. Podemos ilustrar lo anterior con un ejemplo: mientras que en demostraciones analíticas se puede razonar en base a un elemento desprovisto de más atributos que los dados por las hipótesis ("sea p   P que cumple…"), en las pruebas visuales cualquier objeto sobre el que se construya el razonamiento posee características que deben ser ignoradas en dicho razonamiento.

En la misma línea respecto a problematizar el uso de pruebas visuales, Martin & Harel (1989) reportan una investigación donde detectaron que el uso de atributos irrelevantes del diagrama involucrado en una prueba visual no influía en la validación de dicha prueba para la mayoría de una muestra de alumnos que había completado un curso de geometría de nivel preuniversitario. Este alarmante dato (cuya confirmación obligaría a reconsiderar los beneficios de las pruebas visuales) nos llevó a incluir un análisis de estas cuestiones en la parte experimental de este trabajo.

Entender qué se está probando y cómo se está haciendo, no implican solamente la transmisión del resultado matemático en cuestión y el convencimiento sobre su validez, sino que según De Villiers (1993) pueden a su vez:

o *Alentar el descubrimiento de nuevos resultados*. Al analizar una prueba, la investigación sobre dónde se usan las hipótesis, sobre si es posible debilitarlas o sobre las consecuencias de su modificación, representa una importante fuente de conjeturas. Podemos mencionar como ejemplo, la deducción de que una función acotada con una cantidad finita de discontinuidades es integrable a partir de modificar la demostración de que una función continua y acotada salvo en un punto es integrable y el cuestionamiento acerca de qué le sucede a las funciones con un número infinito de discontinuidades. Y otro ejemplo se puede encontrar en la parte experimental de este trabajo cuando se analiza la pertinencia de las hipótesis sobre la concavidad para deducir el signo del error dado por los distintos métodos de aproximación del “área bajo el gráfico”.

- *Aportar técnicas útiles para la resolución de problemas*. Por ejemplo, al demostrar el teorema de Bolzano mediante la construcción de determinados intervalos encajados no sólo se valida la existencia de una raíz sino que se proporciona un método de aproximación de dicha raíz de manera tan ajustada como se desee.
- *Alertar sobre la necesidad de mejores definiciones*. Este punto se relaciona con el grado de operatividad de una definición respecto a otra y también con la restricción del alcance de los enunciados según la amplitud de los objetos afectados por la definición (temas que ya fueron estudiados en la sección anterior). Este aspecto de la demostración se puede detectar, por ejemplo, en el análisis de las entrevistas sobre las diferentes definiciones de función de concavidad positiva relacionadas con algunos teoremas de aproximación del área bajo la gráfica de funciones positivas de concavidad positiva tal como se analiza en otra sección de este trabajo.
- *Contribuir a la sistematización de los resultados validados*. Este papel de la demostración organizando resultados deductivamente a partir de axiomas, teoremas previos y definiciones se relaciona con un perfil global de la demostración a veces eclipsado por los aspectos más locales involucrados en la validación de un resultado particular como consecuencia lógica de otros. Este objetivo de la demostración es el que se persigue, por ejemplo, con los teoremas planteados en el inicio de un curso de Geometría Métrica donde más que la validación de resultados se busca la organización de los mismos en un sistema axiomático deductivo y con ello, el estudio del sistema en sí mismo. Justamente esta meta de los primeros cursos de Geometría en cuanto a los aspectos más globales de la demostración es la que corre peligro con la sustitución de los cursos de Geometría que está teniendo lugar en los nuevos planes de estudio de diversos lugares del mundo (Tall, 1995).

II.3.2.3 Los contraejemplos

Un contraejemplo es un elemento perteneciente al dominio de una determinada afirmación que no verifica lo afirmado (ej.: la sucesión $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ es un contraejemplo de la afirmación “las sucesiones convergentes son monótonas” pues a_n es convergente y sin embargo, no es monótona; al igual que cualquier número real entre 0 y 1 puede actuar como contraejemplo de la afirmación “ $x \quad R : x^2 > x$ ”).

La existencia de un contraejemplo, desde un punto de vista lógico, es una crítica con la fuerza suficiente para refutar la afirmación, o sea, para hacer explícita su falsedad (ej.: es falso que “toda función integrable en [*a,b*] sea continua en [*a,b*]” pues se puede presentar como contraejemplo la función *signo*, que es integrable pero no continua en el intervalo [-1,1]).

Dedicaremos algunos párrafos al estudio de los contraejemplos teniendo en cuenta que la refutación de una afirmación no se da exclusivamente en base a contraejemplos. Hay afirmaciones que directamente no se pueden refutar mediante este mecanismo, por ejemplo: ¿cómo se refuta mediante contraejemplos la afirmación “existe una base de R^3 de cardinal 4”? Cuando la negación de una afirmación es verdadera, ella es inmediatamente falsa por aplicación del principio del tercero excluido, así queda refutada la afirmación “existe una base de R^3 de cardinal 4” al demostrar que toda base de R^3 tiene cardinal 3.

Algunas afirmaciones del tipo “p   q” también pueden ser refutadas sin usar contraejemplos, suponiendo verdaderas p y q y deduciendo de allí una contradicción[15] (ej.: es falso que “si T: $R^3 \rightarrow R^2$ es una transformación lineal entonces T es inyectiva” pues si T: $R^3 \rightarrow R^2$ es una transformación lineal y T es inyectiva entonces dim Nu(T) = 0 y dim Nu(T) + dim Im(T) = 3, de lo cual se deduce que dim Im(T) = 3 que contradice al hecho de que Im (T) R^2).

Después de aceptar la corrección de una demostración, queda asegurada la validez del enunciado matemático involucrado de tal forma que la verificación de casos particulares no debería afectar el convencimiento sobre dicha validez. Sin embargo, Fischbein (1982) presenta evidencia empírica que refleja que una gran mayoría de estudiantes preuniversitarios (se trata de una muestra de 200 alumnos de 10º, 11º y 12º en Tel Aviv) no actúan conforme a esto.

En la investigación de Fischbein se plantea la siguiente situación: *Dan dice que n^3-n es múltiplo de 6 para todo natural n y presenta la siguiente prueba*: *“ $n^3 - n = n (n^2 - 1) = (n-1)\, n\, (n+1)$; como entre tres números consecutivos hay al menos un número par y hay un múltiplo de tres, entonces el producto es múltiplo de 6”*.
Cuando se les pregunta a los alumnos si es correcta la prueba dada por Dan y si la prueba garantiza la generalidad de la afirmación, el 81.5% responde que sí a la primera pero, a pesar de ser equivalente ambas interrogantes desde un punto de vista lógico, sólo el 60% responde que sí a la segunda. Más aún, sólo 48 alumnos entre toda la muestra aceptan la prueba de Dan y simultáneamente consideran innecesarias verificaciones adicionales para aumentar su confianza en el teorema. También se les presenta a estos alumnos la siguiente situación: *Moshe afirma que para n = 2357, n^3-n = 105514223 y este número no es divisible entre 6.*
A la cual sólo el 32% reacciona diciendo que “debe haber un error”, que “es imposible” o alguna respuesta similar.

Podríamos decir que la inconsistencia entre aceptar una demostración y no aceptar la universalidad de la afirmación demostrada, muestra que el estudiante no entiende realmente qué es una demostración. Sin embargo, Fischbein considera que eso no agota la explicación del fenómeno. En el contexto cotidiano la principal fuente de información e interpretación es la acumulación de hechos confirmatorios, cuya cantidad y variedad afectan el grado de convencimiento. En este marco, los procesos involucrados en las demostraciones no condicen con esa práctica cotidiana. Por ello para que el alumno comprenda qué es una demostración se requiere que adapte las formas en que consigue convencerse, al contexto matemático.

Pero además, para que el convencimiento formal derivado de la aceptación de una demostración resulte productivo en la actividad matemática futura del alumno, debe ser

[15] Observar que al deducir una contradicción de p y q se está demostrando que p   -q; por lo que si p   q fuera verdadero se generaría una inconsistencia.

acompañado de un sentimiento de acuerdo de que la afirmación demostrada es efectivamente cierta para todos los objetos de aquella categoría (Fishbein, 1982). Para alcanzar este sentimiento de acuerdo debe entenderse por qué la relación se mantiene al variar las condiciones de los distintos objetos de la categoría, lo cual es especialmente relevante en el análisis de las pruebas visuales.

Balacheff (1990) analiza algunas respuestas que puede provocar en un alumno la presentación de un contraejemplo:

- *Ninguna reacción*: el alumno admite la existencia de excepciones a la regla.
- *Rechazo del contraejemplo*: correctamente o no, el ejemplo pierde su carácter refutador por no cumplir ciertas condiciones. En ocasiones estas condiciones son las establecidas en la definición del concepto y de allí se deriva una provechosa reconsideración de los atributos involucrados en la definición. En otras ocasiones las condiciones son las hipótesis de la afirmación. En la idea de continuar presentando para estas consideraciones ejemplos propios de la etapa que nos ocupa, para complementar así los ejemplos que encontramos en las referencias bibliográficas consultadas que mayoritariamente son propios de la Matemática elemental, presentamos el siguiente: los alumnos a menudo enuncian que si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son series de términos positivos tales que $\sum a_n$ converge y $\lim \frac{a_n}{b_n}=1$, entonces $\sum b_n$ también converge. Frente a esta afirmación la presentación del caso en que $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ y $b_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ y su rechazo como contraejemplo de la afirmación anterior, conducen a la revaloración de la hipótesis relativa al signo constante de los términos de las series a comparar.
- *Rechazo de la conjetura*: esta respuesta, menos usual de lo deseable, cuando es acompañada del análisis de los motivos del fracaso de la conjetura puede dar pistas sobre cómo mejorarla. Por otro lado, también se da esta respuesta en el marco del "empirismo ingenuo" (si un par de ejemplos basta para fundar una conjetura otro puede refutarla)
- *Modificación de la conjetura*: que puede ser superficial (para contemplar el contraejemplo) o profunda (para asimilar las razones de fondo de la refutación), pasa en gran parte de los casos por la reducción del dominio de validez de la conjetura mediante la introducción de una condición adicional. Por ejemplo, frente a la afirmación "si f tiene en el punto a un extremo relativo entonces f'(a)=0", la presentación del ejemplo de la función valor absoluto considerada en su mayor dominio conduce al rechazo de la conjetura o a su modificación si de le agrega la hipótesis de que la función f es derivable en el punto a. La presentación, a continuación, del ejemplo de la función $g:[1,2] \to R \,/\, g(x) = x^2$ y el análisis de su comportamiento en 1 y en 2 puede conducir tanto a la reconsideración de la definición de extremo relativo como a la inclusión de una hipótesis extra como ser que el punto a sea interior al dominio.

Por lo tanto, a pesar de lo categórico de un contraejemplo desde un punto de vista lógico, a nivel de enseñanza uno no debería confiarse en su poder refutador, y tampoco en que todos los contraejemplos tengan el mismo papel en el aula.

Relacionado con la existencia de dos tipos de demostraciones: las que sólo prueban y las que también explican, se puede identificar la existencia de contraejemplos que sólo refutan y otros que además dan señales sobre los motivos por los que es falso el enunciado en cuestión. Peled & Zaslavsky (1997) destacan dos aspectos como síntomas del poder explicativo de un contraejemplo: la sugerencia sobre por qué la afirmación es falsa y la sugerencia sobre cómo se podría generar un conjunto de contraejemplos adicionales. Es que según estos autores algunas afirmaciones son "casi correctas" en el sentido en que son verdaderas salvo una pequeña cantidad de casos excepcionales, cuya exclusión explícita del dominio de aplicación del resultado lo harían absolutamente verdadero. Esta idea aparece también en la obra: Pruebas y Refutaciones (Lakatos, 1978, pp. 43) cuando se habla de "tres tipos de proposiciones: las verdaderas, las falsas sin esperanza y las esperanzadoramente falsas"; este último tipo se puede mejorar convirtiéndolas en verdaderas al añadirles una cláusula que enuncie las excepciones (ej.: la afirmación " n: $4n^2 + 357 > 76n$" es falsa pues para $n = 10$ no se verifica, sin embargo, se convierte en verdadera al agregar " n N-{9,10}")

Cuando la afirmación falsa no es "casi correcta" es importante que su refutación se realice mediante contraejemplos que muestren su carácter general, ya que los contraejemplos específicos muy particulares pueden ser vistos por el alumno como casos excepcionales salvo los cuales la afirmación sería válida: la función valor absoluto no es la única función continua que no es derivable, la serie armónica alternada no es la única serie convergente que no es absolutamente convergente, ni la función de Dirichlet la única función acotada que no es integrable.

II.3.2.4 Consideraciones finales

Comenzamos la sección dedicada a la demostración caracterizándola frente a otros discursos justificativos como son la argumentación, la explicación o las pruebas. Para completar esta caracterización también analizamos distintas respuestas que dan los alumnos frente al pedido de justificación de afirmaciones: la verificación para algunos casos particulares, el trabajo sobre un caso particular que reconoce como "no especial" atento al alcance que debe poseer su explicación, el uso de un ejemplo genérico que aunque objeto concreto representa a todos los pertenecientes al dominio de dicha afirmación o la realización de un experimento mental con independencia de la representación del objeto involucrado en la afirmación.

Hanna, en sus trabajos de 1989 y 1991, afirma que el aprendizaje de la Matemática es un proceso dinámico en el que el estudiante progresa a través de profundizar en imágenes mentales y destrezas. Parte de este progreso radica en reconocer que entender una demostración es más que confirmar que todos los enlaces en una cadena de deducciones son correctos. Cuando un matemático lee una demostración no es el esquema deductivo el que acapara su atención sino que atiende especialmente a las ideas matemáticas cuyas relaciones son iluminadas por esta demostración de una manera novedosa. Resulta, entonces, que lo importante será convencer al estudiante de la necesidad de un razonamiento cuidadoso y una presentación de argumentos que permita que éstos sean examinados, y aun cuando esta actividad involucre un cierto grado de formalización, en todo momento, el énfasis debe ser explícitamente colocado sobre la claridad de las ideas. Hanna agrega que aunque una imagen en extremo formalista de la demostración no refleja la actividad matemática actual, el formalismo no es un asunto lateral, sino una importante herramienta para la clarificación y validación, que al fin y al cabo son las razones por las que presentamos una demostración en el aula. Esto fue lo que pretendimos resaltar en el análisis de las funciones de la demostración tanto en la comunidad matemática como en el aula.

Terminamos la sección recogiendo reflexiones en torno al uso de contraejemplos. Entre estas reflexiones destacamos la existencia de contraejemplos que no sólo refutan sino que explican la falsedad, en paralelismo con las demostraciones que explican por qué se cumple lo probado además de dejar asentado su carácter verdadero. También comentamos que los mismos cuidados que tendríamos para elegir la prueba que presentaremos en clase, debe tenerse respecto al contraejemplo, para apoyar al alumno en la aceptación de la falsedad de la afirmación y no como una "excepción a la regla".

Tanto en las reflexiones acerca de la demostración como de la definición hemos visto que algunos obstáculos para la aceptación por parte del alumno de sus peculiaridades provienen de las diferencias de su funcionamiento en el ámbito matemático respecto al contexto cotidiano. Creemos que este aspecto debe ser especialmente atendido en las actividades de enseñanza en esta etapa.

III. PARTE EXPERIMENTAL: ASPECTOS METODOLÓGICOS

En la primera parte de este trabajo, a partir de una recopilación de bibliografía y de algunas reflexiones individuales se completó una serie de consideraciones teóricas destinadas a caracterizar el período de transición entre las etapas elemental y avanzada de la enseñanza matemática. Nos adentraremos ahora en una segunda parte, que relacionada con la previa en cuanto la enmarca, se centra en la búsqueda de elementos que influyan positivamente en el aprovechamiento por parte de los estudiantes del período de transición. Dicha búsqueda se centra en el diseño de ciertas actividades destinadas a la recolección de datos experimentales y en el posterior análisis cualitativo de los mismos.

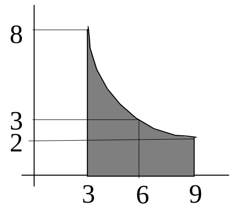
Podríamos decir que el diseño de la parte experimental posee un perfil exploratorio, descriptivo e interpretativo y responde a un modelo de elaboración emergente en el sentido que cada instrumento de recolección de datos fue diseñado sobre la base de la información recogida con el instrumento aplicado en la etapa anterior: comenzando por la reconsideración de algunas de las conclusiones a las que habíamos arribado en el contexto de un trabajo de investigación previo, vimos la necesidad de complementar ese estudio con datos recogidos mediante un nuevo cuestionario y luego, de enriquecer éstos con información proveniente de la realización de entrevistas.

III.1 La tesis de maestría

Como primer instrumento para la recolección de datos podríamos señalar el cuestionario diseñado en el marco de nuestro anterior trabajo de investigación: la tesis de maestría (Calvo, 1997). Este cuestionario fue propuesto en el curso 96-97 a dos grupos del Curso de Orientación Universitaria (C.O.U. opción Ciencias) de centros educativos situados en la provincia de Barcelona: los Institutos Joanot Martorell y Manuel Blancafort, que tenían 32 y 26 alumnos respectivamente.

En el presente trabajo presentaremos datos correspondientes a las respuestas recogidas con relación a uno de los ítems de este cuestionario:

> El área sombreada es mayor que 12 y menor que 48.
> ¿Por qué? ¿Puedes dar cotas más ajustadas?



En el marco de aquel trabajo se analizaron estas respuestas haciendo uso de redes sistémicas[1] que permitieron extraer conclusiones que recordaremos en el presente trabajo en la sección IV.1.1.

Había quedado pendiente en aquella oportunidad un cuestionamiento con relación a las diferencias que parecían mostrar los estudiantes allí encuestados en el tratamiento de cotas superiores e inferiores para el área sombreada. Este desafío puede considerarse la

---

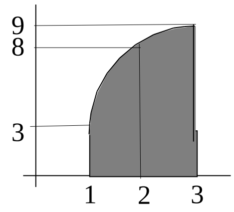
[1] En la sección 4.1.2.1 de la tesis de maestría (Calvo, 1997) se puede encontrar una descripción de este instrumento de análisis de datos basada en el trabajo de Bliss, Monk y Ogborn (1983).

motivación para el diseño de la segunda etapa de la parte experimental del presente trabajo.

III.2 El cuestionario

En los meses posteriores, ya de regreso en Montevideo, ideamos y aplicamos un cuestionario sobre la base de seis preguntas donde una de ellas (la número 6) coincide exactamente con la pregunta propuesta en el cuestionario de la tesis de maestría que reprodujimos más arriba y otra (la número 3) planteaba lo siguiente:

El área sombreada es mayor que 6 y menor que 18.
¿Por qué? ¿Puedes dar cotas más ajustadas?



Este cuestionario[2] fue aplicado a tres grupos de 6º año de Secundaria (opción Ingeniería)[3] dos de ellos, en el liceo Héctor Miranda y el otro, en el Instituto Crandon. El número de alumnos presentes en cada uno de esos grupos el día en que se pasó el cuestionario fue: 12, 14 y 21 respectivamente. En este caso, al igual que en el caso de la tesis de maestría los cuestionarios fueron propuestos por nosotras mismas que no poseíamos ningún tipo de vínculos con esos estudiantes, los cuales se sometieron voluntariamente a ser encuestados y a aportar sus datos personales, para que en caso de ser necesario se los contactara posteriormente.

Un primer análisis de las respuestas obtenidas en estas dos preguntas, realizado nuevamente usando redes sistémicas, permitió elaborar unas tablas de análisis que también aparecen en la sección IV.1 de las que se extrajo una segunda serie de conclusiones. En estas conclusiones se realizan nuevas consideraciones sobre el trabajo de los encuestados con cotas por exceso o defecto según la concavidad de la función y sobre su preferencia por presentar cotas lo más ajustadas posible.

III.3 Las entrevistas

La tercera etapa de recolección de datos consistió en una entrevista diseñada para profundizar en el estudio de las vinculaciones establecidas por los estudiantes entre la concavidad de una función positiva y las aproximaciones por defecto y por exceso del área bajo su gráfico, en vistas de las conclusiones mencionadas en el párrafo anterior.

De todas maneras, en vistas del objetivo de este trabajo, quisimos ir más allá de este dato y diseñamos un guión en que, girando alrededor de la temática de la concavidad y la aproximación de un área, nos permitiera averiguar cuestiones relacionadas con las actividades de definición y de justificación a partir de pruebas visuales, buscando

[2] Los datos recogidos a partir de las restantes cuatro preguntas (1, 2, 4 y 5) fueron finalmente desestimados para la parte experimental del presente trabajo, dado que la información que aportaban se alejaba de lo que más tarde delimitamos como objetivo de nuestro trabajo. Una copia del cuestionario propuesto, con sus seis preguntas, aparece en el Anexo VII.1.

[3] Tanto el Curso de Orientación Universitaria en España como el 6º año de Secundaria en Uruguay se corresponden con el doceavo año de escolarización y por tanto, el año inmediatamente anterior al ingreso a la Universidad, formando parte de la enseñanza no obligatoria.

también información sobre las relaciones que existen entre ambas actividades para estudiantes que acaban de ingresar a la etapa universitaria de sus estudios en Matemática. Esta profundización en la búsqueda de información nos requirió el uso de instrumento más adecuado para esos fines por lo que decidimos diseñar una entrevista muy exhaustiva sobre la temática, que aplicaríamos a un grupo reducido de estudiantes que estuvieran inmersos en el período de transición.

III.3.1 Perfil de los entrevistados

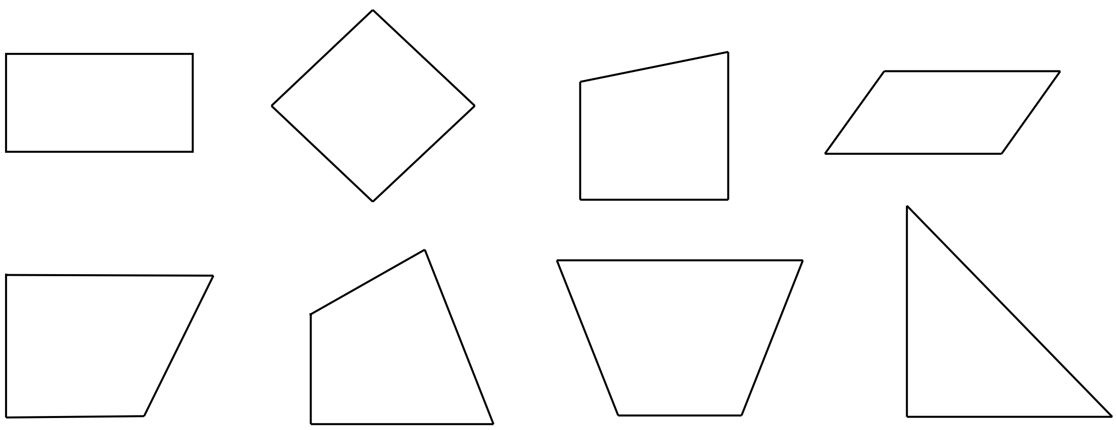
Los entrevistados fueron cinco estudiantes (3 hombres y 2 mujeres) cuyas edades oscilaban entre los 18 y 19 años. La selección de estas cinco personas fue realizada de la siguiente manera: se citó a los seis estudiantes de primer año de la Licenciatura de Matemática (en la Facultad de Ciencias de la Universidad de la República), que el año anterior habían realizado estudios en el nivel secundario (el resto, unos 30 estudiantes aproximadamente, habían hecho durante 1998 otros estudios universitarios o habiendo cursado el último año de Secundaria antes de 1998 no habían ingresado a la universidad ese año pues tenían pendiente la aprobación del examen de alguna asignatura); de las seis personas citadas una no aceptó ser entrevistada.

Las entrevistas, de poco más de una hora de duración, fueron realizadas a un mes de comenzados los cursos del primer semestre (abril de 1999), cuando aún no se habían tocado temas relacionados directamente con la entrevista (ni concavidad, ni integrales). Por otro lado, los estudiantes provenían de cinco institutos secundarios diferentes, donde, por los programas vigentes, habían tenido únicamente un primer curso de Cálculo Diferencial sin que el tema integrales estuviera contemplado.

III.3.2 Comentarios sobre el guión de la entrevista

Primera parte

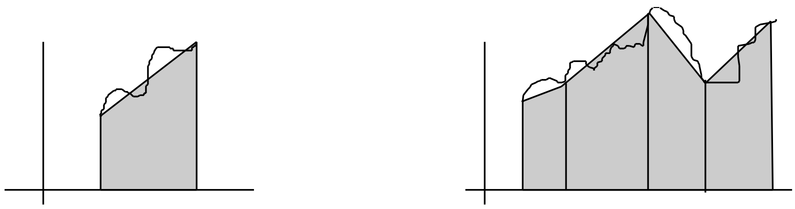
Para comenzar la entrevista pedimos a los entrevistados que definan rectángulo y trapecio, que den dos ejemplos y dos no-ejemplos de cada uno y que señalen cuáles de los siguientes figuras son trapecios:



Asignamos a cada una de estas figuras, una letra de la A a la H (de izquierda a derecha y de arriba a abajo) para poderlas identificar fácilmente en la trascripción de la entrevista.

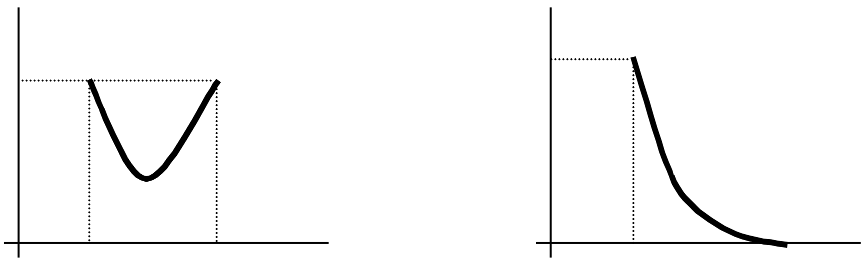
Segunda parte

Presentamos ante el entrevistado algunos métodos de aproximación del área entre el gráfico de una función positiva y el eje de abscisas. Comenzamos con el método trapezoidal (MT), y acompañamos las explicaciones verbales con el siguiente diagrama:



Luego, y con diagramas análogos, presentamos los métodos rectangulares usando la ordenada del extremo izquierdo de cada subintervalo (MR1), la ordenada del extremo derecho de cada subintervalo (MR2) y la del punto medio de cada subintervalo (MR_).

A continuación preguntamos al entrevistado: ¿Qué figura se usa, según el método trapezoidal con un solo intervalo en la base, para aproximar el área bajo las siguientes gráficas?

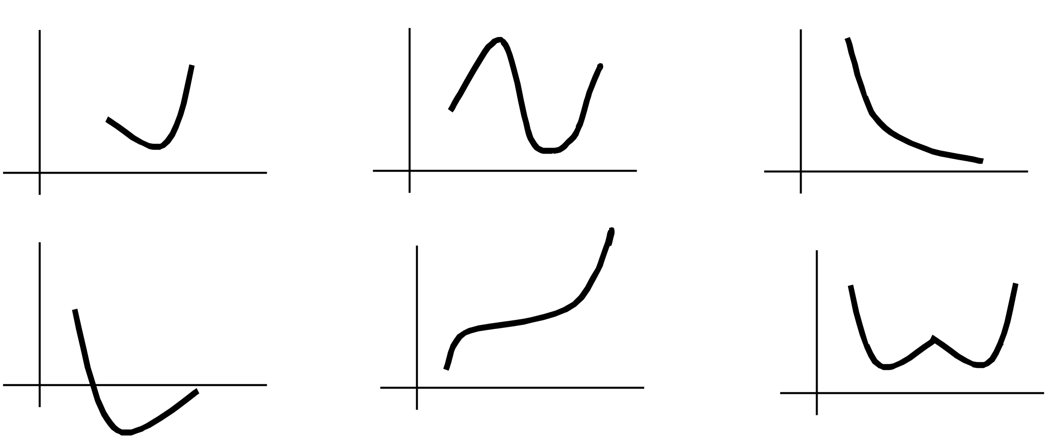


Tercera parte

Presentamos al entrevistado el enunciado de lo que será el “teorema 1”:
Para funciones positivas de concavidad positiva el método trapezoidal ofrece una aproximación por exceso del área bajo la gráfica

Y le hacemos las siguientes preguntas:

- ¿Cómo interpretas ese enunciado?
- ¿Qué quiere decir que una función tenga concavidad positiva?
- Dibuja algunos ejemplos de funciones de concavidad positiva.
- ¿Conoces otra definición de “función de concavidad positiva”? ¿Qué relación existe entre esas definiciones?
- ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen concavidad positiva?

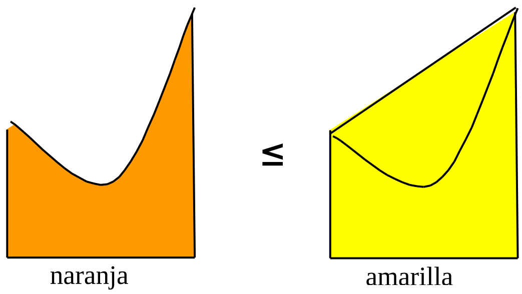


Por el tipo de antecedentes de los entrevistados (todos han completado el ciclo de enseñanza preuniversitaria que involucra un primer curso de Cálculo donde se enfatiza la representación gráfica de funciones a partir de su expresión analítica) se espera que todos ellos manejen la caracterización de funciones de concavidad positiva a partir del signo de su derivada segunda. Sin embargo, buscaremos que el entrevistado explicite algunas otras caracterizaciones que conozca, pues éstas le serán de mayor utilidad en lo sucesivo de la entrevista.

Consideramos que un repertorio amplio de ejemplos y no-ejemplos de funciones de concavidad positiva enriquecería las respuestas del entrevistado en lo que restaba de la entrevista. Al pedírsele que no sólo *construya* ejemplos y no-ejemplos sino que también los *identifique* entre una serie de funciones dadas gráficamente, pensamos en la eventualidad de que los casos construidos por el entrevistado fueran poco variados.

Cuarta parte

Ahora acompañamos el enunciado *“Para funciones positivas de concavidad positiva el método trapezoidal ofrece una aproximación por exceso del área bajo la gráfica”* con el siguiente diagrama:



Coloreamos las zonas sombreadas para facilitar la trascripción de las entrevistas.

Dado que el único texto que acompaña al diagrama es el enunciado del teorema, se requiere que el entrevistado interprete convenciones y otros implícitos gráficos aquí involucrados. Por ello lo primero que pedimos al entrevistado, luego de mostrarle el diagrama (tanto éste como los que aparecerán en las partes quinta y séptima), es que lo describa.

A continuación le pedimos su opinión sobre la validez de aquella prueba para el enunciado, a lo que agregamos dos nuevas preguntas:

- ¿Depende la prueba anterior de la figura elegida como ejemplo genérico de función positiva de concavidad positiva?
- ¿Qué sucede si en vez de considerar un solo intervalo en la base se toman varios?

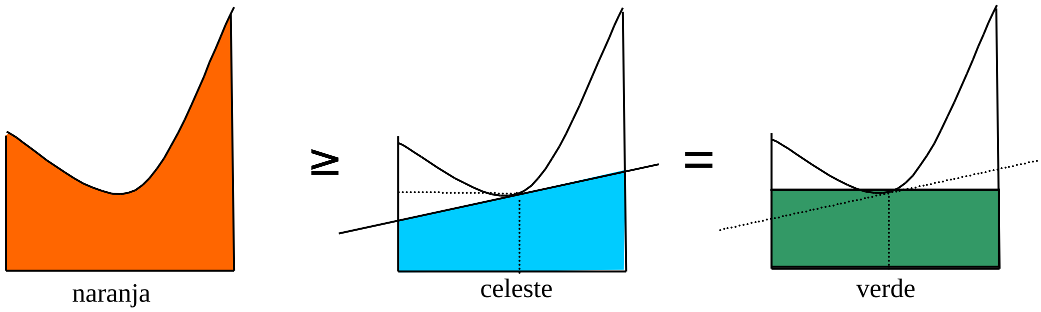
Vale comentar en el contexto de este teorema que la concavidad positiva de una función en un intervalo implica la continuidad en el interior de dicho intervalo, y ésta la posibilidad de hablar de “área bajo la gráfica”[4].

Quinta parte

Proponemos para ser analizados por el entrevistado, el siguiente enunciado y el respectivo diagrama:

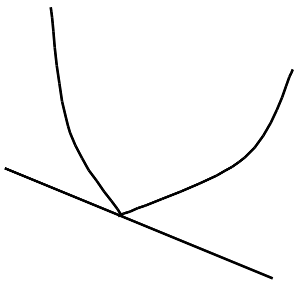
Para funciones positivas de concavidad positiva el método rectangular usando la ordenada del punto medio ofrece una aproximación por defecto del área bajo la gráfica

[4] Se puede encontrar una demostración de esta afirmación en Roberts & Varberg (1973).



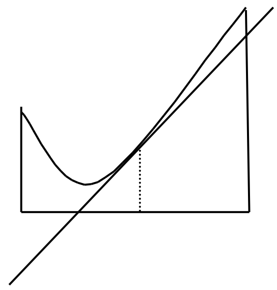
Lo que empezó siendo un descuido (la función graficada alcanza su mínimo en un punto muy cercano al punto medio) se convirtió luego, en algunas entrevistas, en una oportunidad para discutir la generalidad del diagrama y su relación con la validez de la prueba visual.

Otros comentarios para hacer a este respecto:



Dada la existencia de funciones de concavidad positiva en un intervalo que no son derivables en el interior del mismo (por ejemplo, la función valor absoluto), nada permite asegurar la existencia de la tangente en el punto medio. Sin embargo, la concavidad positiva permite asegurar la existencia de una recta de apoyo en todos los puntos del gráfico (o sea, una recta que pasando por ese punto deja a todo el gráfico encima de ella)[5], la cual podría remplazar sin inconvenientes a la tangente que aparece en la prueba visual que proponemos.

Aunque la función sea positiva con concavidad positiva y exista la recta tangente en el punto medio, puede suceder que dicha tangente junto con el eje de abscisas y las rectas paralelas al eje ordenadas, no determinen un trapecio como el que se considera en el diagrama de la prueba anterior. Este hecho cuestionaría la validez de la justificación, pero sucede que dicha prueba puede salvarse considerando un recta auxiliar paralela al eje de abscisas que sí permita considerar el trapecio.



Vale mencionar, a su vez, que este inconveniente no se presenta en la prueba del resultado análogo para funciones de concavidad negativa.

Sexta parte

Buscando que los entrevistados expliciten lo que consideran atributos relevantes e irrelevantes de las funciones de concavidad positiva, les planteamos las siguientes interrogantes:

- Para funciones de concavidad positiva ya vimos que el método trapezoidal aproxima por exceso y el método rectangular usando la ordenada del punto medio aproxima por defecto ¿Qué tipo de aproximación ofrece para funciones de concavidad positiva el método rectangular usando la primera ordenada? ¿Y usando la segunda ordenada?
- ¿En qué puntos de las pruebas anteriores se usa el dato acerca de la concavidad de la función?

---

[5] Una prueba de este resultado puede encontrarse en el capítulo 1 del libro de Roberts & Varberg (1973).

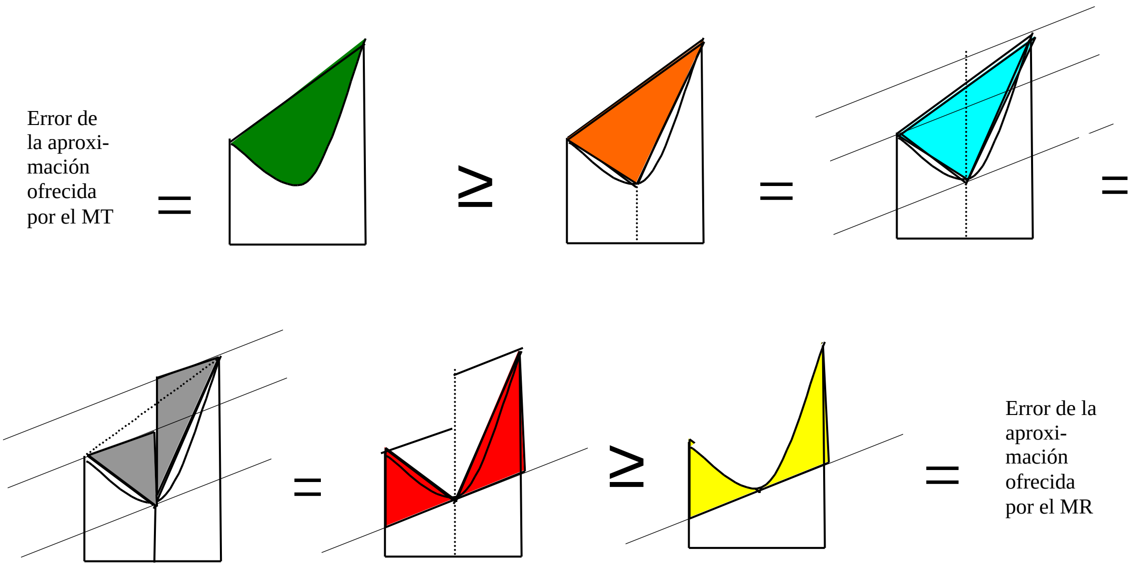
- ¿Qué podrías decir de las aproximaciones que ofrecen el método trapezoidal y el método rectangular usando la ordenada del punto medio cuando las funciones no tienen concavidad positiva?

También con estas preguntas, esperamos poder analizar la formulación, por parte del entrevistado, de conjeturas acerca de las aproximaciones brindadas por los distintos métodos planteados y la construcción de pruebas análogas para las funciones de concavidad negativa.

Séptima parte

Proponemos para ser analizados por el entrevistado, el siguiente enunciado y el respectivo diagrama:

Para funciones positivas de concavidad positiva el método trapezoidal ofrece una aproximación del área bajo la gráfica menos ajustada que la que ofrece el método rectangular usando la ordenada del punto medio



Los colores que utilizamos aquí fueron respectivamente: verde, naranja, celeste, gris, rojo y amarillo.

Guiamos mucho más de cerca la lectura de esta prueba visual que en las dos pruebas anteriores; la razón es que de otra manera, la lectura de ésta podría hacerse muy lenta y la entrevista ya llevaría a estas alturas casi una hora de duración.

El diagrama que presentamos como justificación del tercer teorema está basado en el que aparece en el libro “Proofs without words” en el que Nelsen (1993) presenta un amplio repertorio de pruebas visuales. Sin embargo, el diagrama que aquí presentamos no es exactamente el que aparece en ese libro, lo hemos modificado al agregarle un paso más en la cadena de desigualdades (el último de la primera fila) debido a ciertas dificultades de interpretación detectadas en unas entrevistas piloto que realizamos previamente. Este mismo diagrama inspira las pruebas visuales que presentamos para los dos primeros teoremas.

Tal como podemos apreciar en la descripción que acabamos de hacer del guión de la entrevista, ésta se encuentra organizada alrededor de la propuesta a los estudiantes de ciertas tareas que, en paralelo a la clasificación de situaciones didácticas que hicimos en la sección II.1.2, podríamos presentar en tres grupos:

- Tareas de acción: construcción e identificación de ejemplos, primero, de trapecios y luego, con mayor detenimiento, de funciones de concavidad positiva.
- Tareas de formulación: caracterización de conceptos, interpretación de enunciados y descripción de diagramas.
- Tareas de validación: justificación de relaciones de orden entre áreas dadas en el enunciado de los teoremas presentados y de relaciones establecidas por conjeturas de los propios encuestados.

La extensión y estructura del guión de la entrevista hacen previsible que el estudiante vaya incorporando información a lo largo de la misma, pero no será este aprendizaje el centro de nuestro análisis sino que lo será el comportamiento de los entrevistados frente a las actividades de definición y demostración.

III.3.3 Algunas consideraciones desde el punto de vista matemático

Luego de realizadas las entrevistas procedimos a trascribirlas (estas trascripciones aparecen en el Anexo VII.2). Terminada esta labor, aún antes de comenzar el análisis de los datos, sentimos la necesidad de hacer algunas consideraciones desde el punto de vista matemático sobre la equivalencia de diversas definiciones de función de concavidad positiva, sobre la suficiencia de algunas condiciones relacionadas con la derivada primera o segunda de la función y sobre demostraciones formales para los teoremas que aparecen en el guión de la entrevista. Esta reflexión sobre el contenido estrictamente algebraico de actividades que en el guión aparecen propuestas en su dimensión gráfica, nos sirvió luego para etiquetar las respuestas de los estudiantes durante su análisis y también para comparar las dimensiones gráfica y algebraica de las actividades propuestas.

III.3.4 Análisis de las entrevistas

Como ya se puede apreciar en el guión de la entrevista, nos habíamos propuesto centrar el análisis de las mismas en la respuesta a ciertas interrogantes, las cuales podemos subdividir en dos grupos: aquellas que indagan sobre la definición de los objetos involucrados y las que lo hacen sobre la justificación de las afirmaciones que aparecen en el guión.

A) Con relación a las definiciones

Aquí buscamos analizar cómo los entrevistados definen rectángulos y trapecios, cómo relacionan ambas definiciones (jerárquica o particionalmente) y si en los ejemplos que manejan son consistentes con dichas definiciones.
Luego, estudiaremos las caracterizaciones de función de concavidad positiva que aparecieron en la entrevista, atendiendo especialmente a las distintas condiciones necesarias y suficientes de concavidad positiva que maneja un mismo estudiante según la tarea a la que se enfrenta y las relaciones que establece entre ellas.
En tercer lugar, examinaremos los ejemplos y no-ejemplos de función de concavidad positiva que identifican o construyen los entrevistados.

B) Con relación a las pruebas

Aquí nuestro análisis consistirá en examinar cómo interpretan los entrevistados los enunciados propuestos, cómo leen los diagramas que aparecen en sus pruebas visuales, cómo verbalizan los argumentos visuales que involucran esas pruebas y cómo valoran el carácter genérico de los diagramas presentados.

Pasando a cuestiones directamente relacionadas a los teoremas dedicados a las aproximaciones brindadas por los métodos trapezoidal y rectangular, nos detendremos en las consideraciones realizadas por los estudiantes en cuanto a: la validez de las pruebas presentadas cuando los métodos se aplican en particiones del dominio de más de un intervalo, las adaptaciones que requieren los teoremas 1 y 2 cuando la concavidad de las funciones es negativa y la imposibilidad de conjeturar el tipo de aproximación dada por los métodos rectangulares que usan la ordenada del extremo derecho o del extremo izquierdo de cada subintervalo cuando se sabe únicamente que la concavidad de la función es positiva.

Lo cierto es que al comenzar a familiarizarnos con el contenido de las entrevistas a través de las primeras lecturas de las trascripciones, notamos la falta de dos ítems de análisis que había que agregar a las interrogantes que nos habíamos planteado desde un inicio. Uno de esos ítems corresponde a la clasificación de las funciones cuyas gráficas son rectas respecto a su concavidad. La intención aquí es la de analizar la consistencia entre el carácter jerárquico o particional de sus caracterizaciones de función de concavidad positiva y el repertorio de ejemplos que integra su esquema conceptual. El otro ítem, éste relacionado con las pruebas visuales, corresponde al análisis de la integración de los distintos aspectos del diagrama que son capaces de realizar los entrevistados para conformar en su conjunto una prueba: la justificación del enunciado que antecede al diagrama.

De esta forma quedaron establecidos doce ítems sobre la base de los cuales organizaríamos nuestro análisis, cuatro de ellos relacionados con interrogantes sobre las definiciones y los ocho restantes relacionados con interrogantes sobre las pruebas:

A1. Sobre las definiciones de rectángulo y trapecio
A2. Sobre las caracterizaciones de función de concavidad positiva.
A3. Sobre ejemplos y no-ejemplos de función de concavidad positiva.
A4. Sobre la clasificación de funciones que tienen por gráfico una recta como ejemplos o no-ejemplos de función de concavidad positiva.

B1. Sobre la interpretación de los enunciados.
B2. Sobre la lectura de los diagramas involucrados en las pruebas visuales.
B3. Sobre la verbalización de los argumentos visuales requeridos en las pruebas que aparecen en las entrevistas.
B4. Sobre la consideración de los diagramas involucrados en las pruebas visuales como ejemplos genéricos.
B5. Sobre el carácter global de los diagramas que aparecen en las pruebas visuales.
B6. Sobre la validez de la prueba del primer teorema independientemente del número de intervalos en que se aplique el método trapezoidal
B7. Sobre la modificación de hipótesis en los dos primeros teoremas
B8. Sobre las conjeturas acerca de las aproximaciones brindadas por los métodos rectangulares para funciones de concavidad positiva.

Habiendo definido estos ítems de análisis procedimos a seleccionar en la trascripción de cada una de las entrevistas aquellos párrafos que de alguna manera respondían a nuestras doce interrogantes. Como nuestro interés no pasaba tanto por estudiar categorías de estudiantes sino por analizar cómo éstos realizaban ciertas tareas, creímos más adecuado reorganizar la selección de extractos de entrevistas según el ítem de análisis al que estaban asociados. De esta manera fueron resaltando algunos aspectos comunes y otros que contrastaban entre los distintos entrevistados, y se nos mostró una enorme riqueza de situaciones entre las recabadas por las cinco entrevistas.

En la sección IV.3, donde presentamos los resultados del análisis de las entrevistas, después de la selección de extractos correspondientes a cada uno de los doce ítems, presentamos un apartado donde, bajo el título de “Consideraciones finales”, destacamos los aspectos más relevantes relacionados con el ítem estudiado. Las cuestiones destacadas en estos apartados que, a nuestro parecer, resultaban a su vez más relevantes y con mayor proyección en cuanto a los objetivos de nuestro trabajo, fueron recogidas en dos secciones: “Conclusiones del análisis con relación a las definiciones” y “Conclusiones del análisis con relación a las pruebas”. A continuación de cada una de estas series de conclusiones, presentamos unos cuadros donde se muestra una última reducción de los datos analizados.

IV. PARTE EXPERIMENTAL: ANÁLISIS DE LOS DATOS

En este cuarto capítulo procederemos al análisis de los datos cuya recolección hemos relatado en el capítulo anterior. Al comienzo, trataremos de explicar por qué nos inclinamos por estudiar cuestiones relacionados con la concavidad de una función, rescatando algunos datos, análisis y conclusiones de la tesis de maestría y agregando a éstos nuevos datos recogidos mediante un cuestionario diseñado especialmente para este trabajo. Presentaremos luego el análisis detallado de las entrevistas, precedido por el planteo de algunas consideraciones sobre distintas caracterizaciones de funciones de concavidad positiva y sobre demostraciones analíticas de los tres teoremas de aproximación del área bajo el gráfico de funciones de concavidad positiva que aparecen justificados visualmente en el guión de la entrevista.

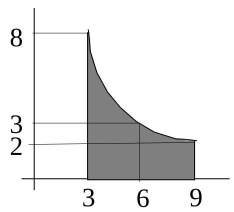
IV.1 Análisis de los cuestionarios

Como decíamos en el párrafo anterior, estudiaremos aquí la respuesta a dos preguntas presentadas en el marco de dos cuestionarios propuestos en épocas y a poblaciones también diferentes.

IV.1.1 Datos provenientes de la tesis de maestría

El interés por analizar la concavidad de las funciones vinculada a las actividades de acotación del área bajo un gráfico proviene de un trabajo anterior: la tesis de maestría (Calvo, 1997), en cuya parte experimental habíamos aplicado un cuestionario en el que aparecía la siguiente pregunta:

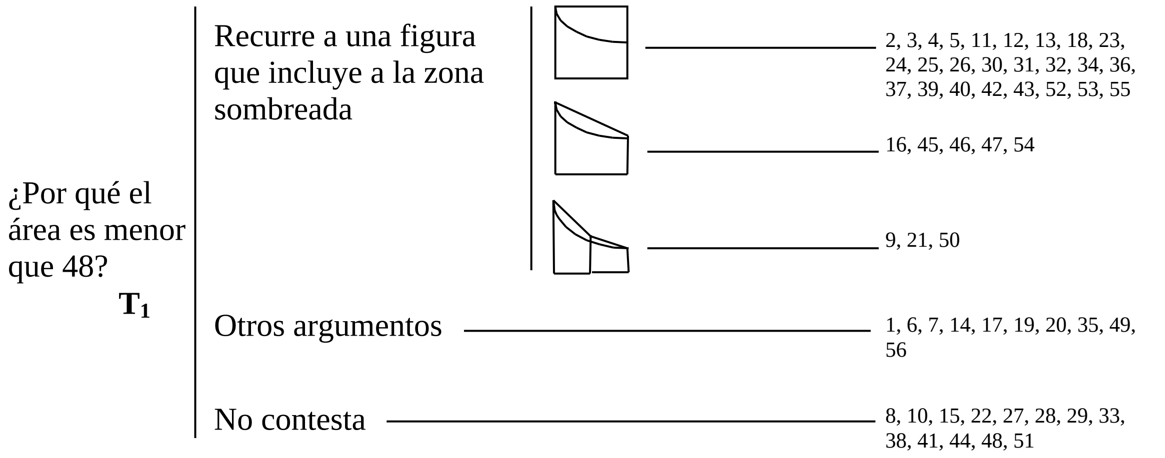
El área sombreada es mayor que 12 y menor que 48.
¿Por qué? ¿Puedes dar cotas más ajustadas?

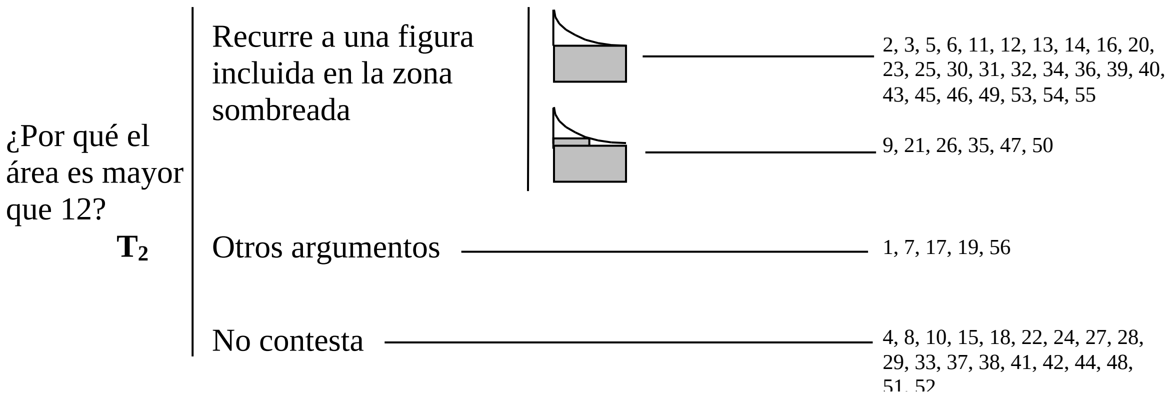


Tal como explicamos en la sección dedicada a los aspectos metodológicos, la información recogida en oportunidad de la tesis de maestría la habíamos presentado usando redes sistémicas. Para el presente trabajo no nos interesó toda la variedad de respuestas allí discriminadas sino que quisimos centrarnos en la elección de las figuras que los estudiantes vinculan por inclusión con la zona sombreada; por ese motivo decidimos afinar la definición de algunas categorías, reagrupando otras. También vale mencionar que repasamos la adecuación de las redes de la tesis de maestría a los datos que surgían de los cuestionarios, y teniendo en cuenta la variación de nuestro centro de interés, surgió la conveniencia de reubicar las respuestas de unos pocos estudiantes.

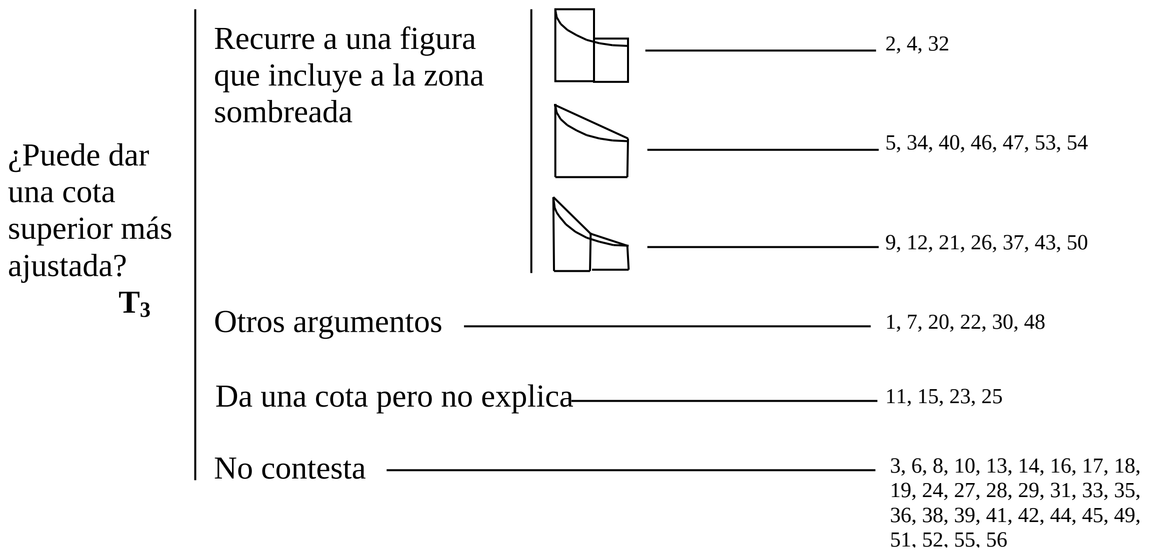
Intentaremos aquí resumir la información recogida en aquella oportunidad con relación a esta pregunta. Para ello dividiremos las respuestas dadas por los encuestados en cuatro tareas: $\mathbf{T_1}$: justificación de la cota superior dada, $\mathbf{T_2}$: justificación de la cota inferior dada, $\mathbf{T_3}$: mejoramiento de la cota superior dada y $\mathbf{T_4}$: mejoramiento de la cota inferior dada.

He aquí las redes sistémicas correspondientes a la justificación de cotas[1]:



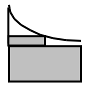


Las que siguen son las redes correspondientes al mejoramiento de cotas



[1] En las redes aparecen numerados del 1 al 32 los alumnos que pertenecían a uno de los grupos, y numerados del 33 al 56 los alumnos del otro grupo. Bajo la etiqueta "Otros argumentos" incluimos todas aquellas respuestas que no se basan en el uso de argumentos de inclusión de figuras (ej.: dan un valor aproximado del área y aumentando o disminuyendo ese valor consideran que están obteniendo cotas)

¿ Puede dar una cota inferior más ajustada?
T_4

Recurre a una figura incluida en la zona sombreada  — 2, 3, 9, 21, 23, 26, 32, 34, 35, 43, 47, 50, 53

Otros argumentos — 1, 5, 7, 22, 48, 54

Da una cota pero no explica — 11, 12, 15, 25, 37, 40, 46

No contesta — 4, 6, 8, 10, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 27, 28, 29, 30, 31, 33, 36, 38, 39, 41, 42, 44, 45, 49, 51, 52, 55, 56

En el siguiente cuadro resumiremos más aún la información incluida en las redes anteriores. Para ello presentaremos una tabla en la que colorearemos la celda de gris cuando el encuestado use rectángulos relacionados por inclusión con la figura sombreada[2] para realizar la tarea y de negro cuando use trapecios no rectangulares relacionados por inclusión con la figura[3]. Las celdas que no son coloreadas corresponden a situaciones en las que el alumno: no contesta, no se puede clasificar su respuesta o para darla no se basa en el uso de argumentos de inclusión entre figuras.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
T_1																												
T_2																												
T_3																												
T_4																												

	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
T_1																												
T_2																												
T_3																												
T_4																												

Se puede observar aquí que:

- De los 56 estudiantes encuestados: 32 pueden justificar, mediante argumentos de inclusión, la cota inferior dada y 33 pueden hacerlo con la cota superior. Son 27 estudiantes los que justifican así las dos cotas dadas.
  - Para justificar la cota superior 8 encuestados recurren al MT, los restantes 25 estudiantes lo hacen usando el MR. Para justificar la cota inferior recurriendo a una

[2] En lo sucesivo a esta estrategia la identificaremos como "método rectangular", al que pasaremos a abreviar: MR. Con $MR1_j$ indicaremos que se usan j subintervalos en la base y que los rectángulos tienen por altura la ordenada en el extremo izquierdo de cada subintervalo. Con $MR2_j$ la única variación es que la altura de los rectángulos es ahora la ordenada en el extremo derecho de cada subintervalo.
[3] A esta estrategia la identificaremos como "método trapezoidal", al que pasaremos a abreviar: MT, o MT_j si queremos destacar que se aplica tomando j subintervalos en la base.

figura incluida en la zona sombreada, los 32 estudiantes usan rectángulos con altura la ordenada mínima en el intervalo (en este caso: $MR2_1$ o $MR2_2$)

- Entre los estudiantes que justifican las dos cotas, 19 usan en ambos casos el MR y los otros 8 usan el MR para la cota inferior y el MT para la cota superior.

o Entre los encuestados: 13 estudiantes logran, basándose en la inclusión de figuras, ajustar la cota inferior y 17 logran hacerlo con la cota superior. Son 10 estudiantes los que mejoran las dos cotas dadas.

- Para ajustar la cota superior solamente 3 estudiantes usan el MR frente a 14 que usan el MT. Los 13 estudiantes que ajustan la cota inferior recurren al $MR2_2$.
- Entre los que mejoran ambas cotas: 2 usan exclusivamente el MR y los otros 8 usan el MR para ajustar la cota inferior y el MT para ajustar la cota superior.

Tarea	Sobre 56 encuestados, la realizan invocando argumentos de inclusión de figuras:
T_1	33 estudiantes (25 con $MR1_1$, 5 con MT_1 y 3 con MT_2)
T_2	32 estudiantes (26 con $MR2_1$ y 6 con $MR2_2$)
T_3	17 estudiantes (3 con $MR1_2$, 7 con MT_1 y 7 con MT_2)
T_4	13 estudiantes (todos con $MR2_2$)

Cuando en la tesis de maestría se analizó este ítem del cuestionario, se comentaba:

"En este ítem 33 estudiantes justifican la cota inferior que se les ofrece como dato (30 de ellos[4] *usando argumentos del tipo* $A \quad B \quad á(A) \leq á(B)$*) y 38 estudiantes justifican la cota superior (31 de ellos usando argumentos de inclusión). Al pedir cotas más ajustadas, se aprecia en el trabajo de los estudiantes la existencia de algunas diferencias cualitativas que, en un principio, se pueden atribuir al hecho de que la función aquí representada tiene concavidad positiva y que por tanto, permite acotar superiormente su área con un trapecio de manera más ajustada que con un rectángulo.*

Para el caso de la cota superior[5]*, de los 15 que ubican la región sombreada dentro de otra a la que calculan el área, sólo 3 presentan una región formada por la unión de rectángulos"*

Entre las primeras conclusiones que se extraían del análisis de este cuestionario se comentaba:

"Parecería que el tratamiento para cotas inferiores y superiores no es análogo. En el caso particular de regiones definidas bajo un gráfico parece ser relevante la concavidad de la función en el momento de decidir si las figuras a ubicar dentro o fuera de la región serán rectángulos o trapecios"

Quedaba planteada así la necesidad de intentar explicar, en un futuro trabajo, las diferencias en el tratamiento de cotas superiores e inferiores que parecían mostrar los estudiantes encuestados en aquella oportunidad.

[4] Algunas de estas cifras se ven modificadas hoy por la revisión que realizamos del vaciado del cuestionario.

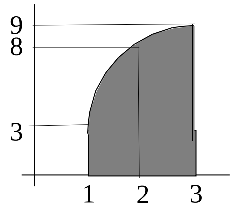
[5] Nos referíamos al mejoramiento de la cota superior.

IV.1.2 Nuevos datos

Algunos meses más tarde se propuso un cuestionario[6] donde aparecían dos preguntas relacionadas con el tema:

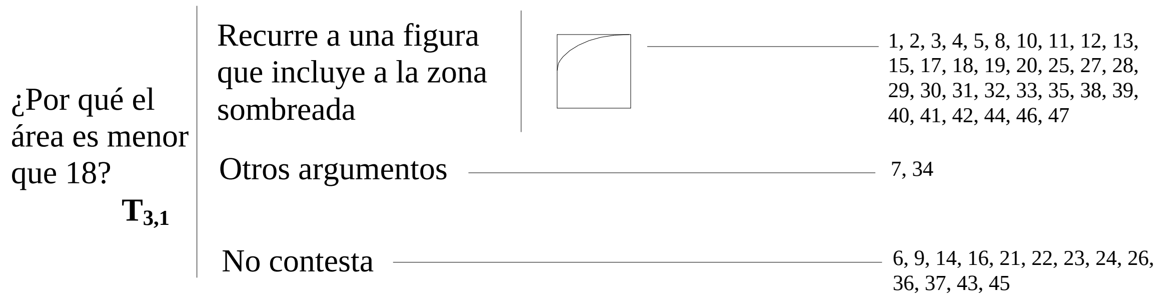
Pregunta 3: El área sombreada es mayor que 6 y menor que 18.

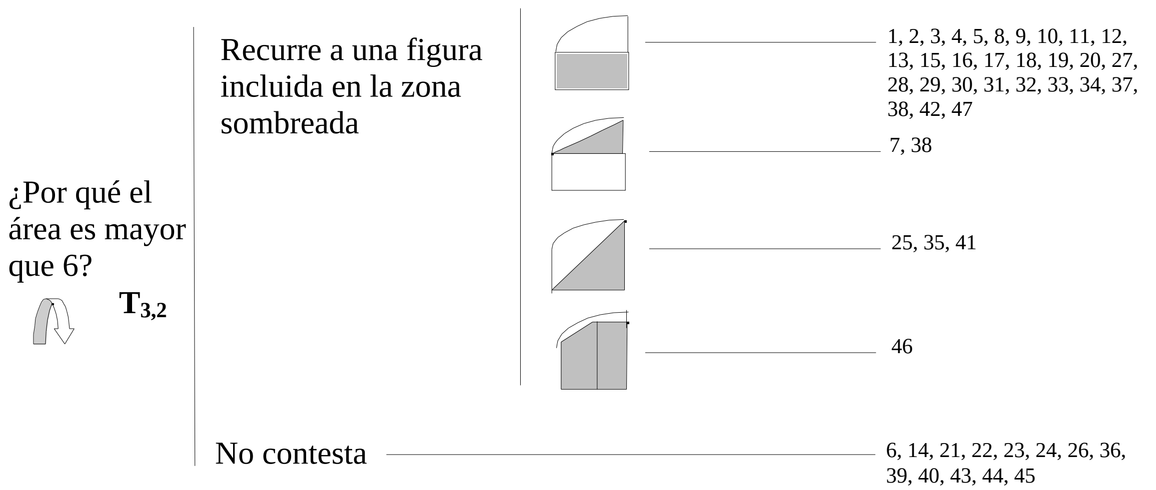
¿Por qué? ¿Puedes dar cotas más ajustadas?



Pregunta 6: Esta pregunta coincide exactamente con la pregunta propuesta en el cuestionario de la tesis de maestría.

En lo que sigue usamos la notación $T_{j,i}$ para representar a la tarea *i* realizada con relación a la pregunta *j*. Presentamos las redes correspondientes a la justificación de cotas[7], en primer término para el caso de la pregunta 3:





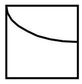
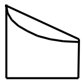
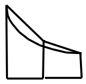
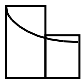
---

[6] Vale recordar lo ya mencionado en la sección dedicada a los aspectos metodológicos acerca de las muy diferentes características de los grupos a los que se propuso este cuestionario con respecto a las de los grupos a los que se había propuesto el cuestionario de la tesis de maestría.

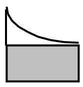
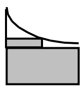
[7] En las redes aparecen numerados del 1 al 21 los alumnos que pertenecían a uno de los grupos, numerados del 22 al 33 los alumnos de otro de los grupos y del 33 al 56 los alumnos del tercer grupo.

Es el turno ahora de las redes correspondientes a la justificación de cotas para el caso de la pregunta 6:

¿Por qué el área es menor que 48? **$T_{6,1}$**

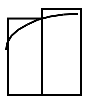
- Recurre a una figura que incluye a la zona sombreada
  -  — 1, 3, 4, 5, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 25, 28, 31, 32, 33, 40, 42, 45, 46, 47
  -  — 27, 38, 41
  -  — 7, 35, 43
  -  — 29
- No contesta — 2, 6, 9, 14, 16, 21, 22, 23, 24, 26, 30, 34, 36, 37, 39, 44

¿Por qué el área es mayor que 12? **$T_{6,2}$**

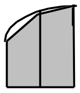
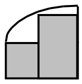
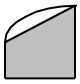
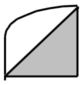
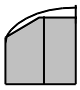
- Recurre a una figura incluida en la zona sombreada
  -  — 1, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 25, 27, 28, 29, 31, 32, 33, 38, 40, 42, 45, 47
  -  — 35, 41, 43, 46
- No contesta — 2, 6, 9, 14, 16, 21, 22, 23, 24, 26, 30, 34, 36, 37, 39, 44

Las siguientes son las redes correspondientes al mejoramiento de cotas para el caso de la pregunta 3:

¿Puede dar una cota superior más ajustada? **$T_{3,3}$**

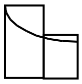
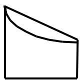
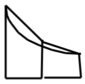
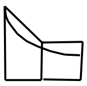
- Recurre a una figura que incluye a la zona sombreada
  -  — 2, 3, 6, 15, 18, 20, 21, 37, 39, 40, 41, 42
- Otros argumentos — 11, 24, 27, 29, 31, 32, 36, 45, 47
- Da una cota pero no explica — 13, 17, 43, 46
- No contesta — 1, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 19, 22, 23, 25, 26, 28, 30, 33, 34, 35, 38, 44

¿ Puede dar una cota inferior más ajustada? $T_{3,4}$

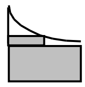
- Recurre a una figura incluida en la zona sombreada
  -  — 2, 3, 6, 15, 16, 20, 21, 26, 27, 30, 40
  -  — 18, 39, 42
  -  — 19, 34, 35, 41, 44
  -  — 25, 31, 35
  -  — 12, 46
- Otros argumentos — 8, 11, 24, 29, 32, 36, 43, 45, 47
- Da una cota pero no explica — 1, 13, 17
- No contesta — 4, 5, 7, 9, 10, 14, 22, 23, 28, 33, 37, 38

Por último, presentamos las redes correspondientes al mejoramiento de cotas para el caso de la pregunta 6:

¿Puede dar una cota superior más ajustada? $T_{6,3}$

- Recurre a una figura que incluye a la zona sombreada
  -  — 17, 18, 25, 40, 42
  -  — 3, 9, 10, 30, 31, 38
  -  — 2, 6, 7, 8, 11, 15, 16, 20, 21, 27, 35, 41, 43
  -  — 46
- Otros argumentos — 1, 14, 19, 22, 24, 26, 29, 32, 44, 45
- Da una cota pero no explica — 12, 13
- No contesta — 4, 5, 23, 28, 33, 34, 36, 37, 39, 47

¿ Puede dar una cota inferior más ajustada?
$T_{6,4}$

- Recurre a una figura incluida en la zona sombreada  — 2, 6, 8, 10, 15, 16, 18, 20, 21, 25, 27, 31, 35, 40, 41, 42, 43, 46
- Otros argumentos — 1, 14, 19, 22, 24, 26, 29, 32, 44, 45
- Da una cota pero no explica — 3, 9, 11, 12, 13, 17
- No contesta — 4, 5, 7, 23, 28, 30, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 47

Y los cuadros[8] correspondientes al análisis de estas preguntas son los siguientes:

Grupo 1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
$T_{3,2}$																					
$T_{6,1}$																					
$T_{3,1}$																					
$T_{6,2}$																					
$T_{3,4}$																					
$T_{6,3}$																					
$T_{3,3}$																					
$T_{6,4}$																					

Grupo 2	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33
$T_{3,2}$												
$T_{6,1}$												
$T_{3,1}$												
$T_{6,2}$												
$T_{3,4}$												
$T_{6,3}$												
$T_{3,3}$												
$T_{6,4}$												

Grupo 3	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
$T_{3,2}$														
$T_{6,1}$														
$T_{3,1}$														
$T_{6,2}$														
$T_{3,4}$														
$T_{6,3}$														
$T_{3,3}$														
$T_{6,4}$														

Realicemos unos primeros comentarios respecto a este análisis:

[8] Vale aclarar que en los próximos cuadros bajo la etiqueta MT hemos incluido, además de los casos usuales de aplicación de este método (ya sea con uno o dos subintervalos en la base), los casos en que se usa el MT en un subintervalo de la base y el MR en el otro y también los casos en que incluyen un triángulo en la figura (aunque reconocemos que puede ser discutible identificar con esta estrategia las respuestas de los encuestados 25, 35 y 41 en la tarea $T_{3,2}$ o de los encuestados 25, 31 y 35 en la tarea $T_{3,4}$).

- De las celdas que están en blanco, aproximadamente el 68% corresponden a alumnos que no contestan, 9% corresponden a respuestas en las que se dan valores más ajustados para las cotas pero sin acompañarlos de ninguna explicación de cómo llegaron a esos números y 23% corresponden a respuestas basadas en propiedades figurales del diagrama (por ejemplo: asumen que la curva es un cuarto de circunferencia) que los induce a calcular o aproximar el área sombreada.

- Respecto a las tareas de justificación de las cotas dadas:

  - De los 47 estudiantes encuestados:
    - 32 estudiantes justifican la cota superior dada cuando la función tiene concavidad negativa usando el área de una figura relacionada por inclusión con la zona sombreada. Son 31 los que justifican de esa forma la cota inferior dada cuando la función tiene concavidad positiva. Y son 28 los estudiantes que justifican ambas cotas.
    - 34 estudiantes justifican la cota inferior dada cuando la función tiene concavidad negativa y 31 justifican la cota superior dada cuando la función tiene concavidad positiva. Son 28 los estudiantes que justifican ambas cotas.
    - Son 27 estudiantes los que justifican las cuatro cotas dadas.

  - Entre los estudiantes que justifican la cota inferior en el caso de concavidad negativa: 6 usan el MT y entre los que justifican la cota superior dada cuando la función tiene concavidad positiva: 6 son los que usan el MT (4 estudiantes usan el MT en ambos casos)

  - Todos los estudiantes que justifican la cota superior cuando la concavidad es negativa o la inferior cuando es positiva, hacen uso del MR.

  - Entre los que justifican las cuatro cotas dadas: 6 involucran trapecios o triángulos en alguna de esas justificaciones y el resto lo hace utilizando exclusivamente rectángulos.

- Respecto a las tareas de mejoramiento de las cotas dadas:

  - Entre los encuestados:
    - 12 estudiantes logran ajustar la cota superior dada en el caso de la función de concavidad negativa y 18 mejoran la cota inferior dada cuando la función tiene concavidad positiva (son 9 los estudiantes que mejoran estas dos cotas).
    - 23 estudiantes logran ajustar la cota inferior dada en el caso de la función de concavidad negativa y 25 mejoran la cota superior dada cuando la función tiene concavidad positiva (son 17 los estudiantes que mejoran estas dos cotas).
    - Son 9 estudiantes los que mejoran las cuatro cotas dadas.

  - Para ajustar la cota inferior en el caso de concavidad negativa, 3 estudiantes usan exclusivamente el MR con dos subintervalos en la base, frente a 20 estudiantes que usan trapecios (5 aplican el MT en [3,9], 2 usan un triángulo de base el intervalo [3,9], 11 usan el MT aplicándolo en dos subintervalos por separado: [3,6] y [6,9] y 2 lo usan en [3,6] mientras usan el MR en [6,9]).

Para ajustar la cota superior en el caso de concavidad positiva, 5 estudiantes usan exclusivamente el MR con dos subintervalos en la base, frente a 20 estudiantes que usan el MT (6 lo aplican en [1,3], 13 lo usan aplicándolo en dos subintervalos por separado: [1,2] y [2,3] y 1 lo usa en [1,2] mientras usa el MR en [2,3]).

- Entre los que mejoran las cuatro cotas: 2 usan exclusivamente MR, 1 usa el MT sólo en la tarea $T_{3,4}$ y los otros 6 usan el MT en la cota inferior de la función de concavidad negativa y en la superior de la función de concavidad positiva.

Resumiendo:

Tarea	En la pregunta 3, sobre 47 encuestados, trabajan invocando argumentos de inclusión de figuras:
$T_{3,2}$	34 estudiantes (29 con $MR1_1$)
$T_{3,1}$	32 estudiantes (todos con $MR2_1$)
$T_{3,4}$	23 estudiantes (3 con $MR1_2$, 5 con MT_1, 11 con MT_2)
$T_{3,3}$	12 estudiantes (todos con $MR2_2$)

Tarea	En la pregunta 6, sobre 47 encuestados, trabajan invocando argumentos de inclusión de figuras:
$T_{6,1}$	31 estudiantes (24 con $MR1_1$, 1 con $MR1_2$, 3 con MT_1 y 3 con MT_2)
$T_{6,2}$	31 estudiantes (27 con $MR2_1$ y 4 con $MR2_2$)
$T_{6,3}$	25 estudiantes (5 con $MR1_2$, 6 con MT_1, 13 con MT_2)
$T_{6,4}$	18 estudiantes (todos con $MR2_2$)

Algunas conclusiones en cuanto a la elección, por parte de los estudiantes, de métodos para acotar el área bajo el gráfico de funciones positivas de concavidad positiva o negativa definidas en intervalos cerrados y acotados:

1. Como "una función es de concavidad positiva si y sólo si su opuesta es de concavidad negativa" y "un número es cota superior de una función si y sólo si el opuesto del número es cota inferior de la función opuesta", desde un punto de vista matemático las tareas $T_{3,4}$ y $T_{6,3}$ son equivalentes entre sí[9], al igual que lo son las tareas $T_{3,3}$ y $T_{6,4}$, las tareas $T_{3,1}$ y $T_{6,2}$ y las tareas $T_{3,2}$ y $T_{6,1}$

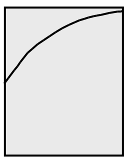
   Frente a las tareas que involucran acotar superiormente el área bajo la gráfica cuando la función es de concavidad positiva ($T_{6,1}$ y $T_{6,3}$), las respuestas de los alumnos son comparables a las que presentan frente a las tareas que involucran acotarla inferiormente cuando la concavidad de la función es negativa ($T_{3,2}$ y $T_{3,4}$). También son comparables sus respuestas con relación a las cotas inferiores en el

[9] Como dirá una de las entrevistadas en el contexto de otra de las instancias de recolección de datos para el presente trabajo, respecto a las funciones de concavidad negativa: *"es como si a una de concavidad positiva la miraras al revés"*, apoyándose en lo cual transfiere una condición necesaria de concavidad positiva en una equivalente para concavidad negativa.

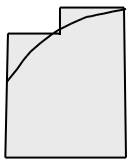
caso de funciones de concavidad positiva y a las cotas superiores cuando la concavidad es negativa.

2. Para mejorar la cota superior dada en el caso de concavidad negativa ($T_{3,3}$), al ser la función creciente, los estudiantes podían usar el MR tomando dos subintervalos en la base y como alturas las segundas ordenadas ($MR2_2$). Para mejorar la cota inferior dada en el caso de concavidad positiva ($T_{6,4}$), como la función es decreciente, también podían usar el MR tomando dos subintervalos en la base y como alturas las segundas ordenadas ($MR2_2$). En realidad, esta estrategia para mejorar esas dos cotas era la única disponible con la información que se suministraba (única, a menos que se considere una figura ubicada, según la relación de inclusión, en medio de la considerada por $MR2_2$ y la considerada por $MR2_1$).

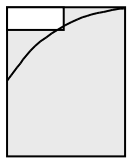
   Ilustremos esta reflexión en el contexto de la tarea $T_{3,3}$: la cota superior dada coincidía con el área del rectángulo considerado por $MR2_1$ y se trataba de encontrar una figura que incluyendo a la región bajo el gráfico tuviera un área menor que la cota dada:



$MR2_1$ brinda la cota superior dada por el enunciado



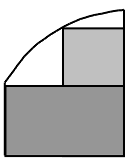
$MR2_2$ brinda una cota superior más ajustada



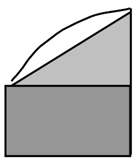
Las otras figuras que pueden brindar cotas superiores mejores que la dada por $MR2_1$ sólo pueden pasar por considerar parte de ese rectangulito en la esquina superior izquierda

   Sin embargo, era más amplia la variedad de estrategias disponibles para mejorar la cota superior en el caso de concavidad positiva ($T_{6,3}$) y la inferior en el caso de concavidad negativa ($T_{3,4}$).

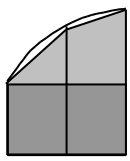
   Por ejemplo, para la tarea $T_{3,4}$, el estudiante podía recurrir al MR1 con dos intervalos o al MT con uno o dos intervalos en la base:



$MR1_2$

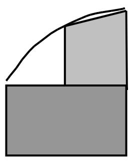


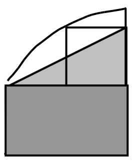
MT_1

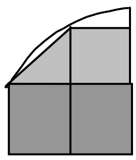


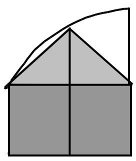
MT_2

   También podía recurrir a cualquier otra figura incluida en las figuras que estos métodos consideran, mientras que supere al valor dado por $MR1_1$. Por ejemplo:









U otras figuras que, incluidas en MT_2, incluyan a $MR1_1$

El incluir la figura usada por $MR1_1$ nos permite asegurar que el área de estas figuras mejorará la cota inferior dada (que coincide con el área del rectángulo usado por $MR1_1$) sin recurrir a los valores funcionales concretos dados en el contexto de la pregunta 3, sino haciendo uso exclusivo de los atributos de las funciones crecientes de concavidad negativa. Sin embargo, dado que el enunciado de la pregunta 3 brinda algunos valores funcionales, éstos pueden ser utilizados para obtener una figura incluida en la región bajo el gráfico de la función, que sin incluir al rectángulo usado por $MR1_{1,}$ su área supere al valor de la cota inferior que hay que mejorar. Como ejemplos de esta estrategia podemos señalar las respuestas de los estudiantes 25, 31 y 35 que aparecen en la red sistémica correspondiente a la tarea $T_{3,4}$, o la consideración, entre muchas figuras posibles, del rectángulo $[2,3]\times[0,8]$.

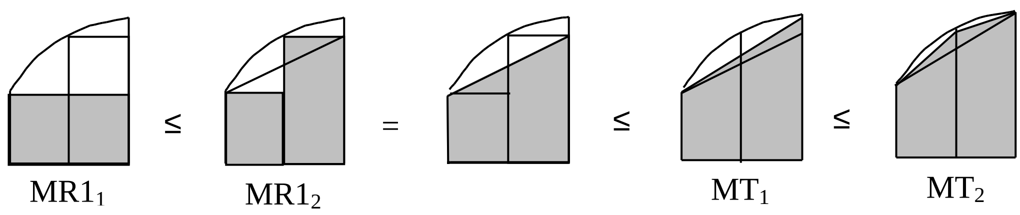
En el mismo sentido que señalan estas consideraciones acerca del número de estrategias disponibles, parecería que los encuestados encontraron menos dificultades para mejorar la cota inferior para la función de concavidad negativa ($T_{3,4}$) que para mejorar la cota superior dada ($T_{3,3}$) (23 alumnos responden a la primera tarea mientras que sólo 12 hicieron lo propio en el caso de la segunda tarea).

En lo que consideramos una tarea análoga, el caso de la función de concavidad positiva, la diferencia de desempeño frente a unas y otras cotas no es tan marcada como en el caso de concavidad negativa pero sigue la misma tendencia (25 alumnos responden a la tarea $T_{6,3}$ mientras que 18 hicieron lo propio en el caso de la tarea $T_{6,4}$).

Así mismo, son 17 los entrevistados que mejoran la cota inferior cuando la concavidad es negativa y la superior cuando la concavidad es positiva ($T_{3,4} \cap T_{6,3}$) y son 9 los entrevistados que lo hacen con la cota superior cuando la concavidad es negativa y la inferior cuando la concavidad de positiva ($T_{3,3} \cap T_{6,4}$). No es menor el dato de que los 9 entrevistados mencionados en segundo término están incluidos entre los 17 mencionados antes.

3. Como ya vimos, cuando la función es creciente y tiene concavidad negativa (como en el caso de la pregunta 3), el MT_1 y el $MR1_1$ dan ambos cotas inferiores para el área bajo el gráfico, siendo el MT_1 más ajustado que el $MR1_1$. Pero además, si se consideran dos subintervalos iguales (la información dada por el cuestionario sólo permite tomar dos subintervalos iguales en la base) y se les aplica el MR1, la cota inferior obtenida es menos ajustada que la dada por el MT con el intervalo sin partir.

   O sea, el área obtenida por el $MR1_1$ es la cota inferior dada en el enunciado del problema y el área obtenida por el $MR1_2$ es una cota inferior más ajustada para el área bajo el gráfico. Sin embargo se puede ir más allá: el número dado por el MT_1 es una cota aún más ajustada y el dado por el MT_2 todavía más. Veamos una justificación, en el tono de otras presentadas en este trabajo, para esta afirmación.



El análisis anterior se puede trasladar a funciones decrecientes de concavidad positiva con las modificaciones del caso.

Parecería que los alumnos prefieren el uso de trapecios para el ajuste de cotas inferiores en funciones de concavidad negativa (19 en 22) y superiores en funciones de concavidad positiva (20 en 25) frente al uso del MR. Esta tendencia de los alumnos a buscar cotas lo más ajustadas posible ya había sido comentada en la tesis de maestría y se refleja también en la preferencia del uso del MT con dos subintervalos en la base, aunque el mismo método con un solo intervalo ya permitía mejorar las cotas dadas

4. A partir de las consideraciones anteriores podemos validar lo dicho en la tesis de maestría:
    a. Frente a una función de concavidad positiva, los encuestados encuentran menos dificultades para trabajar con cotas superiores para el área bajo su gráfico que con cotas inferiores, y
    b. Aunque para funciones decrecientes de concavidad positiva el MR con una partición más fina cumpla el objetivo de mejorar la cota superior dada, los estudiantes prefieren recurrir al uso de trapecios.

IV.1.3 Conclusiones del análisis de los primeros datos:

- Las tareas con cotas superiores e inferiores para el área bajo el gráfico de funciones positivas de concavidad positiva son enfrentadas por los estudiantes de manera comparable a las tareas con cotas inferiores y superiores, respectivamente, para funciones de concavidad negativa.

- Basados en lo anterior, presentaremos las siguientes consideraciones sólo en el caso de funciones de concavidad positiva, que se extienden análogamente a las funciones de concavidad negativa:

    - El mayor repertorio de estrategias para acotar por exceso, con los datos dados, el área bajo el gráfico, se reflejó en un mejor desempeño de los encuestados en el mejoramiento de cotas superiores para el área en cuestión.

    - La preferencia por dar la cota más ajustada posible, se refleja en el uso del MT (con uno o dos subintervalos en la base) frente al uso del MR con una partición formada por dos subintervalos. Vale mencionar que la aproximación obtenida al usar este método que recibió menos adhesiones, coincide con lo que sería la suma superior de Riemann, a partir de las cuales habitualmente se define la integral en los cursos universitarios de Cálculo.

IV.2 Algunas consideraciones desde un punto de vista matemático

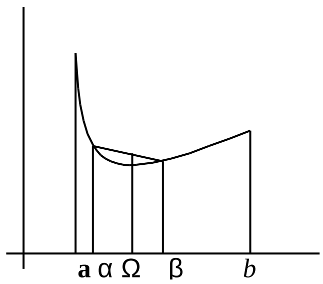
IV.2.1 Definiciones de función de concavidad positiva

Previamente al análisis de las entrevistas, haremos a continuación una recorrida por algunas de caracterizaciones de función de concavidad positiva. La selección de definiciones y condiciones necesarias y suficientes que presentaremos en esta sección fue realizada en vista de aquellas que manejaron los estudiantes involucrados en la parte experimental de este trabajo

Posibles definiciones de función de concavidad positiva

Definición 1 (D_1)

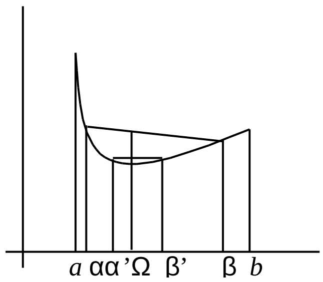
Se dice que $f:(a,b) \to R$ tiene concavidad positiva (c+) en (a,b) si y sólo si $\alpha,\beta \quad (a,b) / \alpha < \beta$ y $\Omega \quad [\alpha,\beta]$ se cumple que $f(\Omega) \leq f(\beta) + \dfrac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}(\Omega - \beta)$



Definición 2 (D_2)

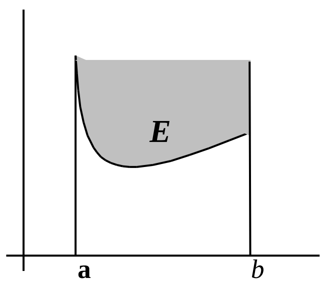
Se dice que $f:(a,b) \to R$ tiene concavidad positiva (c+) en (a,b) si y sólo si $\alpha,\alpha',\beta',\beta \quad (a,b)$ tales que $\alpha \leq \alpha' < \beta' \leq \beta$ y $\Omega \quad [\alpha',\beta']$ se cumple que

$$f(\alpha) + \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}(\Omega - \alpha) \geq f(\alpha') + \frac{f(\alpha') - f(\beta')}{\alpha' - \beta'}(\Omega - \alpha')$$



Definición 3 (D_3)

Se dice que $f:(a,b) \to R$ tiene concavidad positiva (c+) en (a,b) si y sólo si E = $\{(x,y) \quad R^2 / x \quad (a,b), y \geq f(x)\}$ es un conjunto convexo.



Las funciones de concavidad positiva también son conocidas como *funciones convexas*, y su definición ofrece otro ejemplo de los factores operativos que afectan la elección de una definición, a los cuales nos referimos en la sección II.3.1.1: aun en libros enteramente dedicados al estudio de estas funciones (como podría ser el ya citado Roberts & Varberg (1973)), las definiciones que se presentan no son del tipo de D_3 que justamente sería la que le da sentido al nombre de este tipo de funciones.

Equivalencia entre las tres definiciones

D_1 implica D_2

Sea $\alpha' \quad [\alpha,\beta] \quad_{D_1} \quad f(\alpha') \leq f(\alpha) + \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(\alpha'-\alpha)$

Sea $\beta' \quad [\alpha',\beta] \quad_{D_1} \quad f(\beta') \leq f(\alpha) + \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(\beta'-\alpha)$

Sea $\Omega \quad [\alpha',\beta']$, entonces multiplicando la primera desigualdad por $\dfrac{\beta'-\Omega}{\beta'-\alpha'} \geq 0$, la segunda por $\dfrac{\Omega-\alpha'}{\beta'-\alpha'} \geq 0$ y sumándolas luego, resulta:

$$f(\alpha')\frac{\beta'-\Omega}{\beta'-\alpha'} + f(\beta')\frac{\Omega-\alpha'}{\beta'-\alpha'} \leq f(\alpha)\frac{\beta'-\Omega+\Omega-\alpha'}{\beta'-\alpha'} + \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\left(\frac{(\alpha'-\alpha)(\beta'-\Omega)+(\beta'-\alpha)(\Omega-\alpha')}{\beta'-\alpha'}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{f(\alpha')(\beta'-\Omega)+f(\beta')(\Omega-\alpha')}{\beta'-\alpha'} \leq f(\alpha) + \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} \cdot \frac{(\beta'-\alpha')(\Omega-\alpha)}{\beta'-\alpha'} \quad \Leftrightarrow$$

$f(\alpha') + \dfrac{f(\beta')-f(\alpha')}{\beta'-\alpha'}(\Omega-\alpha') \leq f(\alpha) + \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(\Omega-\alpha)$ que es lo que plantea D_2

D_2 implica D_1

Basta tomar $\Omega = \alpha'$ y aplicando D_2 resulta lo que plantea D_1

D_3 implica D_1

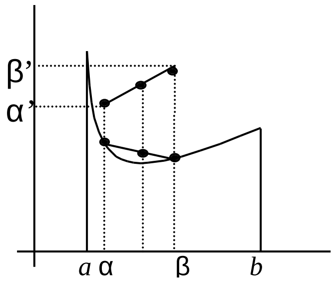
Sean $(\alpha, f(\alpha))$ E y $(\beta, f(\beta))$ E. Como E es convexo entonces $\lambda \quad [0,1]$ se cumple $\lambda(\beta, f(\beta)) + (1-\lambda)(\alpha, f(\alpha))$ E, o sea $(\lambda\beta + (1-\lambda)\alpha,\ \lambda f(\beta) + (1-\lambda) f(\alpha))$ E, lo que equivale a afirmar $\lambda f(\beta) + (1-\lambda) f(\alpha) \geq f(\lambda\beta+(1-\lambda)\alpha)$.

Sean $\Omega \quad [\alpha,\beta]$ y $\lambda = \dfrac{\Omega-\alpha}{\beta-\alpha}$. Entonces $1-\lambda = \dfrac{\beta-\Omega}{\beta-\alpha}$ y $\lambda\beta + (1-\lambda)\alpha = \Omega$ y $f(\Omega) = f(\lambda\beta+(1-\lambda)\alpha) \leq \dfrac{\alpha-\Omega}{\alpha-\beta} f(\beta) + \dfrac{\Omega-\beta}{\alpha-\beta} f(\alpha) = f(\beta) + \dfrac{\Omega-\beta}{\alpha-\beta}(f(\alpha)-f(\beta))$,

o sea, $f(\Omega) \leq f(\beta) + \dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}(\Omega-\beta)$ que es lo que plantea la D_1.

D_1 implica D_3

Para verificar D_3 debemos probar que E es un conjunto convexo; para ello veremos que si (α,α’) E y (β,β’) E: $\lambda(\alpha,\alpha') + (1-\lambda)(\beta,\beta')$ E λ [0,1] o, lo que es lo mismo, veremos que λ [0,1]: $\left(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta, \lambda\alpha' + (1-\lambda)\beta'\right)$ E .



Probaremos entonces que α’ ≥ f(α), β’ ≥ f(β) y λ [0,1] implican que $\lambda\alpha' + (1-\lambda)\beta' \geq f\left(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta\right)$

Supongamos que $\alpha > \beta$ (el caso α<β es análogo): λ [0,1] $\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta$ $[\alpha,\beta]$, entonces por D_1, se deduce que:

$$f(\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta) \leq f(\beta) + \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}(\lambda\alpha - \lambda\beta) = \lambda f(\alpha) + (1-\lambda) f(\beta)$$

y como α’ ≥ f(α) y β’ ≥ f(β), resulta que $ëá' + (1-ë)â' \geq f\left(ëá + (1-ë)â\right)$

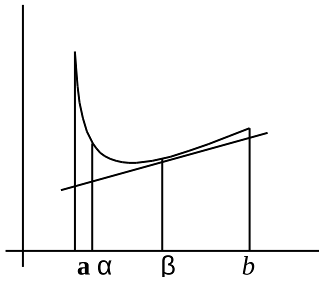
Otras caracterizaciones de función de concavidad positiva

A continuación presentaremos otras tres proposiciones que a pesar de brindar condiciones necesarias y suficientes para que una función tenga concavidad positiva, no consideraremos como definiciones porque sólo son aplicables bajo hipótesis de derivabilidad[10]. Para distinguirlas de las definiciones, las llamaremos caracterizaciones; ellas y sus demostraciones se pueden encontrar en Roberts & Varberg (1973). Sin embargo, las pruebas que presentaremos a continuación fueron levemente modificadas para recurrir en su desarrollo únicamente a las definiciones que acabamos de presentar para funciones de concavidad positiva.

[10] La concavidad positiva de f en (a,b) ya mencionamos que implica que la continuidad de f en (a,b), pero no implica que f sea derivable en (a,b). Para observar esto último basta considerar la función valor absoluto en cualquier intervalo que incluya al 0.

Caracterización 1 (C_1)

Sea $f:(a,b)\rightarrow R$ derivable en su dominio. Se cumple que f tiene concavidad positiva en (a,b) si y sólo si $\alpha,\beta \quad (a,b)$: $f(\alpha)\geq f(\beta)+f'(\beta)(\alpha-\beta)$



Directo

<u>Caso 1</u> Sean α y $\beta \quad (a,b)/\alpha<\beta$

Si $\Omega \quad (\alpha,\beta)$, como f tiene concavidad positiva en (a,b) por D_1 se deduce que $f(\Omega)\leq f(\beta)+\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}(\Omega-\beta)$

Como $\Omega<\beta$ resulta que $\frac{f(\Omega)-f(\beta)}{\Omega-\beta}\geq\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$ y tomando $\lim_{\Omega\rightarrow\beta}$ se deduce que

$f'(\beta)\geq\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$, o lo que es igual, ya que $\alpha<\beta$: $f(\alpha)\geq f(\beta)+f'(\beta)(\alpha-\beta)$

<u>Caso 2</u> Cuando α y $\beta \quad (a,b)$ son tales que $\alpha>\beta$, la demostración es análoga ya que

$f(\beta)-f(\alpha)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(\Omega-\alpha-\Omega+\beta)$ y por lo tanto:

$$f(\beta)+\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}(\Omega-\beta)\ =\ f(\alpha)+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(\Omega-\alpha)$$

<u>Caso 3</u> Cuando α y $\beta \quad (a,b)$ son tales que $\alpha=\beta$ la desigualdad se cumple trivialmente.

Recíproco

Sea $g(x)=\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}$; g es creciente pues $g'(x)=\frac{f'(x)(x-\beta)-f(x)+f(\beta)}{(x-\beta)^2}\geq 0$

ya que por hipótesis $f(\beta)\geq f(x)+f'(x)(\beta-x) \quad \beta,x \quad (a,b)$

Para todo $\Omega \quad [\alpha,\beta]$:

$\Omega\geq\alpha$ y por tanto $g(\Omega)\geq g(\alpha)$, o sea $\frac{f(\Omega)-f(\beta)}{\Omega-\beta}\geq\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$

$\beta\geq\Omega$ y por tanto $f(\Omega)-f(\beta)\leq\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}(\Omega-\beta)$ lo que implica, según D_1, que f tenga concavidad positiva en (a,b).

Caracterización 2 (C_2)

Sea $f:(a,b)\to R$ derivable de segundo orden en su dominio. Se cumple que *f* tiene concavidad positiva en (*a*,*b*) si y sólo si $f''(x)\geq 0 \quad x \quad (a,b)$

Directo

Si *f* tiene concavidad positiva en (*a*,*b*), usando C_1 se sabe que $x,y \quad (a,b)$: $f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$ y $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$.

Entonces, si $x < y$ se cumple que $f'(x)\leq \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq f'(y)$ lo que implica que *f’* es creciente y por tanto $f''(x)=\lim\limits_{z\to x}\dfrac{f'(z)-f'(x)}{z-x}\geq 0 \quad x \quad (a,b)$

Recíproco

Para ver que *f* tiene concavidad positiva en (*a*,*b*), usando la C_1 sabemos que basta probar que: $\alpha,\beta \quad (a,b)$: $f(\alpha)\geq f(\beta)+f'(\beta)(\alpha-\beta)$

Como existe *f''* en (*a*,*b*) se sabe que *f* es continua y derivable en ese intervalo, entonces, por el teorema del valor medio de Lagrange existe $c_{á,â}$ un número real entre α y β, tal que: $f(\alpha)-f(\beta)=f'(c_{\alpha,\beta})(\alpha-\beta)$

También *f'* es continua y derivable en ese intervalo, entonces, por el mismo teorema resulta que $f'(c_{\alpha,\beta})-f'(\beta)=f''(d_{\alpha,\beta})(c_{\alpha,\beta}-\beta)$ siendo $d_{á,â}$ un real que está entre $c_{á,â}$ y β. Por lo tanto: $f(\alpha)-f(\beta)-f'(\beta)(\alpha-\beta) = \left(f'(c_{\alpha,\beta})-f'(\beta)\right)(\alpha-\beta) = f''(d_{\alpha,\beta})(c_{\alpha,\beta}-\beta)(\alpha-\beta)$ y como por hipótesis $f''(x)\geq 0 \quad x \quad (a,b)$ y $c_{\alpha,\beta}$ es un número que está entre α y β se deduce que $f(\alpha)-f(\beta)-f'(\beta)(\alpha-\beta)\geq 0$

***Caracterización 3* (*C_3*)**

Sea $f:(a,b) \to R$ derivable en su dominio. Se cumple que *f* tiene concavidad positiva en (*a*,*b*) si y sólo si su derivada es una función creciente en (*a*,*b*)

Directo

Si *f* tiene concavidad positiva en (*a*,*b*), por C_1 se sabe que x,y (a,b): $f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$ y $f(y) \geq f(x) + f'(x)(y-x)$. Entonces, si $x < y$ se cumple que $f'(x) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq f'(y)$ lo que implica que *f'* es creciente

Recíproco

Para ver que *f* tiene concavidad positiva en (*a*,*b*), usando la C_1 sabemos que basta probar que: α,β (a,b): $f(\alpha) \geq f(\beta) + f'(\beta)(\alpha-\beta)$

Como *f* es derivable en (*a*,*b*) se le puede aplicar el teorema del valor medio de Lagrange y resulta que $f(\alpha)-f(\beta) = f'(c_{\alpha,\beta})(\alpha-\beta)$ siendo $c_{á,â}$ un número real entre α y β.

Si $\alpha \leq \beta$:

$$f(\alpha)-f(\beta) = f'(c_{\alpha,\beta})(\alpha-\beta) \geq f'(\beta)(\alpha-\beta) \quad \text{pues } f' \text{ es creciente, } c_{\alpha,\beta} \leq \beta \text{ y } á - â \leq 0$$

Si $\alpha > \beta$:

$$f(\alpha)-f(\beta) = f'(c_{\alpha,\beta})(\alpha-\beta) \geq f'(\beta)(\alpha-\beta) \quad \text{pues } f' \text{ es creciente, } c_{\alpha,\beta} \geq \beta \text{ y } á - â > 0$$

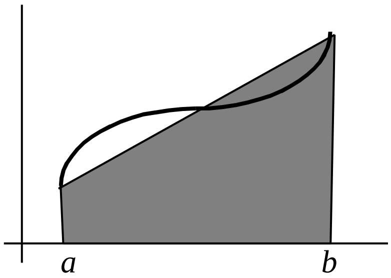
Por lo cual resulta que $á, â$ $(a,b): f(á) - f(â) \geq f'(â)(á-â)$ lo que implica que *f* tiene concavidad positiva en (*a*,*b*)

IV.2.2 Teoremas relativos a la aproximación del área bajo el gráfico para funciones de concavidad positiva

En lo que sigue presentaremos demostraciones analíticas para los teoremas cuyas pruebas visuales son estudiadas en la parte experimental de este trabajo. Creemos que tener en cuenta y comparar las distintas justificaciones, aportará elementos importantes a nuestro análisis. Por ello, no presentaremos aquí la versión general de las demostraciones analíticas de los teoremas en cuestión, como las que se pueden encontrar en Bartle & Shebert (1982), sino que presentaremos una adaptación de las mismas para el caso en que se considere un solo intervalo en la base, dado que así también fueron presentadas las pruebas visuales en el guión de la entrevista.

Comencemos por ver cuáles son las expresiones analíticas de los métodos trapezoidal (MT) y rectangular usando la ordenada del punto medio (MR_), que son los métodos de aproximación involucrados en los teoremas que estamos estudiando.

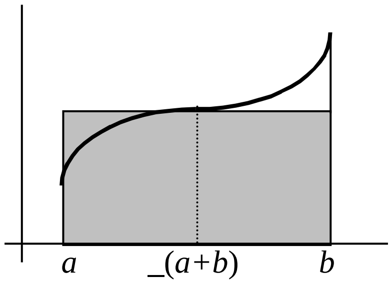
Método trapezoidal (MT)



Si se tiene una función f definida en el intervalo $[a,b]$ y llamamos T a la aproximación ofrecida por el MT usando un único intervalo en la base, resulta que:

$$T = \frac{b-a}{2}\left(f(b) + f(a)\right)$$

Método rectangular usando la ordenada del punto medio (MR_)



Si se tiene una función f definida en el intervalo $[a,b]$ y llamamos M a la aproximación ofrecida por el MR_ usando un único intervalo en la base, resulta que:

$$M = (b-a)\, f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Estamos en condiciones ahora de abocarnos a las demostraciones de los tres teoremas que aparecen en el guión de la entrevista:

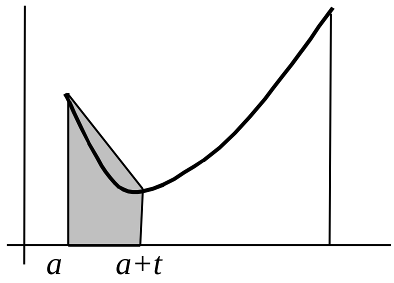
TEOREMA 1: Si una función positiva tiene concavidad positiva el método trapezoidal (MT) ofrece una aproximación por exceso del "área bajo la gráfica".

Hipótesis: Sean f, f' y f'' funciones continuas en $[a,b]$, tales que $f''(x) \geq 0 \quad x \quad [a,b]$ y sea $T = \frac{b-a}{2}\left(f(b) + f(a)\right)$

Tesis: $T \geq \int_a^b f$

Observación: Como T es la aproximación brindada por el MT para el área bajo el gráfico cuando se considera un único intervalo en $[a,b]$ y $\int_a^b f$ mide justamente esa área cuando la función es positiva, este teorema permite afirmar que si una función cumple con la caracterización etiquetada como C_2, entonces el MT aproxima por exceso al área en cuestión.

Demostración



Se considera la función $\theta : [0, b\text{-}a] \rightarrow R$ definida por $\theta(t) = \frac{t}{2}\left(f(a) + f(a+t)\right) - \int_a^{a+t} f$

O sea que θ evalúa la diferencia entre la integral de la función f en el intervalo $[a,a+t]$ y el área del trapecio asociado a la misma función en el mismo intervalo.

Observemos primero que $\theta(b-a) = T - \int_a^b f$ mide el error de la aproximación dada por el MT al área bajo el gráfico de f y por lo tanto, lo que queremos demostrar es que $\theta(b-a) \geq 0$.

$$\theta(0) = 0$$

$$\theta'(t) = \frac{1}{2}\left(f(a) + f(a+t)\right) + \frac{t}{2} f'(a+t) - f(a+t) = \frac{1}{2}\left(f(a) - f(a+t) + tf'(a+t)\right)$$

$$\theta'(0) = 0$$

$$\theta''(t) = \frac{1}{2}\left(-f'(a+t) + f'(a+t) + tf''(a+t)\right) = \frac{t}{2} f''(a+t)$$

Sea $A = \min_{x \quad [a,b]} f''(x)$, cuya existencia queda asegurada por la continuidad de f'' en ese intervalo; entonces:

$$\frac{tA}{2} \leq \frac{t}{2} f''(a+t) = \theta''(t) \qquad t \quad [0, b-a]$$

$$\int_0^z \frac{tA}{2} dt \leq \int_0^z \theta''(t) dt \qquad z \quad [0, b-a]$$

$$\frac{z^2A}{4} \le \theta'(z) \qquad z \quad [0,b-a]$$

$$\int_0^x \frac{z^2A}{4}dz \le \int_0^x \theta'(z)dz \qquad x \quad [0,b-a]$$

$$\frac{x^3A}{12} \le \theta(x) \qquad x \quad [0,b-a]$$

Como $f''(x) \ge 0$ x $[a,b]$, se deduce que $A \ge 0$ y por tanto $\theta(b-a) \ge 0$, que es lo que buscábamos demostrar.

TEOREMA 2: Si una función positiva tiene concavidad positiva el método rectangular usando la ordenada del punto medio (MR_) ofrece una aproximación por defecto del "área bajo la gráfica".

<u>Hipótesis</u>: Sean f, f' y f'' funciones continuas en $[a,b]$ tales que $f''(x) \ge 0$ x $[a,b]$ y sea $M = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

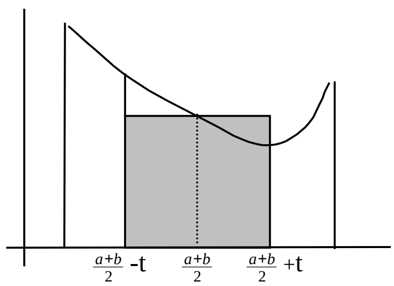
<u>Tesis</u>: $M \le \int_a^b f$

<u>Observación</u>: Como M es la aproximación brindada por el MR_ para el área bajo el gráfico cuando se considera un único intervalo en $[a,b]$ y $\int_a^b f$ mide justamente esa área cuando la función es positiva, este teorema permite afirmar que si una función cumple con la caracterización etiquetada como C_2, entonces el MR_ aproxima por defecto al área en cuestión.

<u>Demostración</u>:

Se considera la función $\phi : [0, \frac{b-a}{2}] \to R$ definida por $\phi(t) = \int_{\frac{a+b}{2}-t}^{\frac{a+b}{2}+t} f - 2tf\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

O sea que ϕ evalúa la diferencia entre la integral de la función f en el intervalo $[\frac{a+b}{2}-t, \frac{a+b}{2}+t]$ y el área del rectángulo de altura $f(\frac{a+b}{2})$ con base en el mismo intervalo.



Observemos primero que $\phi\left(\frac{b-a}{2}\right)=\int_a^b f - M$ mide el error de la aproximación dada por el MR_ al área bajo el gráfico de *f* y por lo tanto, lo que queremos demostrar es que $\phi\left(\frac{b-a}{2}\right)\geq 0$.

$$\phi(0)=0$$

$$\phi'(t)= f\left(\tfrac{a+b}{2}+t\right)- f\left(\tfrac{a+b}{2}-t\right)(-1)-2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)= f\left(\tfrac{a+b}{2}+t\right)+ f\left(\tfrac{a+b}{2}-t\right)-2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)$$

$$\phi'(0)=0$$

$\phi''(t)= f'\left(\tfrac{a+b}{2}+t\right)- f'\left(\tfrac{a+b}{2}-t\right)= f''(d)2t$, donde *d* es un número real perteneciente al intervalo [$\frac{a+b}{2}$ -*t*, $\frac{a+b}{2}$ +*t*] cuya existencia queda asegurada por el teorema del valor medio aplicado a *f'*.

Sea $A=\min\limits_{x\ [a,b]} f''(x)$, cuya existencia queda asegurada por la continuidad de *f"* en ese intervalo; entonces:

$$2tA\leq f''(d)2t=\phi''(t) \qquad t \quad \left[0,\tfrac{b-a}{2}\right]$$

$$\int_0^z 2tA\,dt\leq \int_0^z \phi''(t)\,dt \qquad z \quad \left[0,\tfrac{b-a}{2}\right]$$

$$z^2A\leq \phi'(z) \qquad z \quad \left[0,\tfrac{b-a}{2}\right]$$

$$\int_0^x z^2A\,dz\leq \int_0^x \phi'(z)\,dz \qquad x \quad \left[0,\tfrac{b-a}{2}\right]$$

$$\frac{x^3A}{3}\leq \phi(x) \qquad x \quad \left[0,\tfrac{b-a}{2}\right]$$

Como *f"*(*x*) ≥ 0 *x* [*a*,*b*], se deduce que $A\geq 0$ y por tanto $\phi\left(\frac{b-a}{2}\right)\geq 0$, que es lo que buscábamos demostrar.

TEOREMA 3: Si una función positiva tiene concavidad positiva el método rectangular usando la ordenada del punto medio (MR_) ofrece una aproximación por defecto del "área bajo la gráfica" más ajustada que la aproximación por exceso que ofrece el método trapezoidal (MT).

<u>*Hipótesis*</u>: Sean *f, f'* y *f"* funciones continuas en [*a*,*b*] tales que *f"*(*x*) ≥ 0 *x* [*a*,*b*] y sean *M* y *T* definidas como en los teoremas anteriores.

<u>*Tesis*</u>: $\int_a^b f - M \leq T - \int_a^b f$

Observación: En los teoremas anteriores hemos visto que cuando la función es positiva, y cumple con la caracterización etiquetada como C_2: $\int_a^b f - M$ mide el error de la aproximación brindada por el MR_, que $T - \int_a^b f$ mide el error de la aproximación brindada por el MT y que las dos diferencias planteadas son no negativas. Por lo tanto, lo que establece la tesis de este tercer teorema es que el error de la aproximación brindada por el MR_ es menor que la brindada por el MT, o sea, la primera es más ajustada.

Demostración:

Primera parte: Notemos por $T_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right]}$ a la aproximación ofrecida por el MT para el área bajo el gráfico de función f definida en el intervalo $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$, y análogamente por $T_{\left[\frac{a+b}{2},b\right]}$ a la aproximación ofrecida por el MT ahora para el intervalo $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$.

Demostraremos que, independientemente del signo de f'': $T_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right]} + T_{\left[\frac{a+b}{2},b\right]} = \frac{M+T}{2}$ (se puede ver una ilustración de esta afirmación en la próxima página):

$$T_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right]} + T_{\left[\frac{a+b}{2},b\right]} = \frac{b-a}{4}\left(f(a) + f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right) + \frac{b-a}{4}\left(f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

$$= \frac{b-a}{4}\left(f(a) + 2f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = \frac{b-a}{4}\left(f(a) + f(b)\right) + \frac{b-a}{2} f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) + (b-a) f\left(\tfrac{a+b}{2}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(T + M\right)$$

Segunda parte: Como $f'' \geq 0$ en $[a,b]$ sabemos, por el teorema 1, que $0 \leq T_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right]} - \int_a^{\frac{a+b}{2}} f$ y $0 \leq T_{\left[\frac{a+b}{2},b\right]} - \int_{\frac{a+b}{2}}^b f$ y por tanto[11] $0 \leq T_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right]} + T_{\left[\frac{a+b}{2},b\right]} - \int_a^b f$.

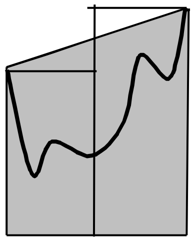
Como $T_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right]} + T_{\left[\frac{a+b}{2},b\right]} = \frac{M+T}{2}$ resulta que $0 \leq \frac{M+T}{2} - \int_a^b f$, o sea, $0 \leq M + T - 2\int_a^b f$ de donde se deduce que $\int_a^b f - M \leq T - \int_a^b f$.

[11] Observar que ésta es la idea que permite la generalización de las demostraciones que aquí presentamos para los tres teoremas, al caso que se consideren los métodos aplicados en una partición de la base formada por más de un subintervalo.

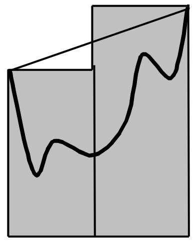
Mientras que las pruebas visuales de los dos primeros teoremas se pueden encontrar en la sección dedicada al diseño de las entrevistas, presentamos aquí la versión visual de la justificación de la primera parte del último teorema, puesto que aparece una prueba diferente en aquella sección[12,13]:

$$T_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right]} + T_{\left[\frac{a+b}{2},b\right]} = \frac{M+T}{2}$$

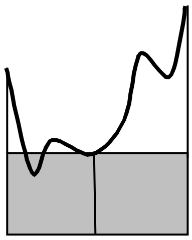
T =



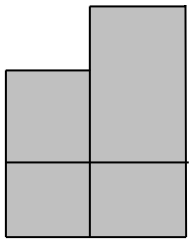
−



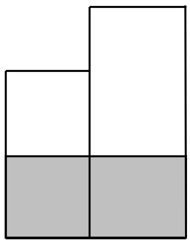
M =



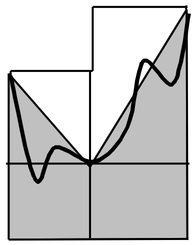
El pro-medio de las áreas



y



=



$= T_{\left[a,\frac{a+b}{2}\right]} + T_{\left[\frac{a+b}{2},b\right]}$

[12] Como ya comentamos cuando presentamos la prueba algebraica, se puede apreciar en esta prueba visual que en el resultado intermedio la concavidad positiva o negativa es un atributo irrelevante.

[13] Observar que aunque la aproximación dada por el MT con dos subintervalos de igual longitud sea el promedio entre T y M (y éstas sean una por defecto y otra por exceso) no necesariamente brindará una aproximación más ajustada que la que brinda M. Por ejemplo, para $f(x) = x^4$ en [-1,1] resulta que el área bajo la gráfica vale 2/5, $T = 2$, $M = 0$ y la aproximación brindada por el MT con dos subintervalos vale 1; por tanto, el error de la aproximación brindada por el MT con dos subintervalos excede en 1/5 al error que brinda M.

IV.3 Análisis de las entrevistas

Tal como habíamos adelantado en la sección dedicada a los aspectos metodológicos de este trabajo, presentaremos nuestro análisis de las entrevistas organizado en base a doce ítems, los cuales darán lugar a una serie de apartados, uno por cada ítem, donde expondremos las consideraciones que nos mereció la lectura de los datos y a otras dos subsecciones dedicadas a exponer algunas conclusiones parciales.

En las siguientes páginas, para dar a conocer la posición de los estudiantes (a quienes nombraremos A, B, C, D y E) frente a cada uno de los ítems, incluiremos algunos extractos de las trascripciones de sus entrevistas, por lo que será necesario mencionar previamente las claves para interpretar ciertas abreviaturas que allí utilizamos:

c+	Concavidad positiva
c-	Concavidad negativa
MR	Método rectangular
MR1	MR usando la ordenada del primer punto
MR2	MR usando la ordenada del segundo punto
MR_	MR usando la ordenada del punto medio
MT	Método trapezoidal

A1. Sobre las definiciones de rectángulo y trapecio

En este primer apartado del análisis de las entrevistas, estudiaremos las distintas definiciones dadas por los estudiantes para rectángulo y trapecio, deteniéndonos especialmente en la relación que establecen entre esos dos tipos de cuadriláteros y en la coherencia entre las definiciones que enuncian y el repertorio de ejemplos y no-ejemplos que exhiben.

Entrevistado A

Define rectángulo, de manera no minimal, como "*un cuadrilátero con 4 ángulos rectos*" y trapecio como "*un cuadrilátero donde dos lados son paralelos*". La construcción e identificación de ejemplos son coherentes con su definición, por lo cual acepta al rectángulo como caso particular de trapecio.

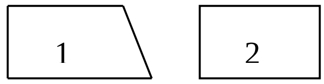
Entrevistada B

Define rectángulo como "*un cuadrilátero con los lados paralelos y un ángulo recto*" y trapecio como "*un cuadrilátero que tiene dos de los lados paralelos entre sí*" y agrega: "*que los otros dos no sean paralelos*". La construcción e identificación de ejemplos son coherentes con su definición que excluye al rectángulo como caso particular de trapecio.

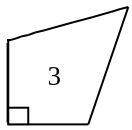
Luego de terminada esta primera etapa comenta "*tengo el problema que no sé si está bien mi definición de que los otros dos lados no tengan que ser necesariamente paralelos*". A continuación realiza una nueva clasificación de las figuras dadas en trapecios y no trapecios, coherente con la nueva definición que menciona y que admite que los otros dos lados pueden no ser paralelos.

Entrevistado C

Define rectángulo como "*una figura geométrica determinada por 4 lados, con dos lados iguales y entre sí 90 grados*" y trapecio como "*formado por 4 lados, con dos lados paralelos*".



Dibuja un cuadrilátero como el de la figura 1 para ejemplo de trapecio y no-ejemplo de rectángulo y un cuadrilátero como el de la figura 2 para ejemplo de rectángulo y no-ejemplo de trapecio.



En el caso de los rectángulos, la definición que da no es la "adecuada" (puesto que esa definición incluye a cuadriláteros como el de la figura 3), y la construcción de un ejemplo y un no-ejemplo es coherente con su definición personal y consistente con la definición usual de rectángulo. En el caso de los trapecios, la clasificación no se adecua a su definición siendo ésta "correcta". Estas diferencias entre las definiciones y la clasificación de ejemplos podría explicarse por el uso de imágenes prototípicas de trapecio y rectángulo.

Su identificación de ejemplos de trapecios entre las figuras dadas resulta coherente con la anterior construcción de ejemplos y no-ejemplos en la que se aprecia que está interpretando "*con dos lados paralelos*" como "con únicamente dos lados paralelos".

Cuando se lo pone ante un caso en que el MT usa un rectángulo, responde ajustando su definición:

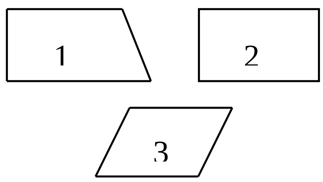
Y Vos consideraste que los rectángulos eran no-ejemplos de trapecios
C Ta... ta, está bien... sería un caso particular... sí, donde los otros dos lados también serían paralelos...
Y ¿Te acordás cómo habías definido trapecio?
C Sí, **dos lados paralelos y los otros dos no tenían por qué serlo**... acá es un caso particular...

Entrevistado D

Define rectángulo como "*un cuadrilátero con tres ángulos rectos*" y trapecio como "*un cuadrilátero con dos lados paralelos*". La construcción e identificación de ejemplos son coherentes con su definición que acepta al rectángulo como caso particular de trapecio.

Entrevistada E

Define rectángulo como "*un cuadrilátero que tiene tres ángulos rectos*" y trapecio como "*un cuadrilátero con un par de lados paralelos*".



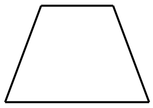
Dibuja un cuadrilátero como el de la figura 1 para ejemplo de trapecio y no-ejemplo de rectángulo, un cuadrilátero como el de la figura 2 para ejemplo de rectángulo y uno como el de la figura 3 para no-ejemplo de trapecio. Lo anterior parece sugerir que E interpreta "*con un par de lados paralelos*" como "con únicamente un par de lados paralelos".

Cuando se le pide que identifique ejemplos de trapecios entre figuras dadas, reconsidera el no-ejemplo de trapecio que acababa de presentar y reinterpreta su definición:

Y De los siguientes ¿cuáles son trapecios? (señala las figuras que aparecen en el guión)
E **¿Éste puede considerarse que es un trapecio y además es ambas cosas?** (se refiere a la figura A)

Y A ver tu definición ¿cuál era?

E dibuja



E Por ejemplo, un trapecio es esto… Tiene **un par de lados paralelos y no tiene por qué tener el segundo.** Pero éste también es un trapecio (se refiere a su ejemplo de rectángulo).

Y Ahora vos me dijiste que el B era trapecio y allá cuando pusiste un no-ejemplo de trapecio…
E Me equivoqué, el no-ejemplo de trapecio está mal
Y O sea que tu definición de trapecio es que tiene…
E **Un par de lados paralelos por lo menos**, o sea que un no-ejemplo de trapecio tendría que ser un cuadrilátero que no tuviera… o un triángulo cualquiera

Consideraciones finales

- Entre las definiciones dadas para rectángulo, encontramos una no-minimal (la de A) y las otras minimales (de dos tipos: “un paralelogramo con un ángulo recto” y “un cuadrilátero con tres ángulos rectos”)
  Las cinco definiciones presentadas por los entrevistados para trapecio son minimales y del tipo “un cuadrilátero con un par (o exactamente un par) de lados paralelos”
- Respecto al carácter jerárquico o particional de las definiciones de estos cuadriláteros podemos señalar:
  - Los entrevistados A y D definen ambos conceptos de forma que quedan vinculados jerárquicamente y manejan ejemplos y no-ejemplos coherentemente con dichas definiciones.
  - La entrevistada B comienza definiendo trapecio de manera particional y maneja los ejemplos coherentemente con dicha definición. Luego admite la posibilidad de una definición para este tipo de cuadriláteros que admita a los rectángulos como casos particulares y modifica, de acuerdo a ella, su primera clasificación de figuras dadas en ejemplos y no-ejemplos de trapecio.
  - La entrevistada E da una definición de trapecio que en lo formal incluye al rectángulo como caso particular pero que, al construir ejemplos y no-ejemplos, no considera como tal. En el momento de identificar ejemplos entre figuras dadas, pasa explícitamente a una definición jerárquica y rectifica su manejo de ejemplos, hasta llegar a ser coherente con su nueva definición.
  - El entrevistado C define con errores rectángulo y construye ejemplos y no-ejemplos coherentemente según un criterio que también es consistente con la noción habitual de rectángulo. Es posible que la definición incorrecta que da este estudiante de rectángulo sea producto del atropello de la primera pregunta de la entrevista más que de errores conceptuales (observar que mejoraría notablemente si en vez de decir “*una figura geométrica determinada por 4 lados, con dos lados iguales y entre sí 90 grados*” dijera “una figura geométrica determinada por 4 lados, con dos **pares** de lados iguales y entre sí 90 grados”)
    Da una definición correcta de trapecio que incluiría al rectángulo como caso particular de trapecio, sin embargo, lo excluye, ya que lo toma como no-ejemplo tanto en las tareas de construcción como en las de identificación. Cuando este entrevistado es enfrentado al caso en que el MT usa un rectángulo, reinterpreta su

definición admitiendo que hay *"dos lados paralelos y los otros dos no tenían por qué serlo"*, lo que hace que considere desde allí al rectángulo como un trapecio.

Resumiendo:

Rectángulo	Trapecio
Cuatro entrevistados expresan una definición adecuada (el restante, C, presenta un enunciado con incorrecciones)	Todos expresan una definición adecuada
Cuatro presentan definiciones minimales (el restante, A, presenta un enunciado donde el dato de la medida de uno de los ángulo es redundante)	Todas las definiciones presentadas son minimales
Tres de las definiciones proceden de exigir cuadriláteros con sus ángulos rectos y las otras dos proceden de exigir a un paralelogramo que uno de sus ángulos sea recto	Todas las definiciones proceden del pedido, a un cuadrilátero, de condiciones de paralelismo de sus lados.
Todas las definiciones admiten, en su enunciado, al cuadrado como caso particular de rectángulo	Se presentaron diversas situaciones respecto a la inclusión del rectángulo como caso particular de trapecio

Veamos cuáles son esas situaciones a las que nos referíamos en la última celda de la tabla anterior:

Situación 1
Enunciado: jerárquico
Manejo de ej.: jerárquico

Situación 2
Enunciado: particional
Manejo de ej.: particional

Situación 3
Enunciado: jerárquico
Manejo de ej.: particional

- Los entrevistados A y D se encuentran en la situación 1.
- La estudiante B pasa voluntariamente en el transcurso de la entrevista, de la situación 2 a la 1.
- El entrevistado C pasa de la situación 3 a la 1. El cambio tiene lugar cuando se le plantea el caso conflictivo del MT.
- La entrevistada E pasa, por iniciativa propia, de la situación 3 a la 1.

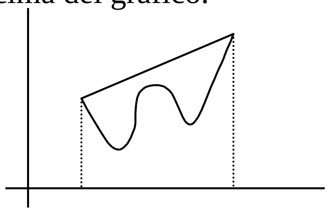
A2. Sobre caracterizaciones de función de concavidad positiva

Tomando en cuenta el significado que se da al término definición en el contexto de este trabajo y a las características del discurso oral que involucra una entrevista como la realizada, resulta difícil acceder a la verdadera definición personal del concepto y distinguirla de las descripciones o acercamientos informales que hace el entrevistado. Por lo tanto, en esta sesión del análisis de las entrevistas, más que definiciones estudiaremos "caracterizaciones de función de concavidad positiva", o sea, enunciados que de alguna manera reflejan aquellos aspectos del esquema conceptual vinculado a la noción que son movilizados por ciertas tareas concretas como las propuestas en la entrevista.

En lo que sigue usaremos ciertos códigos para etiquetar las caracterizaciones que brindan los estudiantes acerca de la concavidad positiva de una función:

D_1 Todas las cuerdas están por encima del gráfico de la función[14].

D_1* La cuerda que une los extremos del intervalo está por encima del gráfico.
La propiedad D_1* no es equivalente a D_1 sino que es apenas una consecuencia de ella (eso hace que D_1* represente una condición necesaria pero no suficiente para la c+[15] tal como se aprecia en la figura).



D_3 El epígrafo de la función:$\{(x,y)\ /\ a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y\}$ (o sea, el conjunto de puntos que están “encima” del gráfico de la función), es un conjunto convexo.

$D_3^{\times}$ El conjunto $\{(x,y)\ /\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ (o sea, el conjunto de puntos que están “debajo” del gráfico de la función), es un conjunto no convexo.
Es claro que $D_3^{\times}$ no implica D_3 (basta como contraejemplo el gráfico que aparece más arriba). D_3 tampoco implica $D_3^{\times}$ pues en el caso que la función tenga por gráfico una recta, ambos conjuntos resultan convexos. Esto provoca que aunque $D_3^{\times}$ de ninguna manera es condición suficiente para la concavidad positiva, podría llegar a ser condición necesaria dependiendo del carácter jerárquico o particional de la definición que se considere de concavidad positiva (ej: si se considera que una función es de concavidad positiva si y sólo si toda cuerda está por encima del gráfico tocándolo exclusivamente en los extremos, entonces si la función es de concavidad positiva se cumple $D_3^{\times}$).

C_1 La tangente en cada uno de sus puntos está por debajo del gráfico de la función.

C_1* La tangente en el punto medio del intervalo queda por debajo del gráfico.
Con respecto a C_1*, se puede hacer un comentario análogo al realizado anteriormente en relación a D_1* y D_1, concluyendo que bajo condiciones de derivabilidad C_1* es una condición necesaria pero no suficiente de concavidad positiva.

C_2 La derivada segunda de la función es mayor o igual que cero.

C_2* La derivada segunda de la función es positiva.

C_3 La derivada de la función es una función creciente.

U Con este código representaremos a las caracterizaciones visuales respecto al gráfico de funciones de concavidad positiva del tipo: “el gráfico es como una u”, “es como que el gráfico ríe”, etc.

---

[14] D_1, D_3, C_1, C_2 y C_3 coinciden con las caracterizaciones igualmente etiquetadas en la sección III.3.1.
[15] Vale recordar que así decidimos abreviar “concavidad positiva” en el marco de este trabajo.

$E^{\times}$ El signo de la derivada es negativo en el intervalo (a,c), cero en el punto c y positivo en el intervalo (c,b).

sg f'	-	0	+
	a	c	b

Esta caracterización (probablemente influida por el ejemplo prototípico de la parábola) deja fuera muchas funciones de concavidad positiva (las no derivables, las monótonas) e incorpora otras que no son de concavidad positiva como ser: $f(x)=\begin{cases} x^2 & si\, x \le 1 \\ 1+Lx^2 & si\, x>1 \end{cases}$ cuya derivada $f'(x)=\begin{cases} 2x & si\, x \le 1 \\ \frac{2}{x} & si\, x>1 \end{cases}$ tiene signo: "negativo, cero, positivo" y cuya derivada segunda $f''(x)=\begin{cases} 2 & si\, x<1 \\ / & si\, x=1 \\ \frac{-2}{x^2} & si\, x>1 \end{cases}$ tiene signo: "positivo, no-existencia, negativo" que evidencia que *f* no tiene concavidad positiva en *R*.

$E^{\times\times}$ Es otro código que usaremos para una caracterización incorrecta presentada por uno de los entrevistados: "la derivada primera es positiva"

Entrevistado A

<u>*Cuando se le pide que defina una función con concavidad positiva:*</u>

Presenta a C_2* como su "definición" personal de concavidad positiva:

Y ¿Qué quiere decir una función de c+?

A **Que la derivada segunda sea positiva en el intervalo**

<u>*Cuando construye ejemplos de funciones de concavidad positiva:*</u>

Presenta a U como condición suficiente de concavidad positiva:

A **Hacia arriba** digamos, e^x... o sea que no puede ser constante... sería por ejemplo, cualquier polinomio con coeficiente del término en x^2 o superior positivo y aparte evaluada después de la primera raíz... o del cero de la derivada

Y Ta, no te preocupes, simplemente cómo te parecía que iban a ser los gráficos de esas funciones

A **Como una U**

Aunque A no vincula explícitamente la concavidad positiva como consecuencia de la caracterización U, la ubicamos como condición suficiente pues la usa para la construcción de ejemplos. Esta tarea requiere la consideración de propiedades que impliquen la concavidad positiva mientras que la construcción de no-ejemplos requiere considerar condiciones necesarias que no sean verificadas por el objeto.

Luego presenta a C_2* como condición necesaria de concavidad positiva.

Y Recién dijiste que no podía ser constante ¿por qué?

A Porque **la derivada segunda sería 0**

<u>*Cuando identifica ejemplos de funciones de concavidad positiva:*</u>

Al descartar como ejemplo el quinto gráfico de los que aparecen en la tercera parte del guión, argumenta:

A **Ésta no** (la quinta), **tendría el cero de la derivada que estaría por ahí**, o sea, no tiene (c+)

Aunque no lo explicite en esta fase, analizando el resto de la tarea, se entiende que se refiere a la derivada segunda y por tanto, consideramos que también en la identificación de ejemplos da a C_2* como condición necesaria de concavidad positiva.

Al analizar el segundo gráfico comenta:

A Tiene c+ desde el máximo en adelante
Y Pero ¿en todo el intervalo donde está definida?
A En todo no

Aquí parece que A se deja llevar demasiado lejos por su imagen visual como condición suficiente pues no sería desde el máximo sino desde el punto de inflexión que tendría concavidad positiva.

Y cuando se enfrenta al sexto gráfico comenta:

A Podría llegar a decirse que tiene c+... porque **la derivada primera es siempre creciente**, tiene un salto finito en un punto pero es siempre creciente
Y La derivada primera es siempre creciente...
A Ah, no, siempre positiva... no, a ver...
Y Bueno, dejémoslo...

Donde, salvo los titubeos finales, se puede entender que presenta a C_3 como condición suficiente de concavidad positiva.

Cuando trabaja con el teorema 1:
Presenta a D_1* como condición necesaria de concavidad positiva e intenta argumentar que C_3 implica D_1*:

A La idea es que la recta que une **la función en los extremos del intervalo, esté por arriba de la curva** lo cual queda asegurado por la c+...
Y Que la cuerda queda por encima de la gráfica, vos decís que eso es…
A Equivalente a que tenga c+... a ver... sí, **la derivada primera siempre creciendo por lo tanto la derivada en el extremo final va a ser mayor o igual que en el inicial por lo tanto la curva va a estar siempre por debajo de la recta**...

Cuando trabaja con el teorema 2:
Presenta a C_1 como condición necesaria de concavidad positiva.

Y Ahí usaste que si tiene c+ ¿qué particularidad tiene?
A Siempre para **cualquier tangente que tome la curva está por encima** de la tangente... que sería otra definición de c+

Y antes había mencionado:

A **[La curva] va a estar siempre por arriba de la tangente**... nunca va a quedar por arriba, sino tendría que hacer así (hace un gesto con la mano indicando el comportamiento que pasaría a tener la función si bajara bajo la tangente) y en algún punto tendría c-

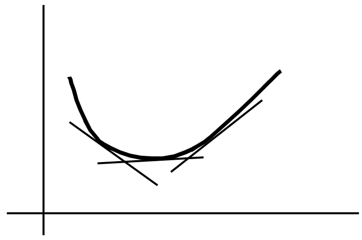
Donde se puede encontrar una argumentación respecto a por qué U implica C_1.

Entrevistada B

Cuando se le pide que defina una función con concavidad positiva:
Presenta a la caracterización C_1:

Y ¿Qué quiere decir que una función tenga c+?
B Que en ese intervalo donde tiene c+, **cada vez que vos dibujes la tangente por un punto, la recta va a quedar por debajo del gráfico**. Si las dibujo acá (se refiere al dibujo que acaba de hacer) van a quedar todas así

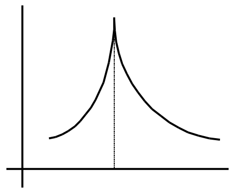
Junto con eso, B dibuja y agrega



B Y eso está de acuerdo con lo que te da la derivada segunda.
Y O sea que conocés otras definiciones de función de c+
B Sí, **la concavidad es positiva cuando la derivada segunda te da positiva**
Y Vos ahí me nombraste dos definiciones posibles de c+...
B Si algo me quedó de 6º año... creo que a partir de esto (se refiere a la primera caracterización mencionada) llegabas a demostrar que la derivada tenía que ser positiva... o sea, no son dos definiciones, es la misma.

Así menciona a C_2* como otra posible definición de este tipo de funciones y comenta explícitamente que C_1 implica C_2* y que alguna vez tuvo contacto con esa prueba.

Cuando construye ejemplos de funciones de concavidad positiva:
Ante este pedido, aun antes de haber visto los gráficos que aparecen en el guión, dibuja uno como el que aparece en el sexto lugar de la tercera parte de ese guión, presentándolo como ejemplo:



B Tiene c+ pero tiene un punto singular
Y ¿Y en ese punto tiene c+?
B Sí... bueno, acá no porque **acá en este punto no existe la derivada segunda, acá en este punto no tiene c+ ni negativa**, es singular... pero acá tiene c+ y acá (señala cada uno de los subintervalos a derecha e izquierda del punto singular)

Cuando identifica ejemplos de funciones de concavidad positiva:
Más tarde, al clasificar en ejemplos y no-ejemplos ciertos gráficos dados, reafirma su idea anterior:

B La sexta tampoco, en ésta estamos en la misma situación que acá (se refiere al ejemplo que había presentado antes), tiene un punto singular pero en el resto hay c+

Los comentarios de B en los dos párrafos previos se pueden interpretar como el uso de C_2* como condición necesaria: la no-existencia de la derivada segunda invalida la posibilidad de que la función sea de concavidad positiva, aunque ésta aparece como una característica puntual.

En la identificación de los ejemplos que aparecen en el guión no se le pidió a B que justificara su elección por lo que no podemos rescatar aquellas condiciones que valora como suficientes para la determinación de la concavidad positiva de una función.

Cuando trabaja con el teorema 1:
Analizando la validez de la prueba si se toman más de un intervalo en la partición de la base, comenta:

B Cualquier punto en que se me ocurra dividir en dos intervalos y dibuje la recta que une el extremo del intervalo con esto siempre me va a quedar esta recta por arriba y la función por abajo
Y A ver ¿cómo enunciarías la propiedad esa que me estabas comentando?
B **Si el intervalo varía entre un α y un β y vos tomás la recta que va desde $f(\alpha)$**

a $f(\beta)$ te va a quedar por arriba del gráfico de la función
Y De acuerdo, y eso ¿es para funciones de qué tipo según vos?
B Positivas... con c+
Y De acuerdo, entonces eso es una caracterización de las funciones de c+ similar a las otras que me habías dicho ¿no?
B Sí, en lugar de trabajar con la tangente que queda por abajo trabajo con la recta que queda por arriba

Aparece así D_1 utilizada como consecuencia de la concavidad positiva.

Cuando trabaja con el teorema 2:

Y ¿Cuál es el momento fundamental en que usas que la concavidad es positiva?
B Acá cuando trazás la tangente, o sea, en el paso intermedio y **estás segura que la tangente está por debajo** y por eso es por defecto

Aparece ahora C_1 utilizada como condición necesaria de concavidad positiva.

Entrevistado C

Cuando se le pide que defina una función con concavidad positiva:

El entrevistado presenta a C_1 como su "definición" personal:

Y ¿Qué quiere decir que una función tenga c+?
C **Está relacionado con la derivada**
Y ¿Cómo?
C Era cuando **la curva quedaba por encima de todas las tangentes**

Cuando identifica ejemplos de funciones de concavidad positiva:

Al enfrentarse al sexto gráfico de los que aparecen en la tercera parte del guión, afirma:

C Esta última... tiene este punto acá... donde no existe la derivada.
Y Me decís que no tiene derivada y ¿cómo relacionás esto con la concavidad?
C **El valor de la derivada tendría que ser positivo**...

C intentó aquí completar la idea que había mencionado cuando se le pidió por primera vez la definición de función de concavidad positiva: "*está relacionado con la derivada*". Estas caracterizaciones incorrectas de concavidad positiva pueden entenderse como una confusión entre los signos de las derivadas primera y segunda (E^{xx}) y también como una muestra de sobrevaloración de la derivabilidad como atributo de las funciones de concavidad positiva.

Cuando se le pregunta por qué clasifica al segundo gráfico como no-ejemplo, contesta:

C Porque el tramo éste de acá, la función, si yo manejo lo que estaba diciendo, **la curva quedó por debajo de la tangente**.

O sea que también usa a su caracterización C_1 como condición necesaria de concavidad positiva.

Cuando trabaja con el teorema 1:

Al adaptar este teorema a funciones de concavidad negativa, aparece el uso de D_1* como consecuencia de la concavidad positiva:

Y ¿Qué es lo que cambia entre aquel dibujo (se refiere a la ilustración que aparece como prueba del teorema 1) y éste (se refiere a la ilustración con que C acompaña al enunciado del teorema adaptado)?
C **La cuerda queda ahora por debajo de la curva**
Y Y en las de c+ ¿qué pasa?
C Quedó por encima
Y ¿Y eso se cumple en todas las funciones de c+, que la cuerda quede por encima?

C Sí

Cuando trabaja con el teorema 2:

Ante la pregunta por la necesidad de la hipótesis de concavidad positiva, responde:

C Acá **te queda la curva toda por encima de la... (señala la tangente)**

Y ¿Y si la función no fuera de c+?

C Te quedaría por debajo

Para el análisis de las hipótesis que se solicitaba, el estudiante tenía que recurrir a consecuencias de la concavidad positiva. Bajo condiciones de derivabilidad, al afirmar "si f no fuera de concavidad positiva alguna tangente a la curva quedaría por encima de la curva", estaríamos frente al uso de C_1 como condición suficiente para la concavidad positiva. El problema es que aquí el entrevistado usa como condición suficiente C_1^* que ya vimos que es necesaria pero no suficiente.

Entrevistado D

Cuando se le pide que defina una función con concavidad positiva:

El entrevistado presenta a $E^{\times}$ como su "definición" de este tipo de funciones

Y ¿Qué quiere decir que una función tenga c+?

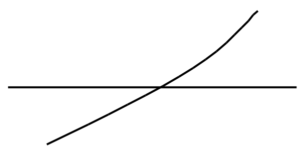
D Si en ese intervalo le hacés la derivada, el signo de esa derivada te quedaría... la **derivada es positiva después tiene un cero, después negativa**... Si fuera c- sería negativa, un cero y después positiva

Cuando construye ejemplos de funciones de concavidad positiva:

Dibuja una parábola como ejemplo:

D **La derivada** viene a ser la tangente en cada uno de los puntos entonces en este punto de acá (señala el mínimo) la tangente es cero y acá la tangente de este ángulo (señala un punto a la izquierda del mínimo) es negativa, y acá en este ángulo es positiva (señala un punto a la derecha del mínimo). **Sería negativa, después cero y después positiva**

Se puede observar que al enunciar esta caracterización de funciones de concavidad positiva ($E^{\times}$), D lee el signo de izquierda a derecha, y la usa como forma de verificar que su ejemplo es válido.



Mientras plantea lo anterior D hace un esquema del comportamiento de la derivada de una función de concavidad positiva que podemos interpretar como una puntualización de su "definición" personal.

Esta caracterización (que notaremos $E^{\times} \cap C_3$) es aún más exigente que la anterior ($E^{\times}$) y que la usual (C_3); con ella, por ejemplo, funciones como la exponencial no tendrían concavidad positiva.

Luego se le piden más ejemplos de funciones de concavidad positiva:

D De c+ también es la función constante... no... con mi definición de recién no

Y ¿Por qué? ¿qué le pasa a la derivada?

D Siempre es cero

Y O sea que según tu definición no pero a vos te parece que tendría que ser de c+

D Recuerdo que era las dos al mismo tiempo: de c+ y de c-, entonces esto está mal

Usa su caracterización como una condición necesaria para la consideración de ejemplos, aunque eso le plantea conflictos con su repertorio de ejemplos.

Cuando identifica ejemplos de funciones de concavidad positiva:

D **Según mi definición sería la primera y la cuarta**, nada más pero... la tercera podría llegar a ser cambiando un poco la definición...

En este párrafo se puede encontrar el uso de su caracterización como condición suficiente para aceptar como ejemplos las gráficas 1 y 4 y como condición necesaria al descartar los otros cuatro. También aparece como una posibilidad la modificación de la definición, esta oportunidad la aprovecha la entrevistadora para sugerirle una caracterización más adecuada (C_3) que no invalide los otros puntos sobre los que se quería recoger información.

Y Acá hiciste un dibujito (se refiere al diagrama del comportamiento de la derivada que aparece más arriba) que podría llevar a cambiar un poquito la definición...

D Esto sería el signo de la derivada

Y ¿Cómo viene la derivada? Vos dijiste negativa, cero, positiva pero en realidad dibujaste que era creciente… De repente no tenés que pedirle tanto

D **Pedirle que es creciente**, no positiva

Cuando trabaja con el teorema 1:

Y ¿Y podrá suceder que sea mayor (se refiere al área bajo la gráfica respecto a la aproximación dada por el MT)?

D No, porque tiene c+, nunca se va a ir para arriba

Y Y eso ¿por qué es?

D **Porque la derivada pasaría a ser decreciente, va subiendo y si se pasa de la línea va a tener que volver y va a tener que disminuir**… Por lo que dijimos recién **para la c+ tiene que ser siempre creciente la derivada**, entonces no va a poder... por más que haga vueltas nunca va a poder pasarse de esta línea porque tendría que volver sea como sea, entonces...

Más tarde se le vuelve a preguntar:

Y ¿Dónde fue que usaste que la concavidad fuera positiva? Para que la curva se mantuviera ¿por dónde?

D **Se mantuviera por debajo de la recta**…

Presenta aquí a D_1* como consecuencia de la concavidad positiva y argumenta que no D_1* implica no C_3, o sea que C_3 implica D_1*

Cuando trabaja con el teorema 2:

Presenta a C_1* como consecuencia de la concavidad positiva y argumenta que C_3 implica C_1*:

Y ¿Por qué se explica el mayor o igual que está acá entre el área naranja y el área azul?

D Si la concavidad sigue siendo positiva... **ni antes ni después va a poder la gráfica volver a pasar debajo de la tangente en ese punto... porque sino pasaría a ser la derivada decreciente** y dejaría de serlo... Entonces siempre va a quedar un área… o máximo, va a ser lo mismo...

Cuando trabaja con el teorema 3:

Menciona a U como condición necesaria de concavidad positiva:

Y El verde es mayor o igual que el naranja ¿por qué?

D Si es positiva (se refiere a la concavidad) **va a ser así (hace el gesto de que el gráfico tiene forma de U)**

Entrevistada E

Cuando se le pide que defina una función con concavidad positiva:

Y ¿Qué quiere decir que una función tenga c+?

E **Que la derivada segunda te da positiva, es como que ríe**. Sé que hay una definición bien pero no la manejo... Ah, **que la tangente si la hacés en cada punto te queda por arriba**…

Aparecen así C_2*, U y C_1 como sus caracterizaciones personales de las funciones de concavidad positiva. Aunque en el caso de C_1 no queda claro aquí quien queda por arriba si la tangente o la gráfica, entendemos que es la gráfica por el uso que hará de esta caracterización en su trabajo de construcción e identificación de ejemplos.

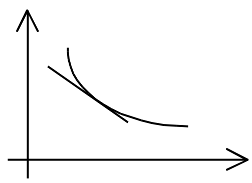
Vuelve luego a confundir en su discurso si es la curva la que queda encima de la tangente o al revés y menciona que existe una implicancia entre C_1 y C_2*:

Y Me diste dos definiciones de función de c+ ¿no? ¿cuáles son las dos que estamos manejando?

E Sí, una es que la tangente estaba por encima y otra es que la derivada segunda era positiva... pero ésta no es una definición, sale de la definición...

Cuando construye ejemplos de funciones de concavidad positiva:

Dibuja el gráfico que aparece en la figura y usa a C_1 como condición que le permite asegurar la concavidad positiva de su ejemplo:



E Vos sabés que es positiva… porque **si vos hacés en cada punto la tangente a la curva te queda por arriba**

Y ¿Qué te queda por arriba?

E La curva… este valor (se refiere al valor funcional) te queda por arriba de este otro, más alto

Cuando trabaja con el teorema 1:

Y Y eso ¿qué tiene que ver con la c+?

E Visualmente, la c+… si tú tenés una curva, entre la primera ordenada y la segunda, tenés como un hueco para adentro… si ponés una recta… estás sacándole área a esto, a esta figura…

Y Vos me estás diciendo que por ser de c+ la cuerda tiene una posición particular

E Sí, la cuerda tiene una posición… **la cuerda que está entre esta ordenada y ésta, está por afuera** digamos…

Y ¿Y eso de dónde sale? ¿eso se cumple siempre en funciones de c+?

E **Por definición de figura convexa… cualquier dos puntos que tomes de la figura trazás la cuerda, y tiene que quedar dentro de la figura**… si tenés una figura no convexa te puede pasar que tomes algunos dos puntos y al hacer la cuerda te van a quedar afuera de la figura, o sea, la definición de figura no convexa

Y De acuerdo pero ¿cómo relacionás lo de convexa y no convexa con la concavidad de la función?

E Tenés que llegar a demostrar que cuando tenés una cuerda… un intervalo de c+… y tomás **el área de abajo… te da una figura no convexa** y a partir de ahí podés demostrar esto

Y ¿En qué puntos de la prueba usaste fuertemente que la concavidad era positiva?

E No lo supe resolver bien, sé que es por el tema de figura no convexa pero... Tenés que demostrar que... **Es visual, como que estos tres segmentos** (se refiere a los segmentos incluidos en x=a, x=b e y=0) **y esta curva te crean una figura no convexa... que lo podés hacer tomando este punto y este punto y ver que la cuerda queda por afuera**

Entre las intervenciones anteriores podemos rescatar el uso de D_1* y $D_3^{\times}$ como consecuencias de la concavidad positiva de la función representada. También allí se ve que menciona que $D_3^{\times}$ implica D_1*.

<u>*Cuando trabaja con el teorema 2:*</u>
Aparece C_1 como una condición necesaria de funciones de concavidad positiva:

Y ¿Por qué el área naranja es mayor que el área azul?
E Esto es porque... **si uno traza la tangente en un punto a una curva con c+ la tangente va a quedar por debajo**...

Consideraciones finales

¿Qué caracterizaciones presentan los entrevistados?

	A	B	C	D	E
Ante el pedido de una definición personal	C_2*	C_1 C_2*	C_1	$E^{\times}$ $E^{\times} \cap C_3$	C_2* U C_1
Como condiciones necesarias (atributos relevantes, propiedades compartidas por todas las funciones de concavidad positiva)	C_2* D_1* C_1	C_2* D_1 C_1	$E^{\times\times}$ C_1 D_1*	$E^{\times}$ D_1* C_1* U	D_1* $D_3^{\times}$ C_1
Como condiciones suficientes (propiedades que bastan para asegurar la concavidad positiva de una función)	U C_3		C_1*	$E^{\times}$	C_1

- De lo anterior resalta la gran variedad de caracterizaciones que resultaron necesarias para el tratamiento de ejemplos gráficos y la interpretación de pruebas visuales (cinco distintas en el caso de A, tres en el caso de B, cuatro en el caso de C, también cinco en los casos de D y E).
  En oposición a este despliegue resalta la suficiencia de una sola caracterización requerida para la construcción e identificación de ejemplos dados por su expresión algebraica y para la comprensión de las pruebas analíticas de los mismos teoremas (dichas pruebas aparecen en la sección dedicada a las consideraciones relativas a los teoremas de aproximación del área bajo el gráfico de funciones de concavidad positiva)
- Destaca también del cuadro anterior la preferencia de los entrevistados por presentar como su definición lo que es, en realidad, una caracterización sólo aplicable bajo hipótesis innecesarias en el caso general (ej: la derivabilidad o la existencia de derivada segunda de la función en el intervalo en cuestión). Esta tendencia a dar como definición un criterio que en un contexto más amplio podría considerarse sólo una condición suficiente, también fue detectada por Rasslan & Vinner (1994) al pedir a un grupo de estudiantes preuniversitarios la definición de función creciente en un intervalo.
- Es interesante observar que salvo C los entrevistados intentan en algún momento vincular alguna de las caracterizaciones que presentan. En ese sentido destaca el trabajo de D y su uso de la caracterización C_3 (sugerida por la entrevistadora

después de un primer trabajo por parte del alumno con $E^{\times}$ y $E^{\times} \cap C_3$) para apoyar los argumentos centrales de las pruebas de los teoremas 1 y 2: D_1* y C_1*.

En el caso de D_1*, por ejemplo: "*porque tiene concavidad positiva nunca se va a ir para arriba (...) Porque la derivada pasaría a ser decreciente; va subiendo y si se pasa de la línea va a tener que volver y va a disminuir...* " Probablemente confunde por momentos el decrecimiento de la función y su derivada pero eso no invalida la intención de vincular su afirmación (D_1*) con lo que admitió como definición (C_3).

¿Dónde aparecen por primera vez esas caracterizaciones?

	A	B	C	D	E
Cuando se le pide que defina concavidad positiva	C_2*	C_1 C_2*	C_1	$E^{\times}$ $E^{\times} \cap C_3$	C_2* U C_1
Cuando construye ejemplos	U				
Cuando identifica ejemplos	C_3		$E^{\times\times}$	se le sugie-re use C_3	
Cuando trabaja con el teorema 1	D_1*	D_1	D_1*	D_1*	D_1* $D_3^{\times}$
Cuando trabaja con el teorema 2	C_1			C_1*	
Cuando trabaja con el teorema 3				U	

- La definición de función de concavidad positiva en la que se pide que si un intervalo está incluido en otro la cuerda del intervalo menor queda por debajo de la cuerda del intervalo mayor (D_2), que se requería en la prueba del teorema 3 (para asegurar en combinación con D_1 que el triángulo naranja tiene menor área que la región verde), no fue mencionada por ninguno de los entrevistados. Mientras tanto, que la definición D_1 y la caracterización C_1, requeridas en los teoremas 1 y 3, y 2 y 3 respectivamente, fueron mencionadas por todos.
- La definición D_1 aunque fue manejada por todos los entrevistados no apareció en ninguno de los casos en las primeras etapas de la entrevista sino recién cuando se hizo imprescindible durante la prueba del teorema 1.
- En cuanto a lo mencionado en los dos párrafos anteriores acerca de la primera aparición de ciertas caracterizaciones, creemos importante recordar la distinción dada por Balacheff para definiciones presentadas por alumnos en el contexto de la resolución de un problema, según respondan a razones endógenas o exógenas (en relación al problema).

  Entre las caracterizaciones presentadas por nuestros entrevistados encontramos ejemplos de los dos tipos. Entre aquellos que buscan reconstruir referencias reconocidas culturalmente o relacionadas con el saber escolar, tenemos el caso del entrevistado D que caracteriza a las funciones de concavidad positiva en base al recuerdo de su prototipo y al recuerdo de que esta noción de concavidad positiva estaba relacionada con la derivada en su experiencia escolar previa. Entre los que buscan explicitar la concepción en función de las exigencias de la conjetura, tenemos el ejemplo de la entrevistada E que en la prueba del primer teorema usa como caracterización una propiedad relacionada con la convexidad de la figura ($D_3^{\times}$) para poder asegurar que la cuerda queda por encima del gráfico.

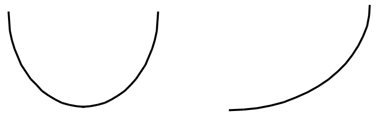
A3. Sobre ejemplos y no-ejemplos de funciones de concavidad positiva

De acuerdo a lo analizado en la sección dedicada a la definición (sección II.3.1), adquiere interés para nosotros completar la información que tenemos sobre los esquemas conceptuales de estos alumnos para las funciones de concavidad positiva con algo más que sus caracterizaciones verbales. En esta sección analizaremos el repertorio de ejemplos y no-ejemplos manejado por los entrevistados, ya sea en actividades de construcción como de identificación. Nos interesa especialmente detectar la existencia de atributos irrelevantes presentes en todos los ejemplos dados por un mismo estudiante y la existencia de funciones de concavidad positiva prototípicas.

Entrevistado A

<u>Cuando construye ejemplos de funciones de concavidad positiva:</u>

Dibuja dos gráficos como los que aparecen aquí a la derecha. (La "forma" del primer dibujo coincide con la de la mayor parte de funciones de concavidad positiva que representa gráficamente mientras analiza los teoremas)



También menciona a la función e^x y a cualquier polinomio "*con coeficiente del término en x^2 o superior positivo*" (aunque así generaliza incorrectamente lo que sería válido para polinomios de segundo grado)

Como no-ejemplo menciona la función constante "*porque la derivada segunda sería 0*"

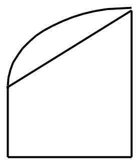
<u>Cuando identifica ejemplos de funciones de concavidad positiva:</u>

Señala como ejemplos a la primera, a la tercera y a la cuarta, y como no-ejemplos a las que efectivamente son no-ejemplos:

- la segunda: aquí comete un error al decir que "*tiene concavidad positiva desde el máximo en adelante*" cuando es en realidad más a la derecha donde se presenta la inflexión;
- la quinta: aunque la razón que invoca para descartarla como ejemplo: "*tendría el cero de la derivada que estaría por ahí*" (aun entendiendo que se refiere a la derivada segunda y que su caracterización de función de concavidad positiva exige que ésta no se anule) pierde peso frente a la existencia de un intervalo donde la derivada segunda es seguramente negativa;
- la sexta: aquí comete otro error al afirmar que "*hay un punto donde es discontinua*" y concluye que no existe ahí la derivada segunda, cuestión ésta que se desprende de la no derivabilidad en ese punto en que es continua.

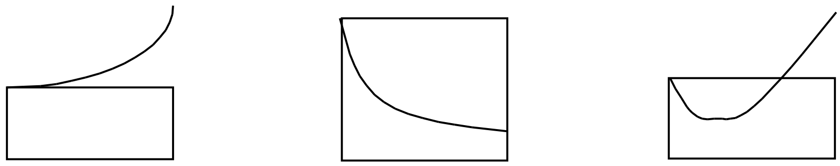
<u>Cuando trabaja con el teorema 1:</u>

Al analizar la necesidad de las hipótesis de concavidad positiva menciona como no-ejemplo de función de concavidad positiva a aquellas que poseen trozos donde la concavidad es positiva y otros donde la concavidad es negativa; también presenta algún gráfico como ser:



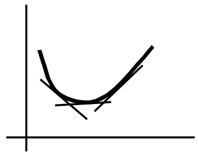
<u>Cuando conjetura sobre el tipo de aproximación ofrecida por el MR1 para funciones de concavidad positiva:</u>

Aparecen aquí más ejemplos (algunos de ellos involucrando funciones monótonas):



Entrevistada B

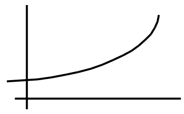
<u>*Cuando se le pide que defina una función con concavidad positiva:*</u>

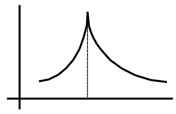


Aquí ya plantea un primer ejemplo, el que aparece a la derecha. (La "forma" de este primer ejemplo presentado coincide con la de la mayoría de las funciones de concavidad positiva que B grafica en el resto de la entrevista)

<u>*Cuando construye ejemplos de funciones de concavidad positiva:*</u>

Muestra, en uno de ellos, cierta incoherencia con su definición. Dibuja como ejemplos:





Y cuando se le pregunta respecto al último de los gráficos:

Y ¿Y en ese punto tiene c+?

B Bueno, acá no porque en este punto no existe la derivada segunda, en este punto no tiene c+ ni negativa, es singular... pero acá tiene c+ y acá (señala cada uno de los subintervalos a derecha e izquierda del punto singular)

<u>*Cuando identifica ejemplos de funciones de concavidad positiva:*</u>

Sólo clasifica cinco de los seis gráficos que aparecen en el guión: el primero, el tercero y el cuarto como ejemplos y el quinto y el sexto como no-ejemplos. Para este último comenta: "*estamos en la misma situación que acá* (se refiere al ejemplo anterior), *tiene un punto singular pero en el resto hay concavidad positiva*"

<u>*Cuando trabaja con el teorema 1:*</u>

Durante el análisis de la prueba, vuelve a aparecer el "ejemplo" conflictivo:

Y ¿Depende de que yo haya tomado esta figura, o para cualquier otro ejemplo de función de c+ se hubiera cumplido?

B A ver... por ejemplo... en éste que hice yo (señala su "ejemplo" de función de c+) tenemos un problema... al hacer un trapecio no me va a quedar por exceso...

Y ¿Y eso por qué será? ¿porque no es el mismo caso o porque la figura que vos tomaste no es ejemplo de función positiva de c+?

B A ver... la cuestión es que si hay algún punto como acá en el que la función vale más y no es ninguno de los extremos, me pasa eso... pero me parece que cualquiera que me tome en que no haya ningún punto "más alto", hablando mal... se va a cumplir el teorema

Y Me dijiste que una función era de c+ cuando las tangentes pasaban por debajo de la curva. En el ejemplo éste, si vos tomás la tangente ¿qué te pasa?

B Claro... corta a la curva

Y Entonces la función ¿vos podés considerarla de c+ en todo el intervalo?

B En todo el intervalo no porque de hecho hay un punto que...

Y Este ejemplo fallaba era porque en realidad éste no era...

B No era un ejemplo porque tiene un punto... sólo con ese punto me tiraba todo abajo

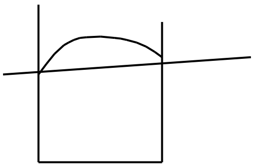
Cuando analiza las hipótesis de concavidad positiva, presenta no-ejemplos de función de concavidad positiva:

Y ¿Qué podrías decir del MT cuando la concavidad no es positiva?

B **¿Cuando no es positiva porque es negativa o cuando no es positiva porque tenés casos como ese** (señala uno de los ejemplos que incluye la tercera parte del guión)?

Y Los dos. A ver, primero cuando no es positiva porque es negativa

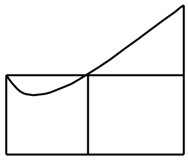
B Cuando tenés una función con c- el MT da... por defecto



Dibuja el gráfico de una función de concavidad negativa y la cuerda requerida para considerar el MT que queda por debajo de la cuerda.

<u>Cuando trabaja con el teorema 2:</u>

Al discutir las particularidades involucradas en el gráfico de la prueba, dibuja como ejemplo, una función donde coinciden los valores funcionales en el primer punto del intervalo y en el punto medio:



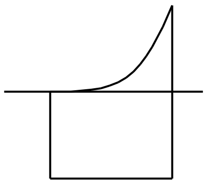
<u>Cuando conjetura sobre el tipo de aproximación ofrecida por el MR1 para funciones de concavidad positiva</u>

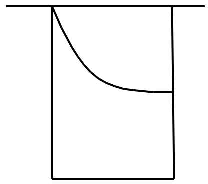
Insiste en un principio con el caso conflictivo:

Y ¿Cuál es tu conjetura en principio? ¿Qué va a dar: por defecto o por exceso?

B No sé... En ésta (señala el dibujo 6 de la tercera parte del guión, el cual ya hemos visto no corresponde a una función de c+) no sé si es por exceso o por defecto porque...

Luego se le pide que construya alguna función de concavidad positiva en que el MR1 le ofrezca una aproximación por exceso y otra que le dé por defecto y aparecen ahí algunos ejemplos nuevos de funciones monótonas con concavidad positiva. Dibuja y comenta:



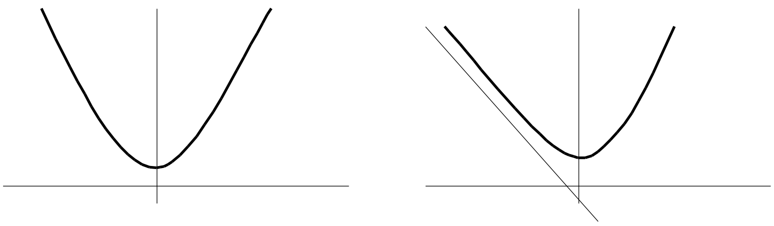


B En ésta va a dar por defecto y en ésta por exceso

Entrevistado C

<u>Cuando construye ejemplos de funciones de concavidad positiva:</u>

Dibuja los dos gráficos que aparecen a continuación apuntando que el primero de ellos (cuya "forma" coincide con la de la mayoría de funciones de concavidad positiva que aparecen en el resto de la entrevista) corresponde a una parábola e indicando, en el segundo, la presencia de una asíntota.



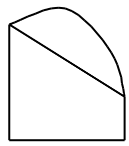
<u>Cuando identifica ejemplos de funciones de concavidad positiva:</u>

Entre las gráficas que aparecen en la tercera parte del guión, señala como ejemplos a la primera, la cuarta y la tercera. Como no-ejemplos menciona a las que efectivamente no son de concavidad positiva:

- la segunda: “*porque el tramo éste de acá* (señala el primer tramo), *la curva quedó por debajo de la tangente*”. Sin embargo, en otro momento se le preguntó: Una función como la del segundo ejemplo ¿qué tiene? ¿concavidad positiva o negativa? a lo que contestó: “*Tiene las dos*”.
- la quinta: cuando se le pregunta ¿En qué zona falla?, responde: “*Donde comienza la curva*”.
- la sexta: argumenta que no tiene concavidad positiva porque tiene un punto de no derivabilidad. Sin embargo, luego se desdice cuando se le vuelve a preguntar por la concavidad de esta función:

  Y Retomemos ahora con la última... ¿tiene c+ o no?
  C Sí...
  Y Por ejemplo si vos tomás la tangente en un punto donde empieza a subir por primera vez... ¿cómo te queda la tangente?
  C Acá te queda por debajo de la curva
  Y La tangente en este punto te queda ¿toda por debajo de la curva?
  C No.
  Y Entonces no va a ser de c+

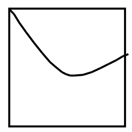
<u>*Cuando trabaja con el teorema 1:*</u>
Durante el análisis de la necesidad de las hipótesis se le piden no-ejemplos de funciones de concavidad positiva y C dibuja:

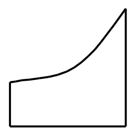


Y Tu función ¿es una función cualquiera o tiene una concavidad particular?
C Tiene concavidad negativa.
Y Pero ¿qué pasa para las que no tienen c+ ni negativa?

A partir de lo cual considera los casos de la función constante y de “una recta”, de lo que se deduce que C entiende como no-ejemplos de función de concavidad positiva a las polinómicas de primer grado.

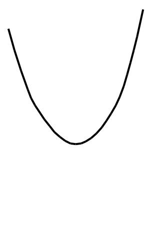
<u>*Cuando conjetura sobre el tipo de aproximación ofrecida por el MR1 para funciones de concavidad positiva*</u>
Se le pide que dibuje gráficos en que la aproximación ofrecida por el método sea por defecto y por exceso, y surgen allí algunos nuevos ejemplos, entre ellos el primer caso de función monótona con concavidad positiva.



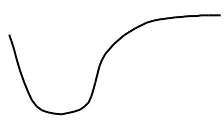


Entrevistado D

<u>*Cuando construye ejemplos de funciones de concavidad positiva:*</u>
Dibuja, primero un gráfico como el que aparece aquí a la derecha. La “forma” de este dibujo coincide con la de la mayoría de las funciones de concavidad positiva que representa gráficamente en el resto de la entrevista



También había dibujado otro gráfico:



Y ¿Qué pasaba con este ejemplo que empezaste a hacer acá?
D No tiene por qué ser así simétrica... pero... pero no puede hacerse constante acá... tiene que tener un mínimo y tiene que seguir yéndose...

Cuando identifica ejemplos de funciones de concavidad positiva:

D Si seguimos con lo mío (se refiere a su caracterización de las funciones de c+ en relación al signo de la derivada primera: negativo, cero, positivo) vendrían a ser estas dos (la primera y la cuarta) y ésta (la tercera) no sería completa

Y ¿Por qué descartaste las otras? ¿qué le pasaría al signo de su derivada? (mientras D señala la sexta murmura -, +, -, +, y algunas frases más) En ésta que es el sexto caso vos decís negativa, positiva y acá de vuelta negativa y positiva por eso la descartaste... La que seguro descartaste fue la segunda. La tercera estabas diciendo que te parecía de c+ pero no cumplía tu definición y con la quinta ¿qué pasaba?

D No, la quinta tampoco... según mi definición sería la primera y la cuarta, nada más pero... por ejemplo la tercera podría llegar a ser cambiando un poco la definición...

Después de modificar la definición hasta pedir crecimiento de la derivada primera, aclara la situación de la tercera gráfica y pasa a errar en la clasificación de la quinta:

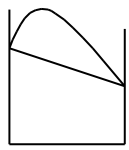
D Ésta (se refiere a la quinta función graficada) pasaría a ser... Este tramo de acá (se refiere al primer tramo) es positiva, después disminuye, capaz que llega a cero

Y Entonces ya no es creciente si era positiva y disminuye casi a cero...

D Pero ésta... la tercera, va aumentando siempre entonces tendría c+ y estas otras no **(señala la última función, refiriéndose a ella en plural)**

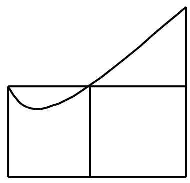
Cuando trabaja con el teorema 1:

Al analizar la pertinencia de la hipótesis de concavidad positiva menciona como no-ejemplo a la función constante y dibuja otro no-ejemplo, el de una función no monótona (atributo compartido por todos los ejemplos que construye):



Cuando trabaja con el teorema 2:

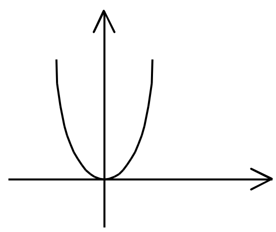
Mientras discute las particularidades involucradas en el gráfico de la prueba, dibuja como ejemplo, una función donde coinciden los valores funcionales en el primer punto del intervalo y en el punto medio:

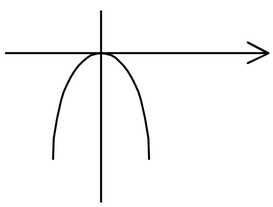


Entrevistada E

Cuando construye ejemplos de funciones de concavidad positiva:

Como ejemplos menciona "una parábola" y dibuja dos gráficos. Ambos tipos de gráficos son los que sigue manejando en los distintos dibujos que realizó durante la entrevista al pedido de representar gráficamente funciones de concavidad positiva





Como no-ejemplo de función de concavidad positiva dibuja una función de concavidad negativa como la que aparece a la izquierda y agrega:

E Toda, toda la concavidad negativa

Y ¿Sólo puede ser de c- para no tener c+?

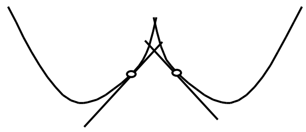
E No, puede ser… se supone que si hacés una recta… no sabría qué es una recta

Cuando identifica ejemplos de funciones de concavidad positiva:

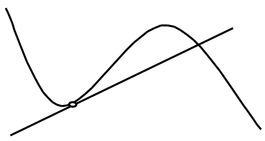
Luego de aclarársele que se le preguntaba por aquellos gráficos, que entre los seis que se le mostraba, tenían concavidad positiva en todo el dominio, clasifica sin problemas los cinco primeros casos y con algún titubeo el último:

E [La primera] tiene c+, [la segunda] tiene c- hasta acá y c+
Y ¿Y si yo hablo de todo el intervalo? ¿tiene c+?
E No... [La tercera tiene] c+... [La cuarta tiene] c+... [La quinta] no tiene c+... y **acá las dos tienen c+** **(se refiere a los dos tramos de la sexta gráfica)**
Y ¿Y en total, en todo el intervalo, tiene c+?
E Sí, todo el intervalo tiene c+ menos un punto
Y A ver, miremos tu definición... la tangente ¿cómo tenía que quedar?
E La tangente en un punto tiene que quedar por encima del... Ta... hay un punto en que... hay un punto que no tiene tangente
Y ¿Y si tomás un punto cercano que sí tenga tangente? ¿qué pasa con la...?

E dibuja la tangente que se le pedía que considerara sobre el sexto gráfico



E Si fuera tipo así... acá me queda bien y acá me queda bien
Y A ver en esta zona de acá (se le señala la prolongación hacia arriba del segmento de tangente que había trazado en su último dibujo)
E Ah, todo el pedazo de curva no me queda... ah, está mal aplicada la definición... ya entiendo lo que me querés decir, que no es toda la curva sino que es en los puntos de alrededor... como es una definición de "entrecasa" no está bien hecha... si la curva hace así acá hay puntos (de la curva) que me quedan por debajo

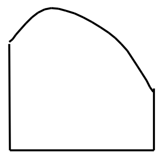


E dibuja una función que no tiene concavidad positiva en todo el intervalo considerado, marca una tangente y nota que no deja a todo el gráfico por encima de ella.

E Es que los puntos de acá (de la tangente), de este entorno, quedan por encima...

Cuando trabaja con el teorema 1:

Durante el análisis de las hipótesis aparecen como no-ejemplos: una mención a "las rectas" y un dibujo:



Cuando conjetura sobre el tipo de aproximación ofrecida por el MR1 para funciones de concavidad positiva

Argumenta que no se puede predecir el tipo de aproximaciones dada por el MR1 para funciones de concavidad positiva, presentando como ejemplo el caso de una función monótona con esa concavidad.

Consideraciones finales

- Como primeros ejemplos de funciones de concavidad positiva, todos presentan funciones cuyos gráficos podríamos asociar al dibujo de una "U".
  Los entrevistados A, B y E dan además ejemplos de funciones monótonas con concavidad positiva.

En la entrevista al estudiante C, los casos de funciones monótonas aparecen recién en la parte dedicada a conjeturas sobre el tipo de aproximación ofrecida por el MR1 para funciones de concavidad positiva.

En el caso del entrevistado D es especialmente notable la ausencia de funciones monótonas entre los ejemplos por él construidos (este tratamiento coincide con la primera caracterización que él presentó de este tipo de funciones, en la que se mencionaba la necesidad de la existencia de un mínimo relativo)

- Como no-ejemplos de función de concavidad positiva, todos presentan el caso de funciones de concavidad negativa.

  Para estos ejemplos de funciones de concavidad negativa, el entrevistado A sólo presenta ejemplos de funciones crecientes, los entrevistados B, C y D sólo ejemplos de funciones no monótonas y el estudiante E da ejemplos de funciones de concavidad negativa tanto monótonas como no monótonas.
- En la etapa de clasificación de ejemplos se apreciaron algunas dificultades que podrían indicar la interferencia de una imagen prototípica muy potente para función de concavidad positiva: la caracterización de una función de concavidad positiva como aquella cuyo gráfico tiene forma de "U" (esta caracterización fue presentada por los entrevistados A, D y E, y en dos de estos casos esa fue la primera que presentaron).

  Las dificultades a las que hacíamos referencia se expresaron en titubeos por parte de varios de los entrevistados al clasificar como ejemplo a la tercera gráfica: una función de concavidad positiva decreciente, y como no-ejemplo a la sexta gráfica: una función cuyo gráfico podría ilustrarse como "dos U unidas" y que parecería que algunos de los entrevistados (D y E, al menos) interpretan como la unión de dos gráficos.

  En el caso de la entrevista a B, el no-ejemplo que representa la sexta gráfica apareció en reiteradas oportunidades y siempre con carácter conflictivo respecto a su clasificación.
- Más allá de la monotonía, todos los ejemplos de funciones de concavidad positiva y negativa que presentan los entrevistados son funciones continuas y derivables. Aunque la continuidad se deduce del hecho de tener concavidad de signo constante, la derivabilidad en un atributo irrelevante a este tipo de funciones (basta considerar la función valor absoluto para convencerse de ello).
- La clasificación en ejemplos y no-ejemplos de funciones cuyas gráficas son rectas creemos que merece, por el tratamiento que le dieron los entrevistados, un estudio aparte.

A4. Sobre la clasificación de funciones cuyos gráficos son rectas como ejemplos o no-ejemplos de funciones de concavidad positiva

Tal como hemos comentado en la sección de dedicada a las definiciones, el carácter convencional de las mismas permite restringir su alcance, afectando así los conjuntos de sus ejemplos y sus no-ejemplos. También comentamos que mientras que las definiciones que usa la comunidad matemática suelen ser jerárquicas (y por tanto de máximo alcance), las preferencias de los estudiantes, sobretodo en cuestiones con fuerte componente visual, suelen ser particionales. En el apartado A1 hemos analizado este aspecto respecto a la inclusión de los rectángulos en el conjunto de ejemplos de los trapecios; aquí pretendemos analizarlo respecto a la inclusión de las funciones cuyos gráficos son rectas como ejemplos de funciones de concavidad positiva.

Entrevistado A

<u>*Cuando construye ejemplos de funciones de concavidad positiva:*</u>

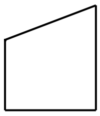
Menciona que "***no puede ser constante****… porque la derivada segunda sería 0*"

<u>*Cuando trabaja con el teorema 1:*</u>

Aunque la intención de la entrevistadora no era involucrar en la discusión ningún tipo específico de funciones, sino invitar al alumno a argumentar sobre la relación de desigualdad entre las áreas de los dos gráficos, se dio el siguiente diálogo:

Y ¿Y por qué se cumple el ≤ ese que aparece ahí?

A Porque **si considero una función que fuera recta** el área sería la misma



A lo que agrega el dibujo del trapecio, correspondiente al MT y al área bajo la gráfica simultáneamente.

<u>*Cuando trabaja con el teorema 2:*</u>

Al momento de leer el diagrama involucrado en la prueba, comenta:

A El área de la curva es mayor o igual que el área del trapecio... **el igual es siempre para que la función pueda ser constante o recta**... hace un trapecio en el punto medio y luego el área que queda por exceso aquí es igual al la que queda por defecto porque esto es medio...

Las dos últimas respuestas, que sugieren la aceptación por parte del entrevistado de que las funciones cuyas gráficas son rectas tienen concavidad positiva, no son coherentes con su respuesta analizada en el primer párrafo.

Entrevistada B

Durante la entrevista no menciona ni grafica funciones polinómicas.

Entrevistado C

<u>*Cuando trabaja con los teoremas 1y 2:*</u>

Después de haber modificado el teorema para funciones de concavidad negativa, se le pregunta:

Y Pero ¿qué pasa para las que no tienen c+ ni negativa?

C **Si tomo por ejemplo una constante** (dibuja una función constante), el MR_ me da el área real bajo la curva y acá el MT sería el rectángulo mismo

Y Esas aproximaciones no serían por exceso ni por defecto serían exactas

C El valor real... y después **en una recta**... (dibuja una recta de pendiente positiva)

Y Con la recta, el MT, ¿qué tipo de aproximación te da?

C Con esta de acá te da el valor real

Lo anterior sugiere que el entrevistado toma los polinomios de grado menor o igual a uno como no-ejemplos de funciones de concavidad positiva, sin embargo, en el próximo párrafo menciona a las funciones constantes como casos de funciones de concavidad positiva

<u>*Cuando conjetura sobre el tipo de aproximación ofrecida por el MR1 para funciones de concavidad positiva:*</u>

Y Viste que para funciones de c+ el MT aproxima por exceso y el MR_ aproxima por defecto, pero acerca de cómo aproximan el MR1 ni el MR2 ¿qué te parece? ¿qué tipo de aproximación da el MR1?

C Ahí sí, para mí va a depender de la curva
Y ¿Qué tipo de aproximación te puede dar?
C **Hay los dos casos... o igual en caso que sea una constante**

Entrevistado D

<u>*Cuando construye ejemplos de funciones de concavidad positiva:*</u>
Primero dibuja una gráfica de tipo “parabólico” y luego agrega:

D **De c+ también es la función constante... no... con mi definición de recién no**
Y ¿Por qué? ¿qué le pasa a la derivada?
D Siempre es cero
Y O sea que según tu definición no pero a vos te parece que tendría que ser de c+
D **Recuerdo que era las dos al mismo tiempo: de c+ y de c-**, entonces esto está mal

Cuando más adelante se le sugiere modificar su caracterización de las funciones de concavidad positiva, pasando de pedir que el signo de la derivada sea: negativo, cero, positivo a pedir que la derivada sea creciente, se decide por considerar a las funciones constantes como ejemplos:

Y Con esta definición la función constante aquella ¿cómo te queda su derivada?
D Es constante y por lo tanto es creciente como caso extremo de creciente... y entonces serviría...

<u>*Cuando trabaja con el teorema 1:*</u>
Mientras se refiere a que el MT aproxima por exceso al área bajo el gráfico, se le pregunta:

Y ¿Por qué es mayor?
D Porque hay una parte del área de la gráfica... el trapecio, hay una parte que la toma como área y que no es
Y ¿Siempre el trapecio va a tomar una parte del área que no es?
D No, puede no tomarla... ah, no, lo que pasa es que habíamos dicho que tiene c+... La pregunta que me habías hecho era si siempre iba a tomar y es sí. **Si es una recta la función,** el área va a ser igual

Lo que da a entender que también considera, junto a las constantes, a las funciones polinómicas de grado 1 como ejemplos de funciones de concavidad positiva. Lo mismo sucedió cuando trabaja con el siguiente teorema.

<u>*Cuando trabaja con el teorema 2:*</u>

Y ¿Por qué se explica el mayor o igual que está entre el área naranja y el área azul?
D Si la concavidad sigue siendo positiva... ni antes ni después va a poder la gráfica volver a pasar debajo de la tangente en ese punto... Entonces, siempre va a quedar, va a quedar un área, o máximo: va a ser lo mismo...

Sin embargo, en otro momento de la entrevista ubica este tipo de funciones como no-ejemplos de concavidad positiva:

Y Vos dijiste que había dos posibilidades para no tener c+, que una era tener c-…
D La otra es la de la constante

Entrevistada E

<u>*Cuando construye ejemplos de funciones de concavidad positiva:*</u>

Como no-ejemplos indica a las funciones de concavidad negativa y luego aparecen las funciones polinómicas de primer grado:

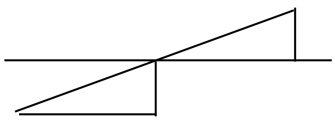
Y ¿Sólo puede ser de c- para no tener c+?
No, puede ser… se supone que si hacés una recta… **no sabría qué es una recta**
Y Con tu definición, a ver…
E Si tenés una recta… creo que no podés hallar la derivada segunda… no sé. La tangente a la recta es ella misma entonces no tienen c+ ni c-, porque no está por encima, está coincidiendo… o podés considerar que está teniendo al mismo tiempo c+ y c-.
Y Volvamos a lo que decías recién… ¿qué fórmula tienen las rectas?
E Y = mx+n o…
Y ¿Y cuando la derivas?
E Cuando la derivo… la m queda 0, mx queda m… y = m
Y ¿La derivada segunda?
E **La derivada segunda es igual a cero**
Y ¿Entonces?
E El 0 es un punto de inflexión entonces está constantemente teniendo un punto de inflexión, o sea que **está constantemente cambiando de concavidad, o sea que no es ni positiva ni negativa**

<u>*Cuando trabaja con el teorema 2:*</u>

También aquí considera no-ejemplos de concavidad positiva a este tipo de funciones:

Y ¿Son las únicas funciones que hay que no tienen c+, las de c-?
E No, están las... **la recta**... es como ridículo tomar... como que lo más normal es tomar el MR... es que es tan fácil tomar el área debajo de la gráfica según la figura que forma que es como ridículo...
Y De acuerdo porque el MT en este caso más que aproximar ¿qué hace?
E Está calculando el área
Y ¿Y el MR_?
E Hay punto medio... pero si es una recta así constante el MT es el MR porque el rectángulo era un caso particular de trapecio
Y ¿Y si no es una recta horizontal, si es oblicua y tomás el MR_?
E ¿Recta oblicua es esto?
Y No, recta pero con pendiente...
E Es el MT lo que te estás tomando...
Y Claro pero imaginate que querés tomar el MR_

E hace un esquema de cómo se relacionarían el trapecio involucrado en el MT y el área bajo la curva cuando ésta es una recta.



E La congruencia de este triángulo de acá con este de acá
Y ¿Qué te asegura la congruencia?
E Que es lo mismo tomar el MT que el MR

Consideraciones finales

- El único de los entrevistados que deja clara su posición respecto a la clasificación, según su concavidad, de funciones polinómicas de primer grado y de funciones constantes, es la entrevistada E. Ella asume una definición que excluye las funciones de derivada segunda nula como funciones de concavidad positiva y actúa coherentemente con esa definición. La pérdida de alcance en los teoremas estudiados que se podría considerar que provoca esta interpretación particional no es considerada por E como tal ya que ve "*ridículo*" hablar de aproximar un área que puede calcular de manera exacta.

  Sobre la entrevistada B no se tiene información respecto a este punto y los entrevistados A, C y D muestran comportamientos incoherentes en esta materia tratando estos casos como ejemplos o no-ejemplos según el momento.
- Comparemos la elección que realizan los entrevistados entre definición particional jerárquica para las definiciones de trapecio y de concavidad positiva

Entrevistado	Trapecio	Función de concavidad positiva
A	Definición jerárquica, con manejo coherente de ejemplos	Definición particional, con manejo incoherente de ejemplos. Las contradicciones se dan dentro mismo del tratamiento de ejemplos.
B	Definición particional, con manejo coherente de ejemplos. Luego, por propia iniciativa, admite la posibilidad de una definición jerárquica y reclasifica en ejemplos y no-ejemplos coherentemente	Da una definición particional (a menos que por positiva se entienda: no-negativa). Pero se carece de información sobre el manejo que, en este sentido, hace de los ejemplos.
C	Jerárquica en la definición, particional en el manejo de ejemplos. Enfrentado luego a un conflicto, explicita que su definición jerárquica y pasa a considerar al rectángulo como un trapecio.	Su definición parecería particional aunque no explicita, en la definición que da, si las desigualdades que menciona son amplias o estrictas. Su manejo de ejemplos muestra contradicciones.
D	Definición jerárquica, con manejo coherente de ejemplos	Comienza con un enunciado particional, luego se le sugiere que lo modifique e interpreta la nueva definición de manera jerárquica. Por otro lado, presenta contradicciones en el tratamiento de ejemplos
E	Jerárquica en la definición, particional en el manejo de los primeros ejemplos; luego se da cuenta de la incoherencia entre este tratamiento y su definición y pasa a un tratamiento jerárquico.	Definición particional, con manejo coherente de ejemplos

Se puede apreciar que mientras en la segunda columna predominan las definiciones particionales, en la primera columna y a nivel de los enunciados, predominan las jerárquicas. Creemos que esta constatación se condice con lo comentado en la sección dedicada a la definición, en el sentido que la preferencia de los estudiantes al definir nociones con fuerte componente visual se decantan por enunciados particionales. Lo que recoge la primera columna no contradice lo anterior puesto que el tratamiento de las definiciones de cuadriláteros particulares no es ajeno a las actividades de enseñanza que estos alumnos tuvieron en el pasado y por ese camino se incorporan las preferencias de la comunidad matemática respecto a definiciones de máximo alcance (aunque estas preferencias no se reflejen con la misma intensidad en el tratamiento de ejemplos).

IV.3.A Conclusiones del análisis con relación a las definiciones:

Respecto al alcance de las caracterizaciones:

- En el análisis de las entrevistas destaca la preferencia de los entrevistados por presentar como su definición de función de concavidad positiva una caracterización sólo aplicable bajo hipótesis irrelevantes (o sea, condiciones suficientes pero no necesarias como ser: que la función tenga derivada segunda positiva o no negativa, que la función tenga derivada creciente, o que todas las rectas tangentes al gráfico queden por debajo de éste).

- Resalta también una tendencia a presentar enunciados restrictivos que conducen a definiciones particionales de la noción de concavidad positiva. Podría sorprender la aparente disparidad entre esta tendencia detectada en el apartado A2 y la analizada en el apartado A1 en relación a la preferencia de los entrevistados por definir trapecios de manera jerárquica (incluyendo así a los rectángulos como casos particulares). Sin embargo, no creemos que se contradigan estas observaciones sino que van en la línea de lo mencionado en la sección dedicada a la definición: está documentada la preferencia por parte de los estudiantes por dar definiciones particionales para nociones con fuerte componente visual, como es el caso de la concavidad positiva y también el caso de los trapecios. La diferencia entre estas nociones se da en que la clasificación de los cuadriláteros está muy presente en el contexto escolar lo que permite que se incorporen a las preferencias individuales del alumno las de la comunidad matemática (al menos a nivel de enunciados).

Respecto a la variedad de caracterizaciones:

- Al analizar las entrevistas, se puede apreciar también la gran variedad de caracterizaciones movilizadas por el tratamiento de ejemplos gráficos y la interpretación de pruebas visuales. Esta variedad contrasta con la suficiencia de una sola caracterización (la etiquetada como C_2) para la construcción e identificación de ejemplos y para la interpretación de pruebas en que intervienen funciones expresadas algebraicamente, tal como lo analizamos en la sección IV.2

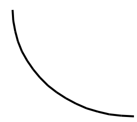
- A pesar de la gran variedad de caracterizaciones presentadas por cada uno de los entrevistados, no aparecen éstas totalmente desconectadas una de otras sino que en varios de los entrevistados se encuentran intentos por vincular deductivamente algunas de dichas caracterizaciones.

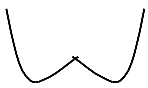
- Tampoco es el caso que todas estas caracterizaciones desplegadas por los entrevistados fueran conocidas previamente por ellos sino que se pudo detectar en sus apariciones dos tipos de fundamentos: o buscan referencias al conocimiento escolar previo o buscan explicitar la noción de acuerdo a la exigencia de la situación problemática que la involucra.

Respecto al repertorio de ejemplos:

- Con respecto al tratamiento de ejemplos de función de c+ vale mencionar la total ausencia de ejemplos en funciones no derivables y la presencia de “parábolas” entre los ejemplos compartidos por todos los entrevistados.

- Frente a la tarea de clasificar gráficos en ejemplos o no-ejemplos de funciones de concavidad positiva, también se pudo apreciar una identificación muy fuerte por parte de los entrevistados entre los ejemplos de funciones de concavidad positiva y aquellas cuyo gráfico se asemeja a una parábola. En esta tarea se produjeron ciertos titubeos de uno de los entrevistados al considerar como un ejemplo el gráfico que aparece aquí a la derecha (mientras lo descartaba comenta “*ésta no sería completa*”) y de la totalidad de los entrevistados al considerar como un no-ejemplo el gráfico que aparece aquí a la izquierda (recordamos como muestra el dialogo que se estableció a este respecto cono uno de los entrevistados: él dice “*acá las dos tienen c+*” refiriéndose a los dos tramos de la misma función y cuando la entrevistadora le repite que su pregunta refiere a todo el intervalo en que se halla definida la función, contesta “*sí, todo el intervalo tiene c+, menos un punto*”)





- Aunque al momento de construir ejemplos propios de funciones de concavidad positiva prevalecieron las funciones no monótonas, tres entrevistados también presentaron ejemplos de funciones monótonas. En el transcurso de la entrevista, la clasificación de ejemplos dados o la búsqueda de contraejemplos para afirmaciones falsas, llevó a uno de los entrevistados que aún no lo había hecho a incluir funciones monótonas en su repertorio de ejemplos de funciones de concavidad positiva.

- Vale destacar también la existencia de contradicciones en varios de los entrevistados al momento de clasificar funciones polinómicas de grado 0 y 1, en algunas ocasiones como ejemplos y en otras como no-ejemplos de funciones de concavidad positiva, mostrando así incoherencias en sus esquemas conceptuales. Incoherencias que a nuestro entender pueden explicarse por la distancia, ya comentada, entre las preferencias de matemáticos y aprendices con relación a las definiciones jerárquicas o particionales.

B1. Sobre la interpretación de los enunciados

Por interpretación de un enunciado entendemos el análisis que se realiza inmediatamente después de leer el contenido del mismo. En este apartado nos interesa rescatar el análisis realizado por los entrevistados en relación con los teoremas planteados e indagar si estas interpretaciones se adecuan a las que, en el ámbito de la comunidad matemática, involucran estas afirmaciones.

Se indagó este aspecto con relación a los teoremas 1 y 3. Especialmente en el caso del primer teorema se tomó la precaución de que la interpretación se realizara antes de tener ningún contacto con el diagrama involucrado en la prueba visual. El teorema 2 no fue analizado desde este punto de vista pues su enunciado exigía una interpretación muy similar al del teorema 1.

Entrevistado A

Teorema 1

Cuando después de leerle el primer enunciado, la entrevistadora le pregunta qué entiende al respecto, A le responde:

A **El área que te da el método es mayor que la integral de la función**
Y Que la integral, o sea...
A **El área**...

La intervención de A, además de mostrar una correcta interpretación del enunciado, exhibe a un estudiante que ha tenido experiencias previas con la noción de integral como medida del área bajo cierto tipo de gráficas, aunque éstas deben haberse dado fuera del ámbito escolar.

Teorema 3

No se tiene información respecto a este ítem debido a inconvenientes en la trascripción de esta parte de la entrevista.

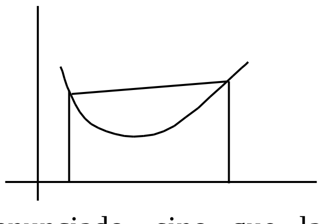
Entrevistada B

Teorema 1

A la pregunta sobre qué entendía con relación al primer enunciado, que se le acababa de leer, responde:

B Cuando vos calculás el área y estás tomando una figura... no va a ser el área exacta, va a ser una más chica o una más grande. Cuando estás tomando por exceso estás tomando más área que la que en realidad tiene la que estás calculando. Yo lo que entiendo es que tenés esta situación ¿puedo dibujar? **Tengo una función del lado positivo, con c+ y si hago el área del trapecio estoy tomando más de lo que es... por eso es por exceso.** Si la concavidad es positiva y vos vas de un extremo a otro del intervalo con un lado del trapecio, vas a tomar más que...

Así B, antes que se le hubiera mostrado cualquier diagrama relacionado con este teorema, dibuja algo muy similar a lo que aparece en el diagrama incluido en el guión para ilustrar y justificar este teorema:



Esto no sólo muestra una adecuada interpretación del enunciado, sino que la entrevistada es capaz de ilustrar gráficamente la situación planteada.

Teorema 3

Después de leerle el enunciado del tercer teorema, en lugar de indagar sobre la interpretación global que haría B, la entrevistadora le pregunta:

Y ¿Qué querrá decir que es menos ajustada?
B Que va a ser más exacto el resultado que tengas usando el MR_

Entrevistado C

Teorema 1

También C interpreta adecuadamente el enunciado del primer teorema, el cual se le acababa de leer:

Y ¿Tenés idea qué quiero decir con ese enunciado?
C Sí, **que superás el área real debajo de la curva**

Teorema 3

Al igual que con la entrevistada B, frente a la lectura del enunciado de este teorema, la entrevistadora se centra exclusivamente en una de las expresiones:

Y ¿Qué quiere decir eso de menos ajustada?
C En eso estaba pensando... que el MT se acerca más al valor real que... Pará... **el MR se acerca más al área real que hay debajo de la curva**...

Entrevistado D

Teorema 1

Tampoco este entrevistado plantea inconvenientes para interpretar el enunciado:

Y Para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aproximación por exceso del área bajo la gráfica ¿Qué entendés por eso, de sólo leerlo?
D Que **el área que te da el trapecio es mayor al área que vos querés medir**

Teorema 3

Debido a la fuerte intervención que hace la entrevistadora en este punto no es posible rescatar información de valor con relación a la interpretación de este enunciado por parte de D:

Y Teníamos que el MT ofrecía una aproximación por exceso y el MR_ por defecto, lo que dice este teorema es que el error que comete el MR es más chico que el que comete el MT, dice: para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aproximación del área bajo la gráfica menos ajustada que la que ofrece el MR_. O sea que lo que vamos a tomar es el error de la aproximación dada por el MT, el error de la aproximación dada por el MR y ¿cuál queremos ver que es más grande?
D El de la trapezoidal

Entrevistada E

Teorema 1

Cuando se le pregunta si entiende el enunciado que acaba de leer, lo deja muy claro:

E Sí, **si la función viene sonriendo y hacés un trapecio, el área que te da el trapecio es más grande que el área de la función... es más grande que el área que querés calcular**

Teorema 3

El caso de esta entrevista es el único en que la entrevistadora pide una interpretación global del enunciado del tercer teorema; después de leérselo le pregunta:

Y ¿Qué quiere decir eso?

E Que **si tomás el MT... el exceso es más grande** que si dividiéramos el intervalo en dos, en el punto medio y tomáramos el trapecio (se refiere al trapecio determinado por la tangente en el punto medio)

Y O sea que...

E **Acá el error es mayor** que si agarráramos...

Y No mires la demostración, primero el enunciado

E Dice que para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aproximación del área de la gráfica menos ajustada... o sea que el exceso es mayor que la que ofrece... ah, ta... **si vos tomás el MR_ éste va a tener un error por defecto pero el error va a ser más pequeño que el error de ésta**

Y Eso es lo que vamos a demostrar: el error del MT es más grande que el error del...

E Que el error del MR

Lo cual parece indicar que E establece unas relaciones entre los elementos mencionados en el enunciado, consistentes con las relaciones que matemáticamente éste establece.

Consideraciones finales

- La interpretación del enunciado del teorema 1 dada por los cinco entrevistados fue completamente adecuada. En el caso de la entrevistada B, especialmente, destaca que su comprensión del enunciado le permite construir por sí sola un diagrama que lo ilustre.

- En el caso del teorema 3:
  - no se tiene información sobre el entrevistado A (por los inconvenientes de la grabación) y es escaso lo que se puede concluir con relación al entrevistado D debido a la fuerte intervención de la entrevistadora en la interpretación solicitada;
  - con los entrevistados B y C se hizo énfasis únicamente en averiguar qué entendían por la expresión “menos ajustada”, pudiéndose comprobar que ambos efectivamente la interpretaban como “más alejada del valor real”;
  - la entrevistada E muestra, también en este teorema, una interpretación adecuada del enunciado.

B2. Sobre la lectura de los diagramas involucrados en las pruebas visuales

En este ítem analizamos la descripción dada por los entrevistados de los diagramas que aparecen en los distintos teoremas. Para este análisis nos servimos, además de la trascripción de las entrevistas, de la detallada descripción que realizamos de estos diagramas en la sección III.3.2.

En el caso del tercer teorema, por las características de la entrevista, resultó difícil discriminar entre la descripción de cada una de las partes del diagrama y la justificación de las desigualdades involucradas. Debido a ello, para este teorema, consideramos más adecuado restringir el análisis a la descripción de dos de las figuras del diagrama: la naranja y la celeste. El interés particular en estas dos figuras proviene de que en ellas aparecen elementos que, la inexistencia de más texto que el enunciado, obliga al entrevistado a desentrañar información implícita (por ejemplo, cuáles son los vértices del triángulo naranja o cómo quedan determinadas las tres rectas que se ven en la figura celeste).

Entrevistado A

Teorema 1

La descripción que hace este entrevistado de los gráficos incluidos en el diagrama es correcta:

A Una curva, luego **el área bajo esa curva hasta un eje trazado horizontalmente y en la segunda mitad**, lo mismo... no, un **trapecio formado por el eje y los dos puntos, el primero y el último de la curva**...

Teorema 2

Con respecto a qué ve en el diagrama que aparece como prueba de este teorema comienza diciendo:

A **Que el área de la curva es mayor o igual que el área del trapecio**... el igual es siempre para que la función pueda ser constante o recta... **Hace un trapecio en el punto medio**

Así describe los dos primeros gráficos que incluye el diagrama, deteniéndose en explicar por qué el signo que los relaciona es amplio y no estricto. Pero no se consideró suficiente su descripción del segundo gráfico, por lo que se le pide que explicite más su lectura del es gráfico:

Y ¿Cómo se forma la celeste?

A Tomando un punto medio... habría que ver que el mínimo parece que coincide con el punto medio... o más o menos... por lo tanto va a estar siempre por arriba de **la tangente**

Mientras que en los párrafos anteriores se registra la descripción del trapecio involucrado en la figura celeste y las dificultades planteadas por la cercanía del mínimo y el punto medio, no hay registro de la descripción de la región verde dada por este alumno, debido a la interrupción de la grabación de esta entrevista. También se perdió la información proveniente de la trascripción de su lectura del diagrama del tercer teorema.

Entrevistada B

Teorema 1

Describe correctamente los dos gráficos que aparecen en el diagrama e incluye en su descripción el signo de desigualdad que aparece entre ambos:

B Lo que se ve es **el área por debajo de la función** y **el área** ésta **del MT** que **es por exceso**... algo **más que el área que querés calcular** digamos...

Teorema 2

Cuando se le pregunta sobre qué hay en el primero de los gráficos que integran el diagrama, responde:

B **Una función positiva con c+ en que pintaste el área por debajo de la gráfica**

Su respuesta respecto al segundo gráfico también es correcta a pesar de algunos titubeos iniciales:

B No entiendo... o sea, usaste la ordenada del punto medio, pero **no hiciste un rectángulo sino un trapecio**

Y Un trapecio que está formado por ¿qué líneas?

B **Supongo que será la tangente por el punto medio**

Y Hay que suponerlo porque como es sólo dibujo dependés del dibujo nada más.
Y respecto al último gráfico dice:
B **En el tercero hiciste el MR_**

Teorema 3
Cuando se le pide que indique cómo está determinado el gráfico pintado de naranja, dice:
B Tomaste el mínimo y **uniste un extremo y el mínimo y el otro extremo y el mínimo** y te quedó
Aquí se aprecia la confusión entre el punto en que se alcanza el mínimo y el punto medio del intervalo, no se le señala esa confusión en este momento sino cuando describe el gráfico pintado de celeste:
Y Pasemos al celeste ¿qué aparece ahí que hay unas rectas nuevas?
B **La tangente por el punto medio que parece coincidir con el mínimo**
Y No debería ser el mínimo porque mirá cómo queda la tangente
B Ah, claro, **si fuera el mínimo quedaría así** **(dibuja en el aire una recta horizontal)**… **la tangente por el punto medio, la tangente por uno de los extremos del intervalo y la tangente por el otro de los extremos del intervalo**...
La entrevistada B llama "*tangente por uno de los extremos del intervalo*" a lo que sería la recta paralela a la tangente anterior por uno de los extremos del intervalo.

Entrevistado C

Teorema 1
Cuando se le pide que describa el diagrama, en su respuesta indica, sin inconvenientes, qué representa el gráfico naranja y su relación con el amarillo, el cual no describe:
C Acá **(figura naranja)** **está cubriendo toda el área bajo la curva** y acá **(figura amarilla)** está... **por exceso**... **está cubriendo más que el área**...

Teorema 2
El primer comentario que hace cuando se le pide la descripción de este diagrama es que en la figura del medio no está el MR. La entrevistadora le responde que "esa es una figura auxiliar intermedia" y le pide que comience explicando qué está pintado en el gráfico naranja.
C **Toda el área de debajo de la curva**.
Y ¿Y en la verde? **El rectángulo tiene ¿qué altura?**
C **La mitad de la coordenada… de la abscisa**
Y **La ordenada de ese punto**... Y ¿qué figura es la celeste?
C **Un trapecio**
Y ¿Qué es lo que limita al trapecio? ¿qué recta es esa?
C **Esta recta es la tangente a la curva en el mínimo**
Y En el mínimo no, porque si fuera en el mínimo ¿cómo sería la tangente?
C Ah, está bien... horizontal
Como se ve, la descripción de este entrevistado ha sido muy pautada por las preguntas directas de la entrevistadora. De todas maneras, en sus intervenciones se aprecia que interpreta sin errores los tres gráficos, con excepción de la distinción entre punto medio y punto donde se alcanza el mínimo y de la escasa precisión con que indica la altura del rectángulo verde.

Teorema 3
Primero se le pide que describa el gráfico pintado de naranja:

C Está formada por un triángulo que está contenido en la...
Y Dentro del área verde... bien... el vértice del triángulo está en...
C **El punto medio**

En el caso de la figura celeste se le pide que identifique las rectas nuevas que allí aparecen

C Son **la tangente por el punto medio y las paralelas por acá**...
Y Por los extremos... perfecto...

Entrevistado D

Teorema 1

La descripción que hace D de este diagrama es completa:

D La primera parte sería **el área bajo la curva**: lo que queremos hallar, la exacta. La otra: **la aproximación que te da el MT**, y dice **que es mayor el área del MT, que el área que queremos hallar**.

Teorema 2

Se le propone que describa, uno a uno, cada gráfico incluido en el diagrama:

D En el primero **el área que queríamos nosotros hallar**
Y Dice que eso es mayor o igual que el segundo y en el segundo ¿qué está dibujado?
D En el segundo no tenemos el promedio de... los extremos... sería un área... son dos rectángulos
Y A ver ¿qué punto es éste?
D **El punto mínimo... no, no el mínimo, el punto medio**
Y Sí, que en este caso está muy cerquita del mínimo pero que no es el mínimo porque ¿qué es esta recta que aparece ahí?
D Esa es la derivada... la tangente
Y Ahí está y la tangente no es horizontal así que no es el mínimo
D No

Como se ve, también este estudiante presenta dificultades para distinguir el punto medio del punto donde se alcanza el mínimo.

Y Aparece la tangente, tenés éste que es el punto medio y lo que hay pintado ¿qué es?
D **El área bajo la curva de la derivada en ese punto**
Y En el punto medio...

Aquí debió referirse al área bajo la tangente en el punto medio y no bajo la gráfica de la derivada, la cual no sería una recta precisamente.

Y En el verde ¿qué es lo que hay dibujado?
D Está el área bajo... podría ser... **el área bajo la función constante que pasa por el "f" del punto medio**
Y Perfecto, o sea que si es el área que tenés debajo de la constante es el área del rectángulo ¿no?
D Ah, claro... ya veo... yo no había entendido lo del MR_, yo pensaba que es el punto medio usando el promedio entre este y este punto (señala (a,f(a)) y (b,f(b)))

El entrevistado comenta así sus inconvenientes con la interpretación de la expresión punto medio en el contexto del MR_, inconveniente que la entrevistadora no había detectado hasta el momento.

Teorema 3

Explica correctamente qué observa en el gráfico pintado de naranja:

D Es un triángulo, entonces: el primer punto, el punto medio y después el segundo punto

Y también lo hace bien al identificar las rectas que aparecen en el gráfico celeste.

D Estas rectas son… la última, **la de más abajo sería la tangente a la curva en el punto medio y las otras serían las paralelas a esa por el primer y el último punto**

Entrevistada E

Teorema 1

Describe de la siguiente manera lo que ve en el diagrama:

E **En una función con c+, el área bajo la gráfica y el área que da el MT**

Y Y hay un símbolo en el medio ¿qué representaría?

E **Es un 4**

Y No, es un ≤

E Que **el área abajo de la gráfica de una función con c+ es menor o igual al área que obtenemos con el MT**

Lo que indica una completa lectura del diagrama correspondiente a la prueba del primer teorema.

Teorema 2

Se le pide que describa el diagrama y comenta:

E Acá tengo que **el área por debajo de la curva** de una función con c+ es mayor o igual que el área por debajo de la curva… acá (señala la tercera figura) esto sí es **el rectángulo por el punto medio** pero esto (señala la segunda figura) es otra cosa, esto es algo así como que se construye un rectángulo por el punto medio y después se toma una distancia para acá y una para acá (se refiere a los segmentos que unen los lados del trapecio y el rectángulo que aparecen en la figura) y se hace otro trapecio diferente

Y Claro como es una demostración visual dependemos de la interpretación porque no tenemos texto que nos diga cómo la tomamos

E Claro, acá **lo que hacen es trazar la tangente**

Aquí se ve que E identifica primero las gráficas de los extremos por su vinculación con el enunciado, le cuesta algo más identificar el gráfico central pero lo logra sin ayuda. A continuación, resume lo que ha descrito hasta el momento y plantea una duda respecto al punto medio:

E O sea, esto (se refiere a la figura naranja) es el área por debajo, esto es mayor o igual que el MR_ porque acá estás viendo que este punto es el punto medio de estas dos ¿no? Pero ¿es el punto medio de la altura o es el punto medio de la…?

Y Es el punto medio de la base

Teorema 3

Describe la zona naranja de la siguiente manera:

E Esta cuerda la dejamos igual, tomamos **el punto medio de la curva** y hacemos entre la primera ordenada y el punto medio, entre el punto medio y la segunda ordenada...

Vale señalar la particular forma en que se refiere al punto $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$: el punto medio de la curva.

Luego se le pregunta qué son esas rectas que aparecen en el gráfico celeste:

E Las paralelas, ésta es la tangente

Y La tangente en el punto medio

E Ésta es **la paralela a la tangente por un punto de la primera ordenada y ésta es la paralela a la tangente por la segunda ordenada**

Consideraciones finales

- La descripción del diagrama involucrado en el primer teorema, fue realizada correctamente por los cinco entrevistados; o sea, todos ellos explican qué representa cada una de las zonas coloreadas y mencionan la relación que el signo de desigualdad establece entre ellas.

  Hay algunas pequeñas excepciones (el entrevistado A no menciona la desigualdad, D en un primer momento malinterpreta el signo confundiéndolo con un cuatro y C no hace referencia a cómo se forma el gráfico amarillo), pero estos detalles no influyen en la idea de que la lectura del primer diagrama es una tarea que no ofrece mayores dificultades a los entrevistados.

- Sin embargo, en la descripción de los diagramas que aparecen en las pruebas de los otros dos teoremas se apreciaron algunas dificultades:
  - Con relación a los atributos irrelevantes del diagrama: cuatro estudiantes (A, B, C y D) identifican en un primer momento el punto medio del dominio como el punto donde se alcanza el mínimo, haciendo poco caso a la mención que hace del punto medio el enunciado y al hecho de que, por más cercanos que aparezcan en el gráfico, la tangente en ese punto tiene pendiente positiva. Es de hacer notar que salvo C, los otros tres estudiantes se rectifican ellos mismos y casi de inmediato.
  - Con relación al MR_: algunos estudiantes (C, D y E) parecen presentar algún inconveniente al tratar de interpretar que el punto medio al que alude este método indica que se considera un rectángulo cuya altura es el valor funcional del punto medio del intervalo de la base.

B3. Sobre la verbalización de los argumentos visuales requeridos en las pruebas que aparecen en las entrevistas

Comencemos analizando los requerimientos que en este sentido involucran cada uno de los teoremas que aparece en el guión de la entrevista.

- En el teorema 1 se requiere, para justificar que el área naranja es menor o igual que el área amarilla, el uso de un argumento de inclusión apoyado en que la concavidad positiva asegura que las cuerdas están por encima del gráfico (Esta caracterización fue identificada como D_1 en la sección: Consideraciones desde un punto de vista matemático y en el apartado A2 del presente análisis)
- En el teorema 2:
  - Para justificar que el área naranja es mayor o igual que el área celeste, se requiere el uso de un argumento de inclusión basado en que la concavidad positiva asegura que las tangentes (cuando existen) están debajo del gráfico (Esta caracterización fue identificada como C_1).
  - Para justificar que el área celeste es igual al área verde el argumento se apoya en la congruencia de dos triángulos. En el contexto de este trabajo consideramos que esta cuestión no tiene mayor interés y, salvo mencionar aquí que los cinco entrevistados lo justificaron correctamente, no nos detendremos en este punto.

- En el teorema 3:
  - Es necesario que el estudiante interprete el área de la región verde como el error de aproximación ofrecida por el MT (todos los entrevistados interpretaron correctamente esta igualdad por lo que tampoco nos detendremos en el análisis de este punto).
  - Para justificar que el área naranja es menor o igual al área verde, es requerido un argumento de inclusión apoyado en que la concavidad positiva asegura, no sólo que las cuerdas correspondientes a cada mitad del intervalo están por encima de la curva, sino también que la cuerda correspondiente al intervalo mayor está por encima de las otras dos cuerdas (Esto podría ser asegurado en base a una caracterización de función de concavidad positiva como por ejemplo la identificada con D_2).
  - También están involucrados argumentos que justifiquen la igualdad de las áreas celeste, gris y roja, basados en la congruencia de ciertos triángulos, los cuales tampoco analizaremos con más detalle que la mención de que todos lo realizaron correctamente.
  - Para justificar que el área roja es mayor o igual que la amarilla se pone en juego un argumento de inclusión basado en la posición de las cuerdas respecto al gráfico en funciones de concavidad positiva (D_1). Dado que el argumento de base se repite en otros momentos de la entrevista creemos que, analizar la justificación de esta desigualdad, no aportará elementos nuevos.
  - Por último, se requiere la interpretación del área de la región amarilla como el error de la aproximación ofrecida por el MR_. El interés por atender cómo los entrevistados tratan este punto radica en el uso que exige de "conocimientos adquiridos" durante la prueba del teorema 2.

En este apartado nos centraremos en analizar los argumentos que intervienen y las caracterizaciones de función de concavidad positiva que movilizan las justificaciones de las siguientes relaciones:

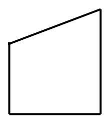
- En el marco del teorema 1: la desigualdad entre el área bajo la gráfica y el área del trapecio.
- En el marco del teorema 2: la desigualdad entre el área bajo la gráfica y el área bajo la recta tangente (más en general: la recta de apoyo) en el punto medio.
- En el marco del teorema 3: la desigualdad entre las áreas verde y naranja y la igualdad entre el área amarilla y el error que da el MR_ al aproximar el área bajo el gráfico.

Entrevistado A

Teorema 1: ¿Por qué el área bajo la gráfica es menor o igual que el área del trapecio?

A Porque **si considero una función que fuera recta el área sería la misma**

A dibuja el trapecio en que se transformaría la región naranja si la función tuviera por gráfico una recta, ilustrando así su afirmación anterior



Y Ah, eso es por qué sería el =, perfecto pero ¿por qué se cumple el <?
A Porque **esta figura está incluida en la otra**

Luego explicita más su justificación de la inclusión de una figura en la otra, lo hace invocando la propiedad D_1* para funciones de concavidad positiva:

A La idea es que **la recta que une la función en los extremos del intervalo, esté por arriba de la curva, lo cual queda asegurado por la c+**...

Teorema 2: ¿Por qué el área bajo la gráfica es mayor o igual que el área bajo la tangente?

A Porque **el área celeste está incluida en la naranja**

Y Bien pero ¿cómo se forma la celeste?

A Tomando un punto medio... **va a estar siempre por arriba de la tangente** entonces esta área... nunca va a quedar por arriba **sino tendría que hacer así** (hace un gesto con la mano indicando el comportamiento que tendría la función si pasara bajo la tangente) **y en algún punto tendría c-**

O sea que A menciona los dos elementos que se esperaba destacaran los entrevistados: la inclusión de una figura en otra y la propiedad C_1 como garantía de dicha inclusión. Cabe agregar que, antes, mientras describía el diagrama había comentado "*el igual es para que la función pueda ser constante o recta*".

Teorema 3:

Aunque la información sobre este entrevistado respecto a este teorema no procede de la trascripción directa, por fallas en la grabación de la última parte de la entrevista, podemos comentar que sus argumentos fueron los siguientes:

- la zona verde tiene mayor área que la naranja pues como en cada mitad es de concavidad positiva la cuerda queda por encima de la gráfica y "por lo tanto" el triángulo queda incluido en la zona verde (lo cual no queda completamente justificado con la propiedad D_1 que menciona)
- el error del MR_ es la zona pintada de amarillo porque "horizontalizo" la tangente y me queda el error entre el rectángulo por el punto medio y la curva (lo cual sugiere mediante un argumento "dinámico" la congruencia de las regiones).

Entrevistada B

Teorema 1: ¿Por qué el área bajo la gráfica es menor o igual que el área del trapecio?

B Lo que entiendo es que tenés esta situación: una función del lado positivo, con c+ y si yo hago el área del trapecio **estoy tomando más de lo que es**... por eso es por exceso... Si la concavidad es positiva y vos vas de un extremo a otro del intervalo ese que te interesa, con un lado del trapecio, con una recta, vas a tomar más...

Más tarde explicita su argumento basándose en la propiedad D_1:

B Cualquier punto en que se me ocurra dividir en dos intervalos y dibuje la recta que une el extremo del intervalo con esto siempre me va a quedar esta recta por arriba y la función por abajo (Pausa) O sea, **la recta que une los extremos de lo que tome como subintervalos divididos siempre va a estar por arriba del gráfico**...

Teorema 2: ¿Por qué el área bajo la gráfica es mayor o igual que el área bajo la tangente?

B Cuando dije lo que era c+ dije que **la tangente quedaba por debajo del gráfico** de la función entonces queda todo este pedazo que no está considerada

Aquí se puede apreciar que la base de su argumento es C_1.

Teorema 3:

Y ¿Por qué es mayor el área verde que el área naranja?

B Porque sabés que si te tomás un intervalo... **tomás la cuerda que une los**

extremos de ese intervalo y estoy dejando... a ver, **si lo miro al revés** (da vuelta la hoja) **es como si tuviera una con c- y tomara la aproximación del MT que daría por defecto**

Y Acá es igual (da vuelta la hoja a la posición original), la cuerda está por encima de la curva y entonces...

B Entonces estoy reduciendo el error, o sea el verde tiene más error que el naranja

Aunque con algunos rodeos basa su razonamiento en la propiedad D_1, que como ya comentamos en el caso del entrevistado A, no es suficiente.

Y Y el área amarilla ¿por qué es el error de la aproximación del MR_?

B **Era el paso celeste de acá (señala la prueba del segundo teorema)** te tomabas el rectángulo por el punto medio y veías que el triangulito que te quedaba acá era igual al de acá

Aquí la mención a lo aprendido en la prueba del teorema previo es explícita.

Entrevistado C

Teorema 1: ¿Por qué el área bajo la gráfica es menor o igual que el área del trapecio?

C Porque acá (figura amarilla) estás cubriendo la misma área y además todo lo que tenés arriba

Luego agrega:

C **Una figura está contenida dentro de la otra**... entonces el área es menor siempre

Cuando se le pregunta por la necesidad de la hipótesis de concavidad positiva en este teorema y luego de varias insistencias de la entrevistadora, C responde que la cuestión pasa por el hecho de que **la cuerda queda encima de la curva**.

Teorema 2: ¿Por qué el área bajo la gráfica es mayor o igual que el área bajo la tangente?

C Porque... **le falta cubrir toda esta parte de acá de la curva**... y la figura ésta de acá (figura celeste) es menor siempre

Cuando se le piden argumentos para asegurar la inclusión mencionada en el caso de funciones de concavidad positiva, responde:

C Acá te queda **la curva toda por encima de la... (señala la tangente** en la figura celeste)

Teorema 3:

En el contexto de la comparación de los gráficos naranja y verde, justifica como los otros entrevistados, de manera incompleta:

Y ¿Por qué el área naranja es más chica que el área verde?

C Y porque acá la curva está quedando debajo de lo que está limitando el triángulo.

Y De acuerdo y eso ¿por qué es?

C Porque tiene c+.

Y con relación a la última igualdad involucrada en la prueba, menciona la relación existente con lo probado en el teorema anterior

Y Ahora dice que eso que está pintado de amarillo es el error ofrecido por la aproximación del MR_ ¿eso por qué será? (Pausa)... El rectángulo por el punto medio no está.

C Sería éste de acá **(señala las figuras de la prueba del teorema anterior)** Hago acá el rectángulo...

es lo que pasa acá (señala el segundo teorema) lo que no cubre acá lo cubre de este lado y sobra la misma cantidad.

Entrevistado D

Teorema 1: ¿Por qué el área bajo la gráfica es menor o igual que el área del trapecio?

D Porque hay una parte del área de la gráfica... **El trapecio hay una parte que la toma como área y que no es**
Y Y ¿siempre el trapecio va a tomar una parte del área que no es?
D No, puede no tomarla... **Si es una recta la función, el área va a ser igual**

De esta parte rescatamos su comentario acerca de las condiciones por las que la desigualdad entre los gráficos debe ser amplia y no estricta. A continuación se indaga sobre el sentido de la desigualdad:

Y ¿Y podrá suceder que no sea menor o igual, que sea mayor?
D No, **porque tiene c+, nunca se va a ir para arriba**
Y Y eso ¿por qué es?
D **Porque** la derivada pasaría a ser decreciente, **va subiendo y si se pasa de la línea va a tener que volver y va a tener que disminuir**

Donde vemos que su argumento se apoya en la propiedad D_1 que a su vez fundamenta en la propiedad C_3.

Teorema 2: ¿Por qué el área bajo la gráfica es mayor o igual que el área bajo la tangente?

D A ver... si la concavidad sigue siendo positiva... **ni antes ni después va a poder la gráfica volver a pasar debajo de la tangente** en ese punto... porque sino pasaría a ser la derivada decreciente y dejaría de serlo... Entonces ta, por eso, siempre va a quedar, va a quedar un área o máximo va a ser lo mismo... por eso
Y Vos me dijiste que la gráfica nunca va a pasar a estar debajo de la tangente ¿entonces?
D Entonces siempre va a haber un área que no va a cubrir, el área de la parte azul no la va a cubrir, que pertenece al área que queríamos nosotros encontrar... o como máximo no va a existir el área pero nunca va a ser mayor

Nuevamente el argumento de fondo que él explicita es C_3, sobre él apoya la propiedad C_1 y sobre ésta la desigualdad amplia entre las áreas coloreadas.

Teorema 3:

Cuando se le interroga sobre la relación entre las áreas verde y naranja, responde restringiéndose a la necesidad de la caracterización D_1 (cuya validez apoya en C_3):

D Si es positiva va a ser así (hace un gesto como que el gráfico tiene forma de U)
Y ¿Qué quiere decir eso?
D Que siempre va a existir un área por encima de la curva que no está incluida en el triángulo porque… **si existe un área que estuviera por debajo del área de la curva, y estuviera dentro del triángulo en algún momento la derivada no sería creciente**

Y por último, muestra su aprendizaje en el análisis del teorema 2 y una compresión clara de qué es el error del MR_:

Y Nos dicen que la amarilla es el error de la aproximación ofrecida por el MR_ ¿Por qué es?
D Sí, eso es porque según el MR…el área es lo de abajo de esa línea (se refiere a la

tangente)

Y Pero el MR es con un rectángulo y ahí no hay un rectángulo

D No, lo que pasa es que el rectángulo pasaría por el punto medio de la función y después… **nosotros habíamos demostrado que es lo mismo el área del rectángulo que pasa por el punto medio que la del trapecio tangente a la curva por ese punto entonces… el área bajo esa es lo que mide el MR y la parte amarilla es la que no mide pero nosotros queríamos medir, entonces la parte amarilla es el error**

Entrevistada E

Teorema 1: ¿Por qué el área bajo la gráfica es menor o igual que el área del trapecio?

E Porque **como tiene c+ acá hay todo un pedazo que está pintado y acá no, acá estás tomando sólo el área de abajo de la gráfica y acá no**…

Y Y eso ¿qué tiene que ver con la c+?

E Si tenés una curva, **entre la primera ordenada y la segunda, tenés como un hueco para adentro**… si ponés una recta… estas sacándole área a esto, a esta figura…

Y Vos me estás diciendo que por ser de c+ la cuerda tiene una posición particular

E Sí, **la cuerda** está entre esta ordenada y ésta, **está por afuera** digamos…

Hasta aquí vemos que E ha justificado la inclusión en una formulación bastante primitiva de D_1, la cual, como analizamos en el apartado A2, se apoyaba en una caracterización de las funciones de concavidad positiva relacionada con la no-convexidad del conjunto de puntos por debajo del gráfico.

Teorema 2: ¿Por qué el área bajo la gráfica es mayor o igual que el área bajo la tangente?

E Si se puede decir que si uno traza la tangente en un punto a una curva con c+ la tangente va a quedar por debajo...

Y Esa es tu definición

E Sí, si es cierta esa definición... entonces acá esto es una figura no convexa... pero ésta sí es una figura convexa... La idea es que como esto (se refiere a la curva) queda por encima te estás tomando un pedazo más chico de área que el total de la figura... O sea que si hacés así y vos tomás la tangente te estás tomando un pedazo para abajo entonces te estás tomando un pedazo más chico

A pesar de seguir enredada en caracterizaciones relacionadas con la convexidad de ciertos conjuntos, se rescata que la idea base del razonamiento es la propiedad C_1, tal como se aprecia más claramente en la siguiente intervención:

Y ¿En qué puntos de la prueba usaste fuertemente que la concavidad de las funciones era positiva?

E Acá, para demostrar que **esto siempre va a ser menor que esto**

Y O sea, la azul es menor que la naranja ¿por qué?

E **Porque la c+ y la tangente hace que quede por debajo de la curva**

Teorema 3:

No hay novedades en la respuesta de E, con relación a las dadas por los otros entrevistados, cuando se les pide que justifiquen que el área verde es mayor o igual que la naranja:

E Es mayor... Esta cuerda la dejamos igual, tomamos el punto medio de la curva y hacemos entre la primera ordenada y el punto medio, entre el punto medio y la segunda ordenada... y eso es verdad porque como vamos con c+... tenemos que la cuerda, la cuerda va a quedar por afuera... Y acá lo mismo, así que acá queda un cachito sin pintar, o sea que esto es mayor o igual que esto

Para probar que el gráfico el amarillo representa el error del MR se remite a la prueba del teorema 2:

E Es verdad porque como... esto de entrada lo definimos como tangente, o sea que si somos consecuentes con eso tenemos la tangente y **ya tenemos demostrado que éste es igual a éste** **(se refiere a las zonas verde y celeste del diagrama de la prueba del teorema 2)**

Y Que el verde es igual al celeste

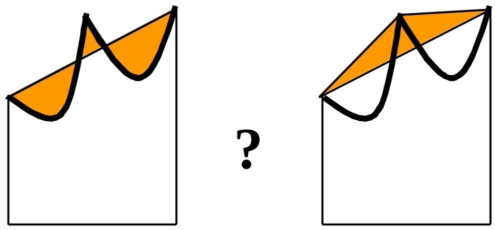
E Igual lo podríamos hacer acá, podríamos demostrar que este triángulo es igual a éste

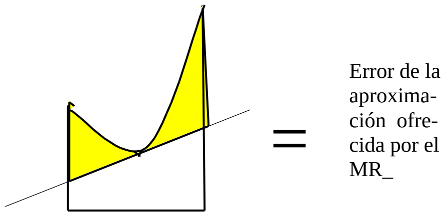
Consideraciones finales

- En el pedido de justificación del teorema 1 aparecen primero argumentos muy basados en la percepción (A: "*porque esta figura está incluida en la otra*", B: "*si yo hago el área del trapecio estoy tomando más de lo que es*", C: "*porque acá estás cubriendo la misma área y además todo lo que tenés arriba*", D: "*el trapecio hay una parte que la toma como área y que no es*", E: "*como tiene concavidad positiva acá hay todo un pedazo que está pintado y acá no*").
  Recién en segundo término y en respuesta a reclamos de la entrevistadora, aparece como razón de peso que la cuerda está por encima de la curva (en el caso del entrevistado C este argumento no se explicita hasta la sexta parte del guión).
  Los cinco estudiantes movilizaron en sus análisis del teorema 1 esa caracterización de función de concavidad positiva similar a la que identificamos como D_1 (similar porque algunos de ellos mencionan que la cuerda que une los extremos está por encima de la curva y no que eso se cumple para cualquier cuerda tomada en el intervalo) la cual en ninguno de los casos había aparecido antes, ni cuando se les pidió que definieran función de concavidad positiva ni cuando construían o identificaban ejemplos.

- En el análisis realizado por cada uno de los entrevistados sobre el teorema 2 aparece como argumento de fondo el hecho de que toda tangente está por debajo de la curva (en el caso del entrevistado C recién en la sexta parte del guión pero aun así). Es de hacer notar que ninguno de los entrevistados se cuestiona qué sucedería si la función no fuera derivable en el punto medio.

- En el teorema 3, al justificar la desigualdad entre las áreas naranja y verde, ninguno de los entrevistados percibió que no alcanza con que las cuerdas correspondientes a las dos mitades del intervalo estén por encima de la curva (esa es la razón comentada por los cinco). Aquí les resultaba necesario relacionar esas dos cuerdas con la cuerda correspondiente al intervalo total, por ejemplo, mediante una caracterización de función de concavidad positiva como la involucrada en lo que identificamos con la etiqueta D_2 en las consideraciones desde un punto de vista matemático.





En la explicación de la igualdad final del teorema 3 (la cual reproducimos en la figura que aparece aquí a la izquierda), el uso de lo aprendido en la prueba del teorema 2 no resultó problemático para ninguno de los entrevistados, lo que consideramos representa un dato relevante de este análisis. Y es evidencia, así mismo, de lo muy atentos que estuvieron los cinco estudiantes en las tareas propuestas en la entrevista.

- Podemos destacar algunas particularidades observadas en el trabajo de los estudiantes a lo largo de toda la entrevista:
  - los entrevistados A y D, cuando se les pide que justifiquen una desigualdad en sentido amplio, se preocupan por mostrar cuándo se cumple el igual.
  - el entrevistado D usa explícitamente, durante toda la entrevista, la caracterización C_3 (derivada primera creciente) como argumento de fondo sobre el que apoya sus caracterizaciones tipo D_1 (cuerdas encima del gráfico) o C_1 (tangentes debajo del gráfico).
  - aunque no de una manera correcta, las justificaciones que hace la entrevistada E giran en torno a una caracterización tipo D_3 (epígrafo convexo).

B4. Sobre la consideración como ejemplos genéricos de los diagramas involucrados en las pruebas visuales

Tal como comentamos en la sección dedicada a la demostración, el uso de un ejemplo genérico al justificar una afirmación corresponde a la utilización de una instancia concreta del objeto matemático involucrado, presentada de tal manera que permita explicitar las razones por las que la afirmación es verdadera, sobre la base de los atributos del objeto que son comunes a todas las instancias posibles de tal objeto. La constatación de lo reportado por Martín & Harel (1989) sobre que los estudiantes durante la etapa de transición presentan inconvenientes en tratar al diagrama como un ejemplo genérico pondría en tela de juicio el uso de pruebas visuales en el aula más allá de una ilustración del enunciado.

En este apartado, por tanto, analizaremos qué tipo de cuestionamientos presentan los entrevistados frente al uso de instancias inevitablemente concretas de gráficos para justificar, mediante una prueba visual, una afirmación aplicable a todas las funciones de concavidad positiva. También estudiaremos si se apoyan en atributos irrelevantes del diagrama al momento de verbalizar los argumentos visuales involucrados en estas pruebas.

Entrevistado A

Teorema 1

El cuestionamiento no surgió de manera espontánea pero cuando se le pregunta si la prueba que aparece en el guión depende de la función elegida como ejemplo de concavidad positiva, responde:

A No, siempre que tenga c+...
Y Si yo cambiara, por ejemplo, esta función por otra función positiva de c+ ¿cambiaría la demostración? o ¿seguiría siendo válida?

A **La idea seguiría siendo la misma**... o sea, la idea es que la recta que une la función en el primer punto del intervalo, los extremos del intervalo, esté por arriba de la curva lo cual **queda asegurado por la c+**...

Invoca por tanto un atributo común a todas las funciones de concavidad positiva para asegurar el valor genérico del diagrama, lo cual hará también en el contexto del próximo teorema.

Teorema 2

En el contexto del segundo teorema el entrevistado había mencionado "*habría que ver que el mínimo parece que coincide con el punto medio o más o menos*", por lo cual se le sugiere que revise la prueba en otro caso en que no se dé esa particularidad. Hace un dibujo de otra función de c+ y concluye:

A **No depende de eso porque siempre la tangente va a quedar por debajo de la curva**...

Entrevistada B

Teorema 1

Y Si tomamos otro tipo de función que tenga c+, la demostración ésta que está allí ¿es válida?

B La demostración... o sea ¿el teorema es válido?

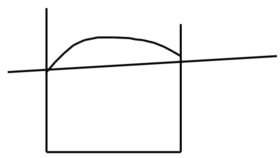
Y A ver, el teorema se cumple, lo que yo quiero ver es si esa demostración que puse ahí es una demostración que sirve, que es general...

B **Yo personalmente si hago un dibujito no siento que lo haya demostrado porque bueno... me parece que es más fácil hacer una demostración "como la gente" que pensar si realmente tu dibujito cumple o no con todas las posibilidades**

La entrevistada B entiende que el problema de las pruebas visuales radica en la generalidad del diagrama pero no la estudia en el caso en concreto del teorema 1. Sin embargo, cuando trabaja con el MT para funciones de concavidad negativa y es interrogada al respecto analiza la generalidad de su diagrama como garantía de la prueba:

B Cuando tenés una función con c- el MT da... por defecto

B dibuja una función de concavidad negativa en la que señala el trapecio correspondiente:



Y ¿Y eso es siempre o sólo para la función que vos dibujaste?

B No, **es siempre porque**... es como si a una de c+ la miraras al revés. O sea, **para c- se cumple la propiedad que si tomás la cuerda te va a quedar por debajo**, o sea lo que antes quedaba por encima va a quedar por debajo...

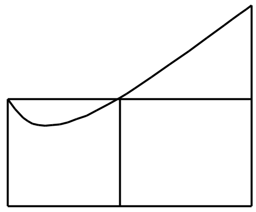
Teorema 2

Al finalizar el análisis de cada una de las partes del teorema 2, comenta por propia iniciativa:

B Pero... **visualmente, depende de la representación... Es que en este caso queda medio particular** porque el punto medio además de ser punto medio es el mínimo

Y De acuerdo, bien, entonces tendríamos que ver si eso se cumple en otro caso...

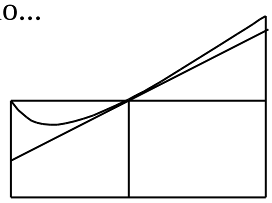
B ¿Puedo dibujar? A ver, por ejemplo uno que sea bien alevoso...



B dibuja una función de concavidad positiva (que posee como atributo irrelevante que la ordenada del primer punto coincide con la ordenada del punto medio), aplica el MR_ y sombrea la zona que queda entre la gráfica y la recta horizontal con altura la ordenada por el punto medio

B No es una aproximación por defecto, al menos no necesariamente
Y ¿Por qué?
B O sea, acá desde el punto medio para este lado donde está el mínimo, acá estoy tomando más área que el área por debajo de la función y acá (señala el subintervalo a la derecha del punto medio) estoy tomando menos...
Y A ver ¿cuál es el proceso que hace la demostración ésta (se refiere a la demostración que aparece en el guión)? No es comparar directamente el área ésta con ésta (se refiere a las áreas bajo la curva y del rectángulo)... lo que hace antes ¿qué es? El área bajo la gráfica la compara con el área de un trapecio que determina la tangente por este punto ¿no? Hacé los tres pasos para tu demostración, no uno sólo...

B agrega al dibujo anterior la tangente por el punto medio



B Lo que hacías era tomar la tangente por el punto medio que en este caso no es el mínimo
Y Justamente estás salvando eso para ver si es general...
B Claro, estoy segura que estoy tomando menos área, estoy tomándola por defecto
Y ¿Por qué?
B Porque trabajé con la tangente y ya sé que la tangente está por debajo
Y De acuerdo, o sea que... esa vendría a ser la celeste, ya sabés que la celeste es...
B Claro y ahora la celeste es igual a la verde
Y ¿La celeste es igual a la verde aunque no sea el mínimo?
B A ver, voy a hacer un dibujo más prolijo

Hace un dibujo como el anterior pero en éste sombrea los triángulos determinados por la recta horizontal y la tangente por el punto medio, con lo cual termina de reconstruir la prueba para su función de concavidad positiva.

B Sí, **de todas maneras son iguales** (y repite el argumento anterior para justificar la igualdad de los triángulos)
Y ¿Por lo tanto?
B Aunque parezca que no es sí... Para funciones positivas de c+ la aproximación es por defecto

Ya vimos que en la adaptación del teorema 1 para funciones de concavidad negativa, B se apoya en la modificación de la caracterización D_1 para asegurar la validez de su prueba con independencia del diagrama elegido. En el segundo teorema, sin embargo, parecería que necesita reconstruir detalladamente la prueba para otra instancia del diagrama para convencerse. Su trabajo podría parecerse más, usando terminología de Balacheff, al uso de un experimento crucial (con un caso que considera más adecuado que el dado en el guión pues allí el punto medio parecería coincidir con el punto donde se alcanzaba el mínimo) que al uso de un ejemplo genérico.

Entrevistado C

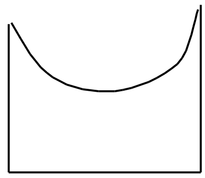
Teorema 1

Y ¿Depende la prueba anterior de la figura que elegiste de función positiva de c+ o para otra función de c+ también sirve el mismo tipo de demostración?

C **¿Te estás refiriendo al tipo de curva para usar el MT?** Para mí no... **Se va a seguir cumpliendo el teorema éste**.

Y A ver, dibujate vos otra función positiva de c+

C dibuja lo que se pide



Y En tu dibujo, el MT ¿ofrece una aproximación por exceso del área? (C pinta de negro el área bajo la curva y de rojo lo que queda dentro del trapecio pero encima de la curva) ¿Cuál es el área del trapecio?

C Toda esa (señala la región que pintó de negro) más lo que está ahí

Y Por lo tanto, el MT para tu caso...

C Sirvió...

El entrevistado repite los pasos involucrados en la prueba sobre una instancia diferente que la que se usa en el guión pero sus intervenciones no permiten extraer conclusiones acerca de cómo se posiciona frente a la cuestión de la generalidad del diagrama.

Teorema 2

El entrevistado C no es interrogado acerca de la generalidad del diagrama involucrado en la prueba de este teorema.

Entrevistado D

Teorema 1

Y Imagináte que tomás una figura distinta que tenga c+ ¿igual se va a cumplir el teorema?

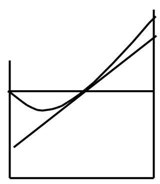
D Seguiría siendo porque por lo que dijimos recién para la c+ tiene que ser siempre creciente la derivada, entonces no va a poder... por más que haga vueltas nunca va a poder pasarse de esta línea porque tendría que volver sea como sea, entonces...

Invoca a la caracterización C_3 como fundamento para la validez del resultado independientemente del dibujo elegido.

Teorema 2

Y Viste que acá tenemos el peligro de que el mínimo y el punto medio están muy cerca uno del otro, dibujame una función donde eso no suceda, donde el mínimo y el punto medio no estén cerca y veamos si el teorema igual se sigue cumpliendo

D dibuja una función de concavidad positiva que tiene como atributos irrelevantes la derivabilidad en todo su dominio, la igualdad entre las ordenadas del primer punto y del punto medio, etc. En ese gráfico aplica el MR_ y señala la tangente por el punto medio, luego comenta:



D **El área debajo de la derivada siempre va a ser menor o igual porque nunca vamos a volver para abajo**... y ta ahí estamos probando esto

Y La primera desigualdad

D Para la otra sería la mismo

Invoca, también en este segundo teorema, a C_3 como fundamento de la validez del resultado independientemente del diagrama.

Entrevistada E

Teorema 1

Y ¿Depende la prueba anterior de la figura que elegimos como ejemplo genérico de función de c+? ¿Se entiende lo que pregunto?

E Sí, sí… **si depende de este dibujo que siempre se cumpla lo mismo**

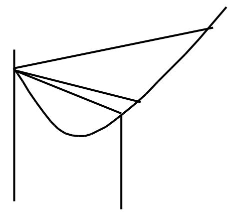
Y Porque viste que cuando hago una prueba visual tengo que tomar un ejemplo…

E **No tenés que tomar casos particulares**… por eso, se podría demostrar que si tomás las dos perpendiculares al eje y la curva te da una figura no convexa, entonces…

Y Escuchame ¿si vos tomaras otra función de c+ ibas a poder repetir la demostración de forma análoga?

E Claro… aunque no porque si tomas ésta… ah, no porque acá ya no tiene…

Y A ver, dibujate una función cualquiera de c+, que no tenga por qué ser igual a esa…



E dibuja el gráfico de una función de concavidad positiva y señala el MT considerado sobre distintos intervalos.

E Ya no puede bajar…

Y ¿Entonces?

E Entonces sí, **tome lo que tome siempre me va a quedar el área por defecto**, aunque una éste con éste o éste con éste (se refiere a los vértices de los distintos trapecios) siempre el área por debajo va a ser menor o igual que el área que tengo acá

Aunque no explicita las razones, la entrevistada E parece convencerse a partir de la consideración de sus múltiples ejemplos.

Teorema 2

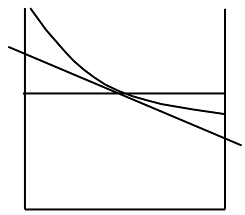
Se le comienza preguntado si lo afirmado en el teorema 2 es válido para toda función de concavidad positiva, a lo que responde afirmativamente. Se busca profundizar en este aspecto:

Y Acá tengo un problemita que es el siguiente: mi punto medio está muy cercano de ¿qué punto?

E Claro, el punto medio está muy cercano del punto de cambio de... ¿cómo se llama esto cuando baja y sube? Es un... un mínimo. Pero el punto medio no es el mínimo siempre...

Y Pero la demostración, a ver si no es válida

E Sí la demostración sí... usás... acá tenés un mínimo pero acá no, hacés la tangente para que quede punto medio, sería más o menos por acá...



E dibuja una función de concavidad positiva monótona decreciente y sobre su gráfico representa al MR_ y la tangente por el punto medio

Y ¿Cuál sería? Rayá lo que sería el área naranja

E El área naranja es ésta (raya la zona por debajo de la curva)

Y Y con otro tipo de rayas marcá...

E También es claro que esto (se refiere al área bajo la tangente) es más chico que el área naranja... Sabemos que con el área azul podemos formar un rectángulo verde y eso lo hacés tomando este triangulito que se mete acá. Este triángulo de acá es igual al de acá porque tiene un ángulo recto, porque es opuesto por el vértice,

> porque este pedazo es el mismo que ese por el tema ese de que es punto medio. **Entonces es válido de todos modos**.

O sea que la entrevistada E reconstruye la prueba del segundo teorema sobre la base de un gráfico diferente al que aparece en el guión y así se convence de la validez general de la afirmación, en una conducta que podríamos comparar con la de la entrevistada B.

Consideraciones finales

- El cuestionamiento del carácter genérico del diagrama no surgió de manera espontánea en las intervenciones de ninguno de los entrevistados.
  - Algunos entrevistados (A y D en los teoremas 1 y 2 y B en la adaptación del primero al caso de funciones de concavidad negativa), al ser interrogados sobre qué sucedería si en las pruebas se hubieran dibujado otros gráficos que verificaran las hipótesis, invocan a la caracterización de las funciones involucradas para justificar la independencia de la prueba respecto al dibujo concreto que aparece en el diagrama. Creemos que, a pesar de que el cuestionamiento no es espontáneo, este tipo de respuesta sugiere que los estudiantes son capaces de mirar el diagrama abstrayendo las características esenciales del mismo.
  - Luego de habérseles planteado el tema explícitamente respecto al teorema 1, los entrevistados A y B hacen, por iniciativa propia, algunas consideraciones sobre la generalidad del diagrama involucrado en el teorema 2.
  - El caso del entrevistado C suministra poca información a este respecto (en el contexto del teorema 1 se limita a reconstruir, sin inconvenientes, la prueba sobre el dibujo de una función de concavidad positiva que él elige y en el contexto del teorema 2 no fue interrogado sobre este asunto).
  - La entrevistada E se convence de la validez general de los enunciados a partir de la reconstrucción de las pruebas sobre una gran variedad de diagramas.

- El atributo irrelevante que posee el diagrama incluido en las pruebas de los últimos dos teoremas (la existencia de recta tangente al gráfico en el punto medio) fue utilizado en la argumentación por todos los entrevistados.

  No creímos conveniente alertar a los entrevistados sobre esta cuestión pues su consideración involucra aspectos que están más allá de las metas de este trabajo (ya comentamos, en la sección dedicada a la preparación de la entrevista, que el uso de esta recta tangente puede sustituirse por el de rectas de apoyo cuya existencia está asegurada para las funciones de concavidad positiva).

  A pesar de esta observación, no parecería que el problema para estos estudiantes sea el uso sistemático de atributos irrelevantes en la interpretación de las pruebas visuales, tal como lo observaron Harel & Martín (1989). Creemos que para estos entrevistados las dificultades radican principalmente en no percibir la necesidad de explicitar el uso de aquellas características de las funciones involucrados que son comunes a todos las funciones positivas de concavidad positiva.

- La entrevistada B emite su opinión respecto a las pruebas visuales en un sentido de suma vinculación al aspecto sobre el que trabajamos en este apartado: "*Yo personalmente si hago un dibujito no siento que lo haya demostrado... me parece que es más fácil hacer una demostración "como la gente" que pensar si realmente tu dibujito cumple o no con todas las posibilidades*".

  Aquí se detecta una confusión que nos parece importante destacar: captar el carácter genérico de una prueba visual no pasa por apoyar el razonamiento en un diagrama sin particularidades, sino en invocar para dicho razonamiento los atributos relevantes del diagrama que se tiene delante y que está representando a todos los que están en las condiciones de las hipótesis.

- Cuando se cuestiona el carácter genérico del diagrama involucrado en el teorema 2, debido a la cercanía entre el punto medio y el punto donde se alcanza el mínimo, los entrevistados B y D presentan diagramas alternativos, pretendiendo un mayor grado de generalidad. Y aunque era de esperar que sus gráficos, como todos, poseyeran atributos irrelevantes a la concavidad positiva, lo curioso es que ambos utilizan diagramas que verifican que $f(a) = f(\frac{a+b}{2})$.
- La detallada reconstrucción de las pruebas sobre nuevos diagramas que realizan algunos entrevistados (especialmente B y E en el segundo teorema) parece sugerir que interpretan su prueba como una justificación mediante el uso de un experimento crucial (terminología de Balacheff que presentamos en la sección II.3.2.1). Para lo cual el nuevo diagrama estaría, a su parecer, mejor elegido que el que aparece en el guión de la entrevista.

B5. Sobre el carácter global de los diagramas que aparecen en las pruebas visuales

Lo que se busca en esta sección es analizar si los entrevistados frente a una prueba visual estructurada sobre la base de varios pasos logran integrarlos, hasta interpretar los argumentos presentados como la prueba de un mismo enunciado. En este sentido, analizaremos las respuestas de los entrevistados con relación al segundo y el tercer teorema del guión pues son estos los que requieren este trabajo de unificación de argumentos parciales en uno que los abarque.

Entrevistado A

No se tiene información sobre este punto debido a la interrupción de la grabación al final del segundo teorema.

Entrevistada B

Teorema 2

Y Entonces ¿cuál es tu conclusión final luego de ver cada uno por separado?
B Con respecto a estas dos (se refiere a la celeste y a la verde), que es lo mismo que tome la ordenada del punto medio que...
Y ¿Y con respecto al total? Porque vos lo que querías ver era que el MR_ ofrece una aproximación por defecto del área de la gráfica ¿Cuál es la que te da el área bajo la gráfica de las que están allí?
B Ésta, la naranja... Bueno, ta, porque éstas (se refiere a la celeste y a la verde) son más chicas

Aunque desde un primer momento su conclusión total parecía seguir desglosada en los pasos en que se dividía la prueba, su última frase parece sugerir una visión más integradora.

Teorema 3

Parecería que la entrevistada B no tiene problemas para extraer una conclusión general luego de haber leído e interpretado cada paso de la prueba del tercer teorema:

Y Entonces ¿cuál es la conclusión total?
B Que sí, que es verdad el error es más chico si tomo el MR_

Entrevistado C

Ya en el primer teorema, cuando se le pide que sintetice las conclusiones que ha venido extrayendo de la lectura del diagrama, se observa cierta dificultad para ver el diagrama como un solo objeto capaz de justificar un enunciado:

Y Entonces ¿a vos te parece que este dibujo explica lo que dice el teorema?
C Éste acá (figura amarilla) sí
Y Yo me refiero a este teorema (señala el enunciado) y al diagrama en su conjunto: el área bajo la curva pintada de naranja, el área del trapecio pintada de amarilla y un ≤ en el medio ¿El conjunto te explica el teorema ese?
C Acá (figura amarilla) se usa el MT y acá (figura naranja) yo no lo veo al MT
Y Acá lo que tenés es el área bajo la gráfica y en éste aplicado el MT, entonces este ≤ ¿qué te implica? Que la aproximación que te da el MT ¿de qué tipo es?
C Por exceso.

Teorema 2

Cuando se le pide que describa el diagrama comenta que algo no entiende pues "*en la figura del medio no está el MR*", lo que sigue insinuando problemas por parte del entrevistado en cuanto a captar la globalidad del diagrama como justificación de un enunciado.

Después de haber argumentado sobre la desigualdad de las áreas naranja y celeste y la igualdad de las áreas celeste y verde, se le pregunta:

Y ¿Qué relación hay entre la naranja y la verde?
C Entre la naranja y la verde... que ésta (figura naranja) es mayor
Y La naranja es mayor que la verde y eso ¿qué quiere decir respecto al teorema?
C Que usando el MR se obtiene una aproximación por defecto

Teorema 3

Cuando termina de justificar cada paso del diagrama no se interroga al entrevistado sobre la globalidad de la prueba.

Entrevistado D

Teorema 2

Y Acá ya entendimos toda la figura y por qué dice ≥ o =, ahora ¿por qué esto explica el teorema? ¿qué relación tiene este dibujo con lo que dice el enunciado?
D El enunciado... lo que dice es que el área roja es más grande que el área verde entonces **por transitiva**...

La mención de la propiedad transitiva parece indicar que el entrevistado D ha integrado las dos desigualdades en una sola, tal como se pretendía.

Teorema 3

Y Después de haber leído esto parte por parte ¿por qué el error del MT es mayor que el error del MR?
D Podría ser igual
Y Ah, claro, mayor o igual, seguro

Nuevamente aquí observamos la preocupación de esta entrevistada por aclarar que las desigualdades involucradas en estos teoremas son amplias. A continuación sí se centra en lo que se pedía: la unificación de los sub-argumentos en una justificación global.

D Porque **cada igual es como un si y sólo si… entonces podemos ir para atrás**
Y De acuerdo, en realidad vos tenés que éste es igual a éste y que éste es mayor o igual que éste ¿cómo llegas hasta acá?

D **Por transitiva**

Entrevistada E

Teorema 2

Después de justificar la primera desigualdad y la segunda igualdad no se le interroga sobre el global de la prueba.

Teorema 3

Y De todos esos pequeños pasitos ¿a qué llegamos entonces?
E Como conclusión tenemos que... tomamos la aproximación ofrecida por el MT, tomamos una figura conveniente que nos dice que es menor, vamos a que esto es igual, a que esto es igual, a que esto es igual y de última decimos que hay otra cosa que sigue siendo mayor... **si esto es mayor que esto y esto es mayor que esto entonces esto es mayor que esto**
Y O sea que la verde es...
E La verde es más grande que la amarilla y la amarilla es la ofrecida por el MR
Y Por lo cual el error del MR es mayor que...
E Es mayor que el del MT

Consideraciones finales

- Los entrevistados B, D y E parecen no tener inconvenientes con la integración de los distintos pasos de la prueba mediante la aplicación de la propiedad transitiva (lo cual se observa claramente en el caso de la entrevistada E y más explícitamente aún en el caso del entrevistado D).
  El entrevistado C, sin embargo, parece tener algunos problemas con este aspecto que se reflejan ya en su análisis del teorema 1.
  En el caso del entrevistado A nos faltan datos para poder comentar su situación.

B6. Sobre la validez de la prueba del primer teorema independientemente del número de intervalos en que se aplique el Método Trapezoidal

El enunciado del primer teorema de nuestro guión dice que "*Para funciones positivas de concavidad positiva el método trapezoidal ofrece una aproximación por exceso del área bajo la gráfica*", al no haber ninguna puntualización al respecto se asume que éste es válido cualquiera sea el número de subintervalos que se consideren en la partición en que se aplica el MT. Sin embargo, la prueba visual que propone el guión de la entrevista particulariza la aplicación del método a un único intervalo en el dominio.

En este apartado analizaremos la respuesta de los estudiantes enfrentados a esta situación.

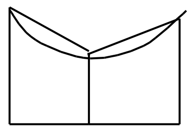
Entrevistado A

Este estudiante no se plantea por sí solo la problemática asociada al número de intervalos con que se aplica el método de aproximación. Sin embargo, cuando se lo plantea la entrevistadora responde rehaciendo la prueba en el caso en que el número de intervalos sea dos:

Y ¿Qué sucede si en vez de considerar un solo intervalo consideramos más de uno?
A **La aproximación va a ser mejor**

Y Pero ¿va a seguir siendo por exceso?
A Sí, **va a seguir siendo por exceso**
Y ¿Te animás a ver cómo sería la demostración con más de uno?

A dibuja una función de concavidad positiva a la que aplica el MT con dos intervalos en la base:



A **Para cada intervalo usando eso** (se refiere a la prueba del teorema 1) **el área va a ser mayor, por lo tanto, la suma de los dos trapecios va a ser mayor a la suma de los dos intervalos**

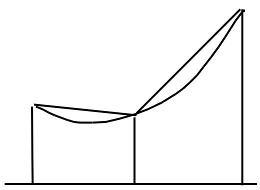
Queda la duda de si A consideraría necesario hacer un diagrama para cada número de subintervalos en la base.
Vale realizar un par de observaciones en relación al comentario que hace este entrevistado sobre el hecho de que considerar una partición con más intervalos mejoraría la aproximación dada por el método (también lo mencionará E, como veremos en su momento). Esa afirmación sería cierta si los nuevos intervalos se obtienen a partir de los anteriores por división de los mismos: un refinamiento de la partición[16].
Y en el caso de un refinamiento de la partición, el hecho de que la aproximación dada por el MT sea más ajustada se fundamenta en que las funciones que estamos considerando son de concavidad positiva[17].

Entrevistada B

La situación de esta entrevistada coincide con la expuesta para el caso del entrevistado A, con el matiz de que la frase final de ésta hace pensar que el tomar dos intervalos en la base actúa como un ejemplo genérico de partición.

Y Esa explicación está hecha para cuando tomás un solo intervalo en la base ¿qué pasaría si tomás más de un intervalo en la base? ¿sigue siendo por exceso el área que te da el MT?
B Cualquier punto en que se me ocurra dividir en dos intervalos y dibuje la recta que une el extremo del intervalo con esto siempre me va a quedar esta recta por arriba y la función por abajo. O sea, **la recta que une los extremos de lo que tome como subintervalos divididos siempre va a estar por arriba del gráfico**...

B dibuja una función de concavidad positiva a la que aplica el MT con dos intervalos en la base



Y De acuerdo, o sea que vos lo que estás diciendo es que...
B **Que se va a cumplir aunque me tome más intervalos**...

Entrevistado C

Y Para saber si la justificación es válida tendríamos que ver también qué sucede si

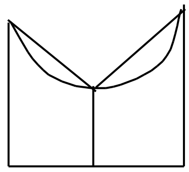
[16] Para convencerse de que no alcanza sólo con considerar más intervalos para mejorar la aproximación, basta considerar las aproximaciones que da el MT para el área bajo la gráfica de la función valor absoluto en el intervalo [-3,3], considerando las particiones {-3, -2, -1, 3} y {-3, 0, 3}.
[17] Para convencerse de que un refinamiento de la partición no siempre mejora la aproximación, basta considerar las aproximaciones que da el MT para el área bajo la gráfica de la función seno en el intervalo [-π,π], considerando las particiones {-π, π/2, π} y {-π, π}.

en vez de tomar un solo intervalo en la base tomamos varios ¿la aproximación sigue siendo por exceso?

C También

Y ¿Por qué?

C también dibuja el gráfico de una función continua y positiva a la que aplica el MT con dos intervalos en la base



C Igual... **esta figura siempre va a estar conteniendo a esta otra de acá dentro y lo mismo acá** **(se refiere a uno y otro trapecio)**

Y Aplicás tu razonamiento en cada uno de los trapecitos... Vos lo hiciste ahí para dos intervalos pero...

C **Para n igual**

Como vemos, al entrevistado C se le pregunta, después de que rehiciera la prueba en el caso de dos intervalos, qué sucedería en el caso de tomar otro número de intervalos, obteniendo como respuesta que procedería igual.

Entrevistado D

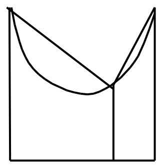
Y Si la función es de c+ y el MT lo aplicas con muchos intervalos ¿sigue siendo por exceso la aproximación?

D Y sí, seguiría siendo

Y ¿Qué dibujarías para justificar eso mismo pero no con un intervalo sino con muchos?

D Con la misma gráfica...

D dibuja un diagrama que se distingue de los de los otros entrevistados en que aquí, sin lugar a dudas, los subintervalos de la partición tienen diferente longitud



D **Acá serían dos pero si fueran más siempre habría una curvita**... entonces por más que yo los tome más chiquitos, pero finitos

Y ¿Qué sucede?

D **El área que voy a tomar va a ser mayor o igual, siempre va a haber un pedacito que no tome salvo como máximo que coincida la recta con el coso**

También D hace comentarios que dan a entender que el tomar dos intervalos en la base actúa como un ejemplo genérico de cómo resultaría la prueba con un número cualquiera de subintervalos.

Entrevistada E

Tampoco este estudiante se plantea por sí solo la problemática del número de subintervalos ni plantea inconvenientes para adaptar su razonamiento cuando se le propone la modificación.

Y Viste que acá usamos el MT con un solo intervalo ¿qué sucede si considerás muchos intervalos?

E **Si considerás varios intervalos cada vez te acercás más al área, o sea, cada vez tenés menos exceso de área**

Y Pero ¿siempre es por exceso?

E Claro, porque si vas tomando cachitos, cachitos, cachitos como que te vas tomando siempre lo mismo… o sea, **hacés un trapecio hasta acá, hacés un trapecio hasta acá** que es casi la curva, **te tomás otro pero siempre es por exceso**…

Vale notar que este entrevistado no usa ningún diagrama nuevo para dar su respuesta (le basta imaginárselos a partir de diagramas previos) y que como ya habíamos mencionado, hace referencia al mejoramiento de la aproximación dada por el MT si se "subdivide" la partición con que se lo ha aplicado previamente.

Consideraciones finales

- El hecho de que el número de intervalos con que se aplica el MT es particularizado en el diagrama en un único intervalo, no es cuestionada por iniciativa propia de ninguno de los entrevistados cuando se les pregunta por la dependencia de la prueba respecto del diagrama.

- Cuando el tema del número de intervalos es planteado por la entrevistadora, ninguno tiene inconvenientes para actualizar su diagrama a uno con otro número de intervalos. Mientras que E explica cómo lo haría para "varios" intervalos sin dibujar, los otros entrevistados hacen nuevos dibujos con dos intervalos en la base. Dos de los entrevistados añaden comentarios, durante la reconstrucción de las pruebas, que sugieren que el tomar dos intervalos en la base es circunstancial (B: "*se va a cumplir aunque me tome más intervalos*", D: "*acá serían dos, pero si fueran más, siempre habría una curvita...*").

- Un par de entrevistados mencionan que la aproximación dada por el MT mejoraría al considerar más intervalos en la base. Como vimos durante el análisis de las respuestas del entrevistado A, este comentario daría oportunidad para reflexionar acerca de las hipótesis bajo las que sería válida tal afirmación, lo cual consideramos pertinente en su relación con el tema que nos ocupa aunque en ocasión de esta entrevista no hayamos profundizado al respecto.

B7. Sobre la modificación de hipótesis en los dos primeros teoremas

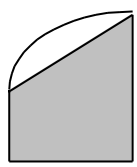
Las situaciones propuestas en los teoremas tratan con funciones de concavidad positiva, posteriormente a un primer trabajo con estos teoremas, el guión prevé que se indague cómo adaptan los entrevistados el enunciado y la prueba de esos mismos teoremas cuando se altera la hipótesis acerca de la concavidad de la función.

En este apartado analizaremos las modificaciones que proponen los entrevistados cuando la hipótesis pasa a ser "una función positiva de concavidad negativa" y los comentarios que realizan con relación a las aproximaciones ofrecidas por el MT para funciones que no poseen concavidad de signo constante a lo largo de su dominio.

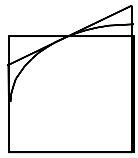
Entrevistado A

Teorema 1

Cuando se le pregunta por el resultado de la aproximación del MT para funciones que no son de concavidad positiva responde que "dividiría a la función en trozos donde la concavidad fuera positiva y otros donde fuera negativa. En los trozos que es positiva el MT aproximaría por exceso y en los que es negativa lo haría por defecto". Para ilustrarlo dibuja una función de concavidad negativa a la que aplica el MT:



Teorema 2



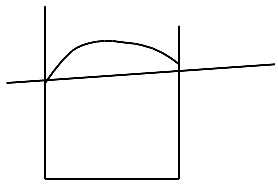
Cuando se le hace la misma pregunta para el MR_ responde análogamente a como lo hiciera para el MT, comenta que la aproximación para las funciones de concavidad negativa es por exceso y agrega “esto habría que verlo con más cuidado”. Mientras dibuja el gráfico de una función de concavidad negativa y sobre él representa un rectángulo de altura la ordenada del punto medio y la tangente al gráfico en el punto medio para recrear así la prueba del teorema 2 adaptada a funciones de concavidad negativa.

Entrevistado B

Teorema 1

Y ¿Qué podrías decir del MT cuando la concavidad no es positiva?
B ¿Cuándo no es positiva porque es negativa o cuando no es positiva porque tenés casos como ese (señala uno de los ejemplos que incluye la tercera parte del guión)?
Y Los dos. A ver, primero el primer caso, cuando no es positiva porque es negativa
B Cuando tenés una función con c- el MT da... por defecto

B dibuja el gráfico de una función de concavidad negativa a la que le aplica el MT:

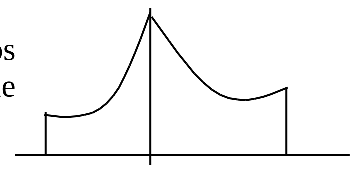


Y ¿Y eso es siempre o sólo para la función que vos dibujaste?
B No, es siempre porque... es como si a una de c+ la miraras al revés. O sea, **para c-** se cumple la propiedad que **si tomás la cuerda te va a quedar por debajo**, o sea lo que antes quedaba por encima va a quedar por debajo...
Y Entonces vos decís que el MT...
B **Aproxima por defecto cuando la concavidad es negativa**...

Aquí B da una caracterización para funciones de concavidad negativa, modifica el enunciado del primer teorema para ese tipo de funciones y adapta la prueba que aparecía en el guión.

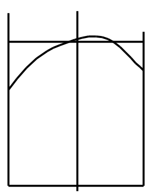
Y ¿Y para funciones que no son de c+ ni c-? ¿qué te parece?
B Y yo creo... la cuestión es que las tenés que... por ejemplo ahí (señala la última gráfica de las que aparecen en la tercera parte del guión) yo tenía una función con c+ salvo en el punto singular... lo que tenés que hacer es considerar el intervalo donde existe todo...

B dibuja una función que tiene concavidad positiva en los dos subintervalos en que se divide el dominio pero no tiene concavidad positiva en todo él



Y Dividir el intervalo en dos subintervalos donde en cada uno podés decir...
B Que la concavidad es positiva o negativa...

Teorema 2



Cuando se le pregunta sobre qué tipo de aproximación ofrece el MR_ cuando la concavidad no es positiva, B dibuja una función de concavidad negativa sobre la cual aplica el MR_. Luego, sobre ese diagrama recrea la prueba dada en el guión para el segundo teorema tal como se aprecia en su siguiente intervención:

B Parecería por exceso pero habría que ver por qué... (agrega en su dibujo la tangente por el punto medio) Es análogo al otro, si hacés por el punto medio queda por exceso porque **si vos trazás la tangente como es de c- ya sabés que estás tomando más del área** y... (pausa) Acá cuando tomo la tangente sí que estoy tomando más área que la que corresponde

Y Eso es porque la tangente ¿dónde está?

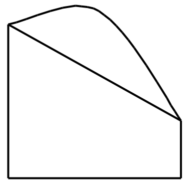
B Por encima de la gráfica de la función y la diferencia que tengo con éste son los triangulitos éstos que son iguales

O sea que al igual que en el teorema 1, da una caracterización para función de concavidad negativa, ésta relacionada con las tangentes y modifica el enunciado y la prueba del segundo teorema.

Entrevistado C

Teorema 1

Se le pregunta si al tomar el MT sobre una función que no tuviera concavidad positiva le continuaría dando una aproximación por exceso. Mientras responde dibuja una función de concavidad negativa sobre la que aplica el MT:



C No, porque me queda área de la curva sin cubrir acá.

Y ¿Por qué? ¿qué es lo que cambia entre aquel dibujo (el que aparece en el guión como prueba del teorema 1) y éste?

C **La cuerda queda ahora por debajo de la curva**

Para funciones de concavidad negativa, da una caracterización según la posición de las cuerdas y adapta enunciado y prueba del primer teorema:

Y O sea que vos me dijiste que el MT ofrece una aproximación por defecto... pero tu función ¿es una función cualquiera o es una función que tiene una concavidad particular?

C Tiene concavidad negativa.

Y Un caso particular dentro de las que no tienen c+ son las que tienen c- pero ¿qué pasa para las que no tienen c+ ni negativa?

C Si tomo por ejemplo una constante (dibuja una función constante), el MT sería el rectángulo mismo

Y Esa aproximación no sería por exceso ni por defecto sería exacta

C El valor real... y después en una recta... (dibuja una recta de pendiente positiva)

Y Con la recta, el MT, ¿qué tipo de aproximación te da?

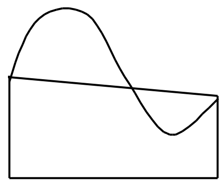
C Con esta de acá **te da el valor real**

Para funciones cuyo gráfico es una recta afirma que el MT más que aproximar, calcula el área buscada.

Y Ahora imaginate una función como la del segundo ejemplo (señala el gráfico 2 de la tercera parte del guión en que hay subintevalos con c+ y con c-) ¿el MT qué hace ahí? ¿aproxima por exceso o por defecto?

C Por defecto... porque considero el trapecio, la cuerda, uniendo estos dos puntos y me va a quedar área de la curva fuera … No sé... no sé como salen estos dos pedacitos (se refiere al trozo de trapecio que queda encima de la curva respecto al trozo bajo la curva que queda fuera del trapecio)

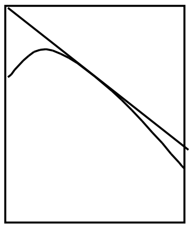
C dibuja el gráfico de una función como el que aparece a la derecha (imitando el que se le estaba señalando entre los del guión) y le aplica el MT



Y ¿Podés sacar una conclusión acerca de cómo va a ser la aproximación?

C No

Teorema 2

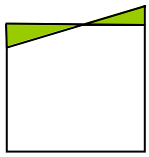


Cuando se le interroga sobre la aproximación que ofrece el MR_ cuando las funciones no tienen concavidad positiva, C dibuja un diagrama como el que aparece aquí:

C El MR [va a dar una aproximación] por exceso
Y Dibujaste la tangente por el punto medio...
C **La curva te queda por debajo de la tangente**... y entonces tiene más área cubriendo...
Y Y el MR ¿dónde aparece ahí? Porque vos trazaste la tangente ¿y? Ese de ahí es el MR pero no usando la ordenada del punto medio, no?
C Está bien... sí... acá

Ahora sí dibuja el rectángulo correspondiente al MR_, con lo cual queda hecha la adaptación de la prueba antes expuesta al caso de concavidad negativa basándose en que para las funciones de concavidad negativa, las tangentes quedan por encima del gráfico.
Al igual que en el caso del MT, cuando se le pregunta por funciones que no tienen concavidad positiva ni negativa, responde analizando el caso de las funciones cuyos gráficos son rectas:

Y ¿Qué pasa para las que no tienen c+ ni negativa?
C Si tomo por ejemplo una constante (dibuja una función constante), el MR_ me da el área real bajo la curva… y después en una recta... (dibuja una recta de pendiente positiva)
Y ¿La aproximación es por exceso o por defecto?



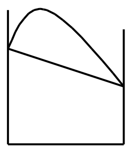
C hace el dibujo de la región bajo la gráfica (un trapecio), señala el área resultante de aplicar el MR_ y resalta los triángulos que representan la diferencia entre una y otra de las regiones:

Y Efectivamente... son los mismos...

Entrevistado D

Teorema 1

Y ¿Qué podrías decir de las aproximaciones que ofrece el MT para funciones que no fueran de c+?
D Para funciones que no fueran de c+, pueden ser de c- o nada, entonces el MT daría…

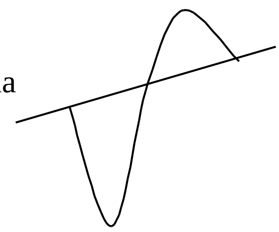


D dibuja el gráfico de una función de concavidad negativa y le aplica el MT

Y ¿Cómo podrías enunciar ese teorema?
D **Para funciones de c- el MT ofrece una aproximación por defecto**.

Cuando termina de adaptar el enunciado y la prueba del primer teorema para funciones de concavidad negativa, se le propone una nueva situación:

Y Por ejemplo esta función que está acá (se refiere al segundo gráfico de la tercera parte del guión) que no tiene c+ ni c-. Ahí el MR ¿qué ofrece?
D Si los dividiéramos en dos podríamos hacer algo pero así no tenés por qué… si yo hago así



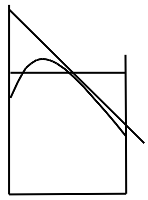
D dibuja un gráfico similar al que se le había señalado y marca la cuerda que une los extremos de la curva

D	Está esto y esto (se refiere a las dos subregiones que quedan limitada entre la curva y la cuerda)... y sería por exceso... pero si fuera más arriba sería por defecto así que **no puedo decir nada**

Teorema 2

El entrevistado D no tiene ningún problema para adaptar el segundo teorema al caso de funciones de concavidad negativa:

D **Para funciones de c- el MR_ ofrece una aproximación por exceso**
Y ¿Cuál es la demostración?



D dibuja el siguiente diagrama que muestra que tampoco la adaptación de la prueba le ofrece inconvenientes.

Y ¿Qué dibujaste ahí?
D Ésta es la tangente por el punto medio… y pasa lo mismo, si es de c-, nunca va a poder volver para tocar a la gráfica otra vez y tener un área que no…

Entrevistada E

Teorema 1

Cuando se le pregunta qué podría decir de las aproximaciones que ofrece el MT cuando las funciones no tienen concavidad positiva, dice:

E Podés hacer lo mismo, plantearte el mismo caso con c-, siempre te va a dar… con c- si tomás la primera y la segunda ordenada siempre te va a dar por defecto.

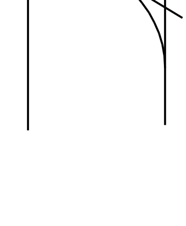
Luego la entrevistadora le invita a considerar nuevas situaciones:

Y ¿Son las únicas funciones que hay que no tienen c+ las de c-?
E No, está la recta... Pero es como ridículo... es que es tan fácil tomar el área debajo de la gráfica según la figura que forma que es como ridículo...
Y De acuerdo, porque el MT en este caso más que aproximar ¿qué hace?
E Está calculando el área

Al igual que C, después de mirar los casos de concavidad positiva y negativa, pasa a analizar los casos de funciones cuyo gráfico fuera una recta.

Teorema 2

Y ¿Qué podrías decir de las aproximaciones que ofrece el MR_ cuando las funciones no tienen c+?
E Con c- el MT te da por defecto y lo mismo con el MR_... Voy a tomar una con c-, (comienza a dibujar), esto más o menos es el punto medio, **si trazamos la tangente, por el tema de la definición de c-, te va a quedar por debajo** entonces sabemos que el área de este trapecio va a ser por exceso y después si tomamos este rectángulo de acá podemos demostrar que esto es igual a esto por el tema de los triángulos que son iguales



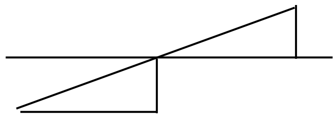
E dibuja un diagrama que adapta, para funciones de concavidad negativa, al que aparece en el guión como prueba del teorema 2

Y Para funciones de c- el MR_ ¿qué te da?
E Acá para c+ daba por defecto y para c- da por exceso

Cuando se le pregunta sobre qué hace el MR_ cuando la función tiene como gráfica una recta responde:

E	Hay punto medio... pero si es una recta así constante el MT es el MR porque el rectángulo era un caso particular de trapecio
Y	¿Y si no es una recta horizontal, si es oblicua y tomás el MR_?
E	Es el MT lo que te estás tomando...
Y	Claro pero imaginate que querés tomar el MR_

E aplica el MR_ cuando la función es una polinómica de primer grado



E	La congruencia de este triángulo de acá con este de acá
Y	¿Qué te asegura la congruencia?
E	Que es lo mismo tomar el MT que el MR
Y	Bien

Consideraciones finales

- Ninguno de los entrevistados muestra inconvenientes al momento de modificar la tesis y la prueba cuando se pasa de funciones con concavidad positiva a funciones con concavidad negativa.

- Los entrevistados también adaptan caracterizaciones, ya mencionadas por ellos para funciones de concavidad positiva, al caso de funciones de concavidad negativa.

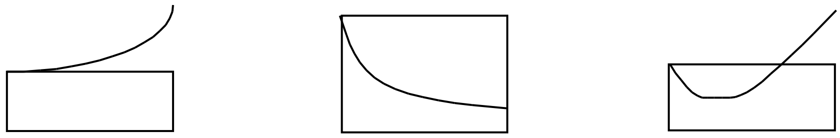
- Los entrevistados también consideran la situación en que las funciones a las que se aplica el MT y el MR_ no tienen concavidad positiva ni negativa.
  - Para los entrevistados C y E esta situación se restringe a los casos en que el gráfico es una recta.
  - Mientras tanto los entrevistados A y B mencionan la “posibilidad” de dividir el dominio en intervalos donde la función sea de concavidad positiva o negativa y aplican en cada subintervalo el teorema propuestos en el guión o su adaptación para funciones de concavidad negativa.
  - Los entrevistados C y D explicitan la imposibilidad de conjeturar el tipo de aproximación ofrecida por el MT para las funciones que tienen concavidad positiva en algunos subintervalos de su dominio y concavidad negativa en otros.

B8. Sobre las conjeturas acerca de las aproximaciones brindadas por los métodos rectangulares para funciones de concavidad positiva

En el transcurso de la entrevista se estuvo discutiendo acerca de si el MT y el MR_ daban aproximaciones por exceso o por defecto del área bajo el gráfico de funciones de concavidad positiva. Pero al inicio de la entrevista además de estos métodos habíamos presentado otros dos: el MR1 y el MR2; por ello, también les propusimos a los entrevistados que conjeturen qué tipo de aproximación del área bajo el gráfico ofrecen estos dos métodos para funciones de concavidad positiva. En este apartado presentaremos la información recogida a este respecto.

Entrevistado A

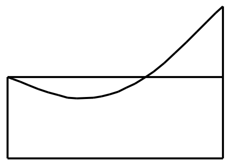
Afirma que **no se puede decir** qué tipo de aproximación ofrece el MR1 para el área bajo la gráfica de funciones positivas de concavidad positiva y para justificarlo dibuja un caso en que da por defecto, uno que da por exceso y otro en que no se sabe:



Entrevistada B

Y Para funciones de c+ ya viste que el MT aproxima por exceso y el MR_ aproxima por defecto ¿Qué tipo de aproximación te ofrece para funciones positivas de c+ el MR1?

B dibuja una función de concavidad positiva a la que le aplica el MR1 con un solo subintervalo en la base.



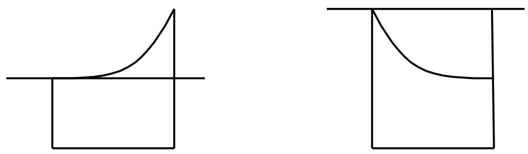
B De todas maneras queda por defecto... No, si uso la primera ordenada no puedo tener en cuenta... En el otro para llegar a que era por defecto lo que hice fue tomar el triángulo, o sea, de todas maneras puedo tomarlo... A ver **¿cómo lo pienso?**

Y ¿Cuál es tu conjetura en principio? ¿Qué va a dar: por defecto o por exceso?

B **No sé**... En ésta (señala el sexto gráfico de la tercera parte del guión el cual no tiene c+) no sé si es por exceso o por defecto porque...

Y ¿Te podrías construir alguna función de c+ en que estés segura que te va a dar por exceso o segura que te va a dar por defecto?

B dibuja ahora dos funciones de concavidad positiva, una creciente y otra decreciente, y les aplica a ambas el MR1



B En ésta va a dar por defecto y en ésta por exceso

Y Por lo tanto ¿qué tipo de aproximación ofrece el MR1? ¿Podés decir que es por exceso o que es por defecto?

B No, **depende**...

Y Vos hiciste el MR1 pero también con el MR2

B Es lo mismo

Llega pues a la conclusión de que el hecho de que la aproximación dada por el MR1 sea por exceso o por defecto, no queda asegurado por la concavidad de la función.

Entrevistado C

También este entrevistado concluye que no se puede conjeturar el signo de la aproximación con sólo conocer la concavidad de la función

Y Viste que para funciones de c+ el MT aproxima por exceso y el MR_ aproxima por defecto, pero ¿qué tipo de aproximación da el MR1?

C Para mí **va a depender de la curva**

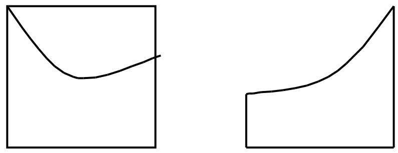
Y ¿Qué quiere decir que va a depender de la curva? ¿Qué tipo de aproximación te puede dar?

C **Hay los dos casos**... **o igual en caso que sea una constante**

Y A ver, dibujame un caso en que la aproximación con el MR1 te dé por exceso...

Y ¿y una por defecto?

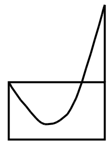
C dibuja dos funciones de concavidad positiva: una creciente, cuya área bajo la curva el MR1 aproxima por defecto y una no monótona pero cuya primer ordenada es el máximo valor funcional, lo que le permite asegurar que el MR1 aproximará por exceso.



Entrevistado D

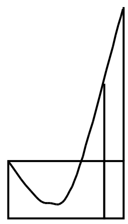
Y Ya vimos que MT aproximaba por exceso y que el MR aproximaba por defecto ¿qué tipo de aproximación te da para funciones de c+ el MR1?

D grafica una función no monótona de concavidad positiva a la que le aplica el MR1



D **No te da nada** porque yo puedo tomar que esta área sea más grande que ésta
Y Lo que perdés es más grande que lo que ganás o…
D O lo que pierda sea más chico que lo que gane

A continuación, D hace una extensión hacia la derecha de su dibujo anterior y en ese nuevo intervalo la aproximación deja de ser por defecto, como hasta ahora lucía, para parecer una aproximación por exceso



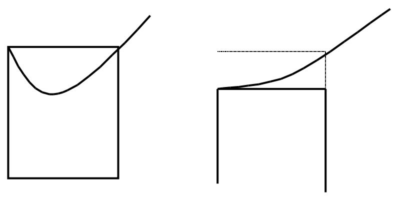
Y O sea, depende de dónde termina tu función… es que la aproximación te va a dar…
D **Por exceso o por defecto**

La idea entonces, para mostrar que la aproximación dada por MR1 puede ser a veces por exceso y otras por defecto, en el caso del entrevistado D, pasa por mostrar distintos ejemplos según varíe el dominio considerado.

Entrevistada E

Y Para funciones de c+ ya vimos que el MT aproxima por exceso y el MR_ aproxima por defecto, sin embargo no dijimos nada del MR1 ni del MR2 ¿qué tipo de aproximación ofrecen? ¿qué podríamos decir de estos métodos para funciones de c+?

E dibuja dos gráficos de funciones de concavidad positiva a las que aplica el MR1: una de ellas creciente, le ofrece un ejemplo de aproximación por defecto, la otra aunque no monótona alcanza su máximo en el extremo izquierdo del intervalo, por lo que le ofrece un ejemplo de aproximación por exceso.



Estos dos ejemplos le permiten llegar a la conclusión de que es imposible conjeturar el tipo de aproximación dada por el MR1 para funciones de concavidad positiva.

E **Depende de qué intervalo te tomás**, depende de cómo sea la concavidad. Porque **no podés afirmar nada**
Y O sea a veces te da ¿qué cosas?
E **A veces te da por exceso y a veces te da por defecto**
Y ¿Y con el MR2?
E Lo mismo, acá con el mismo dibujo te da por defecto y acá por exceso

Observamos que este último comentario es incorrecto pues MR2 da por exceso en ambos ejemplos.

Consideraciones finales

- Los cinco entrevistados dieron ejemplos de funciones de concavidad positiva en que el MR1 da una aproximación por exceso y ejemplos en que el MR1 da una aproximación por defecto.

- Salvo para la entrevistada B, a la que se debió guiar en la tarea, para el resto de los estudiantes no resultó difícil concluir que no se podía afirmar nada acerca del tipo de aproximación brindada por el MR1, ya fuera invocando la dependencia respecto al intervalo considerado o a la forma de la curva.

IV.3.B Conclusiones del análisis con relación a las pruebas:

Con respecto a la lectura de enunciados y diagramas

- La interpretación de los enunciados presentados en el transcurso de la entrevista fue realizada sin problemas por todos los entrevistados.
- En cuanto a la descripción de los diagramas que aparecen en las pruebas visuales de los teoremas propuestos:
  - el diagrama que involucra sólo la relación entre dos figuras, ambas referidas a objetos que aparecen en el enunciado, no ofreció dificultades a ninguno de los entrevistados.
  - surgieron algunos inconvenientes en el marco del segundo teorema, allí donde aparece una figura auxiliar cuya lectura depende exclusivamente de la correcta interpretación de la información implícita en el gráfico (si la tangente tiene pendiente positiva entonces en el punto medio no se alcanza el mínimo) y en el texto del enunciado (si se trata del MR_, el punto señalado debe ser el punto medio de la base). Respecto a este último paréntesis se pudo apreciar que el uso del MR_ en una prueba hizo que tres de los entrevistados se replanteen el significado de "rectángulos de altura la ordenada del punto medio", cuestionamiento que no les había surgido frente a la mera descripción del método.

Con respecto a la verbalización de los argumentos visuales utilizados

- Se aprecia que al inicio los entrevistados presentan argumentos basados mayoritariamente en la percepción, pero enseguida siguen las indicaciones de la entrevistadora, entran en el "contrato experimental" y así, en el juego de la justificación recurriendo a atributos de las funciones de concavidad positiva.
- En este contexto aparecen caracterizaciones que ya habían mencionado en su definición personal o en el tratamiento de los primeros ejemplos, pero también, en todos los casos, aparecen otras que aún no habían sido mencionadas. Al mismo tiempo se detectó la ausencia de alguna mención a una propiedad de las funciones de concavidad positiva (la caracterización etiquetada como D_2 u otra parecida) que se consideraba necesaria para una etapa de la argumentación.
- Un aspecto que resulta interesante resaltar al respecto es que todos los entrevistados trasladaron sin problemas conocimientos adquiridos durante el trabajo con un teorema cuando se enfrentaron a la prueba de otro posterior.

Con respecto a la validez de las pruebas visuales

- El cuestionamiento respecto al carácter genérico de los diagramas no fue espontáneo por parte de ninguno de los entrevistados. Sin embargo, luego de que se les plantea explícitamente el tema, algunos de los entrevistados, al invocar las caracterizaciones de las funciones involucradas en las hipótesis de los teoremas, dieron señales de que efectivamente argumentaban con independencia de las características irrelevantes del diagrama (exceptuando el tema de la derivabilidad en los teoremas 2 y 3).

- Ninguno de los entrevistados comentó nada sobre la validez de los diagramas correspondientes a los dos últimos teoremas, en caso que la función no fuera derivable en su punto medio. Sin embargo no parecería ser el uso sistemático de atributos irrelevantes en la interpretación de pruebas visuales, la mayor dificultad con que nos enfrentaríamos al llevar a clase este tipo de justificaciones. La dificultad parecería radicar, principalmente, en un asunto más general: la ausencia de cuestionamiento por parte de los estudiantes del tipo de atributos en que se apoyan dichas justificaciones.
- Queda planteada alguna duda respecto al uso que hacen algunos de los entrevistados del diagrama: ¿se sienten operando sobre un caso particular que buscan sea lo menos "especial" posible o lo consideran un representante, tan válido como cualquier otro, del conjunto de objetos que están en las condiciones de las hipótesis sobre el que razonar invocando a sus atributos relevantes? Parecería que el carácter genérico de una prueba visual pasa para estos estudiantes por la elección de un diagrama adecuado, cuando en realidad el carácter genérico radica en el tipo de argumentos en que se basa el razonamiento sugerido por ese diagrama.
- No fue por iniciativa propia que los entrevistados discutieron la validez de las pruebas, independientemente del número de intervalos que se consideraran en la partición. Pero luego que se les preguntó al respecto, en el contexto del primer teorema, todos ellos respondieron que el enunciado seguía siendo válido y fueron capaces de adaptar el diagrama de la prueba a una situación en que era otro el número de intervalos en la base. En algunos casos además existieron comentarios de los entrevistados que daban a entender que su prueba tenía validez cualquiera fuera ese número de intervalos elegido.
- Aunque la mayoría de los entrevistados no mostró grandes inconvenientes con la integración de los distintos pasos de la prueba mediante la aplicación de la propiedad transitiva, resulta valioso, por sus implicancias didácticas, atender también las dificultades que mostró uno de ellos para captar el carácter global de las pruebas que se le presentaron.

Con respecto a la conjetura de otros resultados

- A la mayoría de los entrevistados (cuatro de ellos) no le ofreció inconveniente alguno justificar la imposibilidad de establecer un resultado general frente al pedido de conjeturas sobre la aproximación brindada por el MR1 para funciones de concavidad positiva.
- Todos los entrevistados modificaron adecuadamente los enunciados de los teoremas 1 y 2 y sus respectivas pruebas para adaptarlos a funciones de concavidad negativa, para ello también se vieron necesitados de adaptar algunas caracterizaciones de funciones de concavidad positiva para aplicárselas a funciones de concavidad negativa. Esta consideración va en la misma línea que la realizada en el análisis del cuestionario en cuanto a la correspondencia entre las estrategias de trabajo con cotas superiores e inferiores para funciones de concavidad positiva y las estrategias con cotas inferiores y superiores para funciones de concavidad negativa, respectivamente.

V. CONCLUSIONES

Decidimos presentar las conclusiones finales de este trabajo organizadas en función del capítulo del que provienen las bases para su elaboración.

Como conclusiones del capítulo de introducción, presentaremos la explicitación de los objetivos de este trabajo y explicaremos cómo las dos grandes etapas del mismo, las consideraciones teóricas y la parte experimental, pretenden dar respuesta a las interrogantes que esos objetivos encierran.

Respecto al capítulo dedicado a las consideraciones teóricas, destacaremos:

- cómo la noción de Contrato Didáctico, la noción de encapsulación y el análisis de las funciones del trabajo con técnicas algorítmicas y con la dimensión gráfica de los conceptos matemáticos, nos permitieron enmarcar la caracterización de la etapa de transición; y
- por qué ubicamos en el centro de este trabajo el análisis de las actividades de definición y demostración: sus características y sus funciones en la clase de Matemática.

Con relación a los dos capítulos dedicados a la parte experimental, presentaremos como conclusiones los aportes que, a nuestro entender; brindó el análisis de los datos recogidos: el ejemplo concreto de una serie de tareas que propuesta a alumnos los invitó a involucrarse en actividades matemáticas que creemos provechosas y la descripción e interpretación de las respuestas que dieron los estudiantes encuestados a esas tareas.

Por último presentaremos dos apartados que no se relacionan con los capítulos precedentes; se trata del apartado V.5 en que plantearemos las posibles implicancias de este trabajo a la tarea docente, cuestión ésta que habíamos planteado en la introducción como un elemento central en nuestras motivaciones para la realización de este trabajo y del apartado V.6 que dedicaremos a reseñar algunas cuestiones que quedan aún pendientes de estudio.

V.1 Introducción

- Para nuestro trabajo de investigación nos habíamos fijado como objetivos:
  - La caracterización del período de transición entre las etapas de enseñanza matemática: elemental (entendiendo por esto la que transcurre en las etapas de enseñanza obligatoria) y avanzada (la que tiene lugar en el ámbito universitario).
  - La búsqueda de elementos que influyan favorablemente en el aprovechamiento por parte de los estudiantes del período de transición.

- En el contexto del primer objetivo, identificamos como características del período de transición:
  - el mayor peso en el Contrato Didáctico de la responsabilidad del alumno en su propio aprendizaje y en la actividad matemática que realiza,
  - cambios en la vinculación del alumno con la algoritmización, con la visualización y con la encapsulación de procesos matemáticos, y

- el mayor protagonismo de demostraciones y definiciones en la clase de Matemática.

- En consonancia con esta caracterización, en el contexto del segundo objetivo y guiados por la recolección y análisis de datos previos, diseñamos una entrevista centrada en las pruebas visuales de tres teoremas sobre aproximación del área bajo la gráfica de una función de concavidad positiva. El análisis de estas tres pruebas fue seleccionado apenas como ejemplo de otras muchas tareas que promuevan el trabajo en el aula de aquellos aspectos que creemos deben ser tratados durante la etapa de transición.

V.2 Consideraciones teóricas

- Pretendimos enmarcar la descripción de la etapa de transición, en primer término, desde una perspectiva institucional. En este contexto destacamos que entre las etapas elemental y avanzada de la enseñanza de la Matemática varía el Contrato Didáctico asociado a la actividad matemática, debido fundamentalmente a que éstas tienen lugar en distintas instituciones: la Secundaria Obligatoria, el Bachillerato o la Universidad.

- Pasamos después a ocuparnos de aspectos vinculados a la dimensión cognitiva de la etapa de transición:
  - En el apartado dedicado a la encapsulación de conceptos matemáticos, destacamos que la frecuencia y relevancia del uso de proceptos aumenta a medida que transitamos hacia etapas más avanzadas de la enseñanza de nuestra disciplina, que se mantiene el carácter acumulativo de las dificultades provocadas por un tratamiento poco flexible de la dualidad proceptual y que aparecen en esta etapa proceptos cuya formación responde a mecanismos de complejidad mayor que los que conocían de la etapa elemental
  - En el apartado dedicado a la visualización, nos centramos particularmente en su relevancia en el contexto de los cursos de Cálculo Diferencial e Integral que como sabemos son parte fundamental del período de transición. Entendemos que la visualización en estos cursos está llamada a ilustrar las nociones centrales como son la derivada y la integral, a ampliar el repertorio de ejemplos y no-ejemplos de los distintos conceptos y a colaborar en la justificación de afirmaciones que involucran a dichos conceptos; pero este trabajo requiere ser explícitamente contemplado en las actividades de enseñanza.
  - En el apartado dedicado a la algoritmización comenzamos resaltando la importancia de las técnicas en la actividad matemática y en particular nos dedicamos a matizar el desprestigio que, en ocasiones y aunque parezca contradictorio, convive con el uso generalizado de técnicas algorítmicas en el ámbito escolar. Planteamos así mismo que el papel del trabajo con técnicas rutinarias durante la etapa de transición debe ser acompañado de comentarios a los estudiantes que les permitan acercarse a una primera reflexión sobre la función que tiene, en el contexto de la actividad matemática, la realización de esas tareas que puede hacer una máquina.

- En la sección correspondiente a las definiciones matemáticas nuestro estudio y por tanto, las conclusiones que ahora presentaremos se ven influidos por el convencimiento de que el trabajo con definiciones y demostraciones es parte central de las actividades matemáticas de las que debe responsabilizarse el alumno en esa etapa de transición hacia el estudio de Matemática Avanzada.

- Entre las características compartidas por las definiciones matemáticas, destacamos su no-circularidad, su consistencia interna, su deseable minimalidad y su carácter convencional, o sea, la posibilidad de elegir un enunciado según criterios estéticos, operativos o didácticos y según el alcance más o menos restrictivo que se desea otorgar a la definición.
- Dado que ante una tarea que involucra un cierto concepto matemático, el alumno activa otros aspectos de su esquema conceptual antes que su definición de dicho concepto, adquiere relevancia la coherencia interna de ese esquema conceptual y la consistencia entre los aspectos invocados y la definición que le fue presentada. Concluimos de eso que no es indiferente la elección que realice el profesor de la definición para un concepto, la elección de los ejemplos y no-ejemplos con que la acompaña, las imágenes visuales que sugiere, los problemas de aplicación que propone ni las palabras del lenguaje natural con que lee la definición cada vez que ésta es mencionada a lo largo de todo el proceso de enseñanza.

o En la sección dedicada a la demostración partimos de la idea básica que su entendimiento es más que la confirmación de que todos los enlaces en una cadena de deducciones son correctos; la demostración es una importante herramienta para la explicación, descubrimiento, comunicación, validación y sistematización, y deberían ser todas éstas las razones por las que presentamos demostraciones y otros discursos justificativos en el aula. Complementamos estas reflexiones sobre la demostración considerando en paralelo las actividades de refutación, y valorizando la atención prestada a la elección de los contraejemplos, tanto como la prestada a la elección de las pruebas, para que éstos no sólo establezcan la falsedad de la afirmación sino que también exhiban las razones por las que falla lo establecido por la afirmación.
Al igual que en la sección dedicada a las actividades de definición, en la dedicada a la demostración ilustramos las consideraciones realizadas con ejemplos específicos de la Matemática presente en los cursos propios de la etapa de transición, que no son los que se encuentran mayoritariamente en la bibliografía consultada.

V.3 Parte experimental: aspectos metodológicos

o No creemos que en este trabajo haya novedades en el ámbito del diseño de la parte experimental, dado que un cuestionario seguido por una entrevista es algo muy clásico. Creemos que el aporte de este trabajo a nivel metodológico, en caso que exista tal aporte, podría estar en el diseño del propio guión de la entrevista, que la organiza en torno a la lectura de pruebas visuales y a actividades vinculadas a esas pruebas.

o Hemos procurado incluir toda la información relacionada con las decisiones tomadas durante el análisis tanto de las entrevistas como del cuestionario para favorecer la posibilidad de que sean cuestionadas las conclusiones a las que hemos arribado como producto de ese análisis. Para que este cuestionamiento sea posible por parte de cualquier interesado en hacerlo, tiene a su disposición la trascripción de las entrevistas o datos "crudos" de las respuestas dadas en el cuestionario.

V.4 Parte experimental: análisis de datos

- Un primer aporte que podemos destacar a este respecto, es la oportunidad que nos brindaron los datos analizados para ilustrar con ellos algunas consideraciones teóricas presentadas en el segundo capítulo. A modo de ejemplo podemos mencionar los ejemplos que dimos en la sección II.3.2.2 para dos de las funciones de la demostración en la clase de Matemática: alentar el descubrimiento de nuevos resultados y la búsqueda de mejores definiciones para un concepto.

- Las tareas con cotas superiores e inferiores para el área bajo el gráfico de funciones positivas de concavidad positiva son enfrentadas por los estudiantes de manera comparable a las tareas con cotas inferiores y superiores, respectivamente, para funciones de concavidad negativa. esta primera conclusión nos permite presentar las siguientes consideraciones sólo en el caso de funciones de concavidad positiva, puesto que las correspondientes a concavidad negativa serán análogas:
  - El mayor repertorio de estrategias para acotar por exceso, con los datos dados, el área bajo el gráfico de la función de concavidad positiva, se reflejó en un mejor desempeño de los encuestados en el mejoramiento de cotas superiores para el área en cuestión.
  - La preferencia por dar la cota más ajustada posible, se refleja en el uso del método trapezoidal (con uno o dos subintervalos en la base) frente al uso del método rectangular con una partición formada por dos subintervalos. Vale mencionar que la aproximación obtenida al usar este método, la cual recibió menos adhesiones, coincide con lo que sería la suma superior de Riemann, a partir de las cuales habitualmente se define la integral en los cursos universitarios de Cálculo.

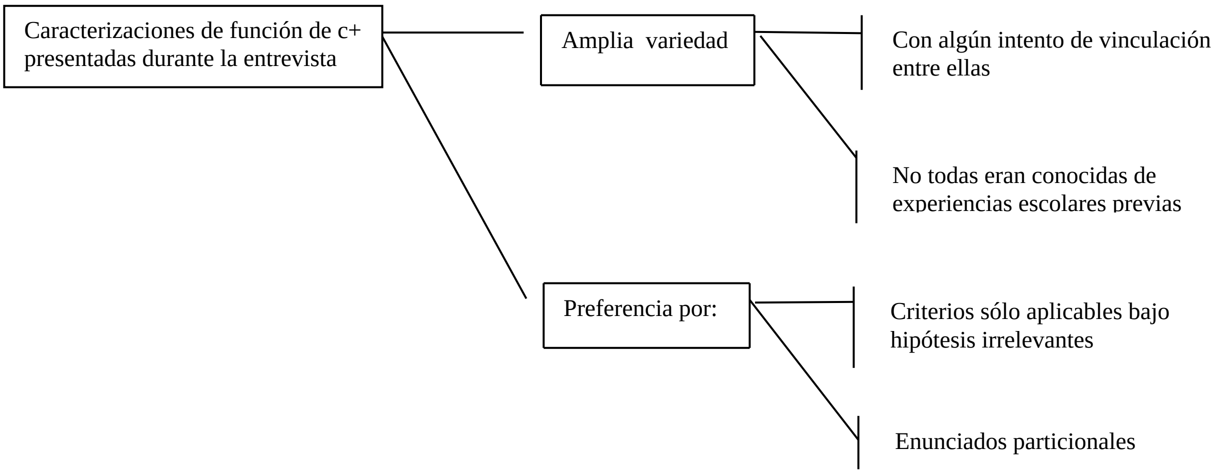
- Se valida lo dicho en la tesis de maestría: frente a una función de concavidad positiva les resulta más fácil trabajar con cotas superiores para el área bajo su gráfico que con cotas inferiores y aunque para funciones decrecientes de concavidad positiva el método rectangular con una partición más fina cumpla el objetivo de mejorar la cota superior dada, los estudiantes prefieren recurrir al uso de trapecios.

- Respecto a la variedad de caracterizaciones:
  - Se pudo apreciar una gran variedad de caracterizaciones movilizadas por el tratamiento de ejemplos gráficos y la interpretación de pruebas visuales. Esta variedad contrasta con la suficiencia de una sola caracterización para la construcción e identificación de ejemplos y para la interpretación de pruebas en que intervienen funciones expresadas algebraicamente.
  - A pesar de la gran variedad de caracterizaciones presentadas por cada uno de los entrevistados, no aparecen éstas totalmente desconectadas una de otras sino que en varios ocasiones se encontraron intentos por vincularlas deductivamente.
  - No todas las caracterizaciones desplegadas por los entrevistados fueran conocidas previamente por ellos sino que se pudo detectar en sus apariciones la búsqueda de referencias al conocimiento escolar previo o la caracterización de la noción según la exigencia de la situación problemática que la involucra.

- Respecto al alcance de las caracterizaciones de función de concavidad positivas manejadas durante la entrevista:

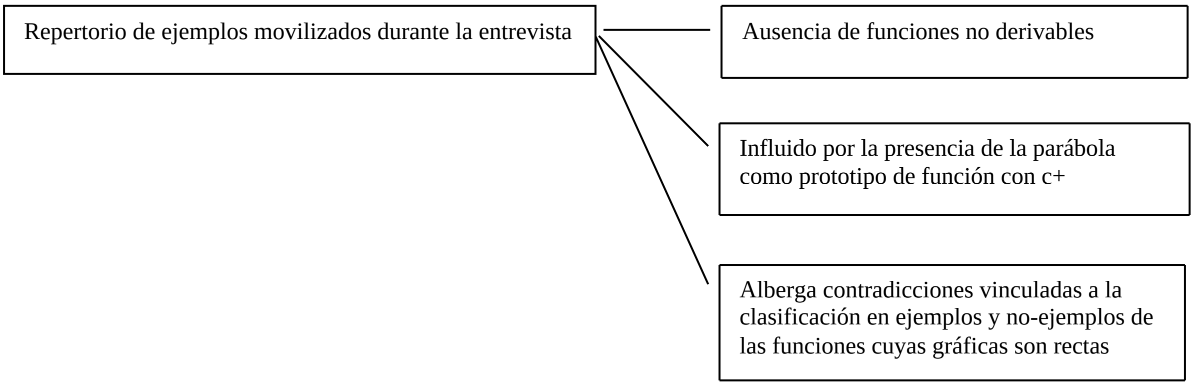
- Destaca la preferencia de los entrevistados por presentar como su definición una caracterización sólo aplicable bajo hipótesis irrelevantes como ser la existencia de derivadas de primer o segundo orden.
- Se aprecia también una tendencia a presentar enunciados restrictivos que conducen a definiciones particionales de la noción de concavidad positiva.

Podemos ilustrar los párrafos anteriores con la reproducción de un detalle del esquema presentado al final de la sección IV.3.A:



- Respecto al repertorio de ejemplos de función de concavidad positiva:
  - Resalta la total ausencia de ejemplos en funciones no derivables y la presencia de “parábolas” entre los ejemplos compartidos por todos los entrevistados. Frente a la tarea de clasificar gráficos en ejemplos o no-ejemplos de funciones de concavidad positiva, también se pudo apreciar una identificación muy fuerte entre los ejemplos de funciones de concavidad positiva y aquellas cuyo gráfico se asemeja a una parábola.
  - Aunque en la construcción de ejemplos propios prevalecieron las funciones no monótonas, en el transcurso de la entrevista, la clasificación de ejemplos dados o la búsqueda de contraejemplos para afirmaciones falsas, los llevó a ampliar su repertorio de ejemplos de funciones de concavidad positiva.
  - Destaca también la existencia de contradicciones en varios de los entrevistados al momento de clasificar funciones cuyos gráficos son rectas, en algunas ocasiones como ejemplos y en otras como no-ejemplos de funciones de concavidad positiva, mostrando así incoherencias en sus esquemas conceptuales. Incoherencias que a nuestro entender pueden explicarse por la distancia entre las preferencias de matemáticos y estudiantes con relación a las definiciones jerárquicas o particionales.

Nuevamente presentamos un detalle del esquema de la sección IV.3.A para ilustrar lo considerado con relación al repertorio de ejemplos de función de concavidad positiva:



- Con respecto a la lectura de enunciados y diagramas que aparecen en las pruebas involucradas en el guión de la entrevista:
  - La interpretación de los enunciados presentados en el transcurso de la entrevista fue realizada sin problemas por todos los entrevistados.
  - La descripción de diagramas no ofreció dificultades cuando éste involucraba sólo la relación entre dos figuras, ambas referidas a objetos que aparecen en el enunciado, pero surgieron algunos inconvenientes en el marco del segundo teorema, donde aparece una figura auxiliar cuya lectura depende exclusivamente de la correcta interpretación de la información implícita en el gráfico (si la tangente tiene pendiente positiva entonces en el punto medio no se alcanza el mínimo) y en el texto del enunciado (si se trata del método rectangular usando la ordenada del punto medio, el punto señalado debe ser el punto medio de la base).

- Con respecto a la verbalización de los argumentos visuales utilizados:
  - Al inicio los entrevistados presentan argumentos basados mayoritariamente en la percepción, pero siguiendo las indicaciones de la entrevistadora, pasan luego a intentar justificaciones basadas en atributos relevantes de este tipo de funciones.
  - En este contexto aparecen caracterizaciones que ya habían mencionado en su definición personal o en el tratamiento de los primeros ejemplos, pero también, en todos los casos, aparecen otras que aún no habían sido mencionadas.
  - Todos los entrevistados trasladaron sin problemas conocimientos adquiridos durante el trabajo con un teorema cuando se enfrentaron a la prueba de otro posterior.

- Con respecto a la validez de las pruebas visuales
  - El cuestionamiento respecto al carácter genérico de los diagramas no fue espontáneo por parte de ninguno de los entrevistados. Pero luego que se les plantea explícitamente el tema, algunos de ellos, al invocar las caracterizaciones de las funciones involucradas en las hipótesis de los teoremas, dieron señales de que podían argumentar con independencia de las características irrelevantes del diagrama.

    Debemos exceptuar del comentario anterior el tema de la derivabilidad en los teoremas 2 y 3 ya que ninguno de los entrevistados comentó nada sobre la validez de los diagramas en caso que la función no fuera derivable en su punto medio.

    Sin embargo no parecería ser el uso sistemático de atributos irrelevantes en la interpretación de pruebas visuales, la mayor dificultad con que nos enfrentaríamos al llevar a clase este tipo de justificaciones. La dificultad parecería radicar, principalmente, en un asunto más general: la ausencia de cuestionamiento por parte de los estudiantes del tipo de atributos en que se apoyan dichas justificaciones.

- Queda planteada alguna duda respecto al uso que hacen algunos de los entrevistados del diagrama, parecería que el carácter genérico de una prueba visual pasa para ellos por la elección de un diagrama adecuado, cuando en realidad el carácter genérico radica en el tipo de argumentos en que se basa el razonamiento sugerido por ese diagrama.

- Con respecto a la conjetura de otros resultados
  - Ofreció pocos inconvenientes justificar la imposibilidad de establecer un resultado general frente al pedido de conjeturas sobre la aproximación brindada por el método rectangular usando la primera ordenada para funciones de concavidad positiva.
  - Todos los entrevistados modificaron adecuadamente los enunciados de los teoremas 1 y 2 y sus respectivas pruebas para adaptarlos a funciones de concavidad negativa, para ello también se vieron necesitados de adaptar algunas caracterizaciones de funciones de concavidad positiva para aplicárselas a funciones de concavidad negativa. Esta consideración va en la misma línea que la realizada en el análisis del cuestionario en cuanto a la correspondencia entre las estrategias de trabajo con cotas superiores e inferiores para funciones de concavidad positiva y las estrategias con cotas inferiores y superiores para funciones de concavidad negativa, respectivamente.

Ilustraremos ahora los párrafos relativos a las conclusiones extraídas del análisis de datos relacionados con las actividades de justificación, reproduciendo un esquema inspirado en el que aparece al final de la sección IV.3.B:

Respecto a la interpretación de enunciados	No plantearon dificultades
Respecto a la descripción de diagramas	Plantearon algunas dificultades en la integración de las distintas partes de los diagramas más complejos y en la interpretación de información dada implícitamente
Respecto a la verbalización de argumentos visuales	No explicitan espontáneamente que la validez de sus argumentos se apoya en el uso exclusivo de atributos relevantes de los objetos representados gráficamente
Respecto al cuestionamiento de la validez de las pruebas	El carácter genérico de los diagramas y el uso del atributo irrelevante de la derivabilidad en el punto medio, no es cuestionado espontáneamente por ningún entrevistado
Respecto a los aportes al aprendizaje provenientes del trabajo con las pruebas	Invitan a la formulación de nuevas caracterizaciones de los objetos representados
	Generan conocimientos aplicables de una prueba en otra y aplicables bajo alteración de hipótesis

V.5 Implicancias en la tarea docente

En los párrafos previos ya hemos mencionado algunas posibles implicancias de este estudio para tener en cuenta en nuestro trabajo en el aula, no las reiteraremos sino que nos centraremos en algunas consideraciones que no habíamos mencionado aún en este capítulo.

- Tanto en las reflexiones acerca de la demostración como de la definición hemos visto que algunos obstáculos para la aceptación por parte del alumno de sus peculiaridades provienen de las diferencias de su funcionamiento en el ámbito matemático respecto al contexto cotidiano. Creemos que este aspecto debe ser especialmente atendido en las actividades de enseñanza en esta etapa.

- En esta etapa de transición ni las definiciones ni las demostraciones deberían ser presentadas en el aula como fines en sí mismos:
  - Las definiciones responden a necesidades de organización y crecimiento del conocimiento matemático, y la satisfacción de estas necesidades, como vimos en los capítulos previos, se ve afectada tanto por el enunciado elegido para la definición como por el momento escogido para su presentación.
  - La lectura y la elaboración de pruebas cumplen objetivos que van más allá del convencimiento de que una determinada afirmación es verdadera. Pueden, por ejemplo, ser fuente de reflexión sobre la definición de los objetos matemáticos involucrados, poner a prueba el repertorio de ejemplos, o invitar a la explicitación de atributos compartidos por todos los ejemplos del concepto, o sea, al establecimiento de propiedades de ese concepto que quizás hasta ese momento no eran conocidas.

  Lo anterior llama a la reflexión detenida por parte de los profesores acerca de cómo, cuándo y por qué presentamos cada definición y cada demostración. Creemos así mismo que esta preocupación por dar respuesta a la pregunta de para qué sirve demostrar y definir en esta etapa de la enseñanza de la Matemática, no está reñida con el interés cultural de mostrar el papel que estas actividades en sí mismas han tenido en el desarrollo de la ciencia y por tanto, del conocimiento de la humanidad.

- La lectura de pruebas visuales se ha mostrado como una actividad que favorece la discusión de aspectos relacionados con el quehacer matemático que creemos relevantes en la etapa de transición:
  - La aceptación por parte del estudiante de que la definición de un concepto predetermina los atributos compartidos por todos sus ejemplos, y representa el criterio fundamental para la clasificación de ejemplos y la interpretación de pruebas visuales.
  - La consideración de que cada concepto puede ser definido de diferentes maneras y que disponer de una gran variedad de definiciones equivalentes (en el sentido que cada determina el mismo conjunto de ejemplos) colabora en la resolución de problemas en las que el concepto está involucrado. En este sentido, el trabajo con pruebas visuales como las del guión utilizado, ha mostrado ser motivo de enriquecimiento del esquema conceptual asociado al concepto en cuestión.
  - La importancia de poseer un amplio repertorio de caracterizaciones de un concepto debe ser complementada con el estudio de la vinculación entre esas

caracterizaciones y de su papel en la construcción e identificación de ejemplos y en la elaboración y justificación de conjeturas.

- La atención al tema del carácter genérico de un diagrama como apoyo a la función de validación de estas pruebas aun cuando esa no sea la razón principal para presentarla. Esta atención debe tomar en cuenta que la validez de una prueba visual pasa por el uso exclusivo de los atributos relevantes de los objetos graficados, más aún que por la construcción de un buen diagrama. Creemos importante que el estudiante reconozca que para detectar los atributos relevantes de los objetos graficados, y con ello evaluar la generalidad de la prueba, es imprescindible recurrir al enunciado (que no sólo acompaña al diagrama sino que, él mismo, es parte de la prueba) y a la definición de los objetos que ese enunciado menciona.

V.6 Tareas futuras

- Algunas cuestiones quedaron pendientes de estudio en este trabajo. Entre ellas destacamos:
  - Siguen sin respuesta interrogantes planteadas al final de la tesis de maestría; en la parte experimental del presente trabajo sólo miramos cuestiones relacionadas con la aproximación del área bajo una curva cuando ésta tiene concavidad positiva o negativa pero quedan pendientes otras cuestiones relativas a la aproximación, cálculo y acotación de áreas de otro tipo de regiones.
  - Resta por presentar el análisis de cuatro de las preguntas del cuestionario propuesto, cuyo estudio no se volcó en este trabajo, lo que posiblemente permitiría profundizar en el estudio de aproximación, cálculo y acotación de áreas de regiones irregulares.
  - En el ámbito del estudio de la aproximación del área de regiones determinadas por el gráfico de funciones de concavidad conocida, quedan también algunos aspectos que hubiera sido interesante analizar. Por ejemplo: no sabemos si para funciones de concavidad negativa los estudiantes veían, después de adaptar los teoremas 1 y 2, que aquí no había que modificar el enunciado pero sí la prueba del teorema 3.

- Existen también profundizaciones posibles de temas abordados aquí y cuestiones que recién ahora se ven como interesante para investigar. Entre ellas podemos mencionar:
  - El diseño de otras tareas similares a las utilizadas aquí para el guión de la entrevista, pero que más que vincularse con la componente visual del concepto de integral lo hagan con su componente numérica, dando ocasión de profundizar en el papel de los algoritmos en la clase de matemática.
  - La vinculación y distinción entre las condiciones sólo necesarias, las condiciones sólo suficientes y las definiciones de un concepto, y la función de cada una de éstas en la formación del repertorio de ejemplos y no-ejemplos.

VI. BIBLIOGRAFÍA

ALSINET, J., GASCÓN, J., GOMA, A. & REVENTOS A. (1997) *Informe sobre el pas de la secundària al primer curs de la llicenciatura de Matemàtiques i d'Enginyeria Informàtica en la Universitat Autònoma de Barcelona*. Documento no publicado. ICE-UAB

ARTIGUE, M. (1991) Analysis. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/ Boston/ London. Pp. 167-198.

ARTIGUE, M. (1994) Didactical Engineering as a Framework for the Conception of Teaching Products. En Biehler, R. et al. (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline.* Kluwer Academic Publisher. Dordrecht. Pp. 27-39.

ARTIGUE, M. (1995) Ingeniería didáctica. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gomez, P. (ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Grupo Editorial Iberoamérica. México. Pp. 33-59.

ARTIGUE, M. (1997) Le logiciel "DERIVE" comme revelateur de phénomènes didactiques liés à la utilisation d'environements informatiques pour l'apprentissage. *Educational Studies in Mathematics, 33.* Pp 133-169.

AZCÁRATE, C. (1995) *Procesos de pensamiento matemático avanzado.* Documento interno del Departament de Didàctica de la Matemàtica i les Ciències Experimentals. Universitat Autònoma de Barcelona.

AZCÁRATE, C., MORENO, M. & ROMERO, C. (1998). *Acerca del modelo de los esquemas conceptuales*. Documento interno no publicado del Seminario de "Procesos del pensamiento matemático avanzado" Universitat Autònoma de Barcelona.

BALACHEFF, N. (1982) Preuve et demostration en Mathématiques au College. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 3, Nº 3.

BALACHEFF, N. (1987) Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics,* 18. Pp 147-176

BALACHEFF, N. (1988a) Aspects of Proof in Pupils' Practice of School Mathematics. En Pimm, D. (ed.) *Mathematics Teacher and Children*. Open University Press.

BALACHEFF, N. (1988b) Etude des processus de preuve des élèves de Collège. *Thèse de Doctorat d'état ès-sciences*. Grenoble: Université Joseph Fourier. Capítulo 3 del volumen 1 (disponible en http://callimaque.grenet.fr).

BALACHEFF, N. (1990) Beyond a Psychological Approach: the Psychology of Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics,* 10, 3.

BALACHEFF, N. & LABORDE, C. (1985) Lenguajes simbólicos y pruebas en la enseñanza de las Matemáticas: un enfoque socio-cognitivo. En Mugny, G. & Pérez J. (eds.), *Psicología social del desarrollo cognitivo.* Editorial Anthropos. Barcelona. Pp. 265-288.

BARTLE, R. & SHEBERT, D. (1982) *Introducción al Análisis Matemático de una variable*. Limusa. México.

BARWISE, J. & ETCHEMENDY, J. (1991) *Visual Information and Valid Reasoning.* En Zimmermann, W. & Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* Mathematics Association of America. Pp. 9-24.

BILLS, L. & TALL, D. (1998) Operable Definitions in Advanced Mathematics: the Case of the Least Upper Bound. *Proceedings XXII PME Conference*. Southafrica.

BLISS, J., MONK, M. & OGBORN, J. (1983) *Qualitative Data Analysis for Educational Research.* Croom Helm. London.

BOSCH, M. (1994) *La dimensión ostensiva en la actividad matemática: el caso de la proporcionalidad.* Tesis de Doctorado. Universidad Autónoma de Barcelona.

BROUSSEAU, G. (1986) Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 7, 2. Pp. 33-115

CALVO, C. (1997) *Bases para una propuesta didáctica sobre Integrales.* Tesis de Maestría. Universidad Autónoma de Barcelona.

CHEVALLARD, Y. (1991) *La transposition didactique.* La Pensée Sauvage. Grenoble.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. & GASCÓN, J. (1997) *Estudiar Matemática: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje.* Cuadernos de Educación. Editorial Horsori. Barcelona.

De VILLIERS, M. (1993) El papel y la función de la demostración en Matemáticas. *Epsilon* Nº 26. Pp 15-30.

De VILLIERS, M. (1998) To Teach Definitions in Geometry or to Teach to Define? *Proceedings XXII PME Conference.* Southafrica.

DREYFUS, T. (1990) Advanced Mathematical Thinking. En Nesher, P. & Kilpatrick, J. (eds.), *Mathematics and Cognition*. Cambridge University Press. Cambridge. Pp. 113-133.

DREYFUS, T. (1991) Advanced Mathematical Thinking Processes. En Tall, D. (ed.), A*dvanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/ Boston/ London. Pp. 25-41.

DREYFUS, T. & EISENBERG, T. (1990) On Difficulties with Diagrams: Theorical Issues. *Proceedings XIV PME Conference.* México. Vol. 1. Pp. 27-33.

DUVAL, R. (1992) Argumenter, demostrer, expliquer: continuite ou rupture cognitive? *Petit x.* Nº 31. Pp 37-61

DUBINSKY, E. (1991) Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/ Boston/ London. Pp. 95-123.

DUBINSKY, E. & TALL, D. (1991) Advanced Mathematical Thinking and the Computer. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/ Boston/ London. Pp. 231-243.

EISENBERG, T. (1994) On Understanding the Reluctance to Visualize. *Z.D.M*., 94/4. Pp.109-113.

FISCHBEIN, E. (1982) Intuition and Proof. *For the Learning of Mathematics*, 3, 2. Pp.9-18 y 24.

FISCHBEIN, E. (1993) The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 24. Pp 139-162.

GARBIN, S. (2000) *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16-17 años.* Tesis de doctorado. Universidad Autónoma de Barcelona.

GRAY, E. & TALL, D. (1993) Success and Failure in Mathematics: The Flexible Meaning of Symbols as Process and Concept. *Mathematics Teaching,* 142. Pp. 6-10.

GRAY, E. & TALL, D. (1994) Duality, Ambiguity and Flexibility: a “Proceptual” View of Simple Arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education,* 25, 2. Pp. 116-140.

GROSSMAN, S. (1996) *Álgebra lineal.* McGraw-Hill/Interamericana de México.

HANNA, G. (1989) Proofs that Prove and Proofs that Explain. *Proceedings XII PME Conference.* París. Vol. 2. Pp. 45-51.

HANNA, G. (1991) Mathematical Proof. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/ Boston/ London. Pp. 54-61.

HANNA, G. (1995) Challenges to the Importance of Proof. *For the Learning of Mathematics,* 15, 3. Pp. 42-49.

HAREL, G. & KAPUT, J. (1991) The Role of Conceptual Entities and their Symbols in Building Advanced Mathematical Concepts. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/ Boston/ London. Pp. 82-93.

HEID, M.K. (1988) Resequencing Skills and Concepts in Applied Calculus using a Computer as a Tool. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 1. Pp. 3-25.

HERSHKOWITZ, R. (1990) Psychological Aspects of Learning Geometry. En Nesher, P. & Kilpatrick, J. (eds.) Mathematics and Cognition. Cambridge University Press.

LABORDE, C. (1993) The Computer as Part of the Learning Environment: the Case of Geometry. En Keitel, C. & Ruthven, K. (eds.): *Learning from Computers: Mathematics Education and Technology*. Berlin Springer-Verlag. Pp. 48-67

LAKATOS, I. (1978) Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático. Alianza Universidad. Madrid.

MARIOTTI, M. A. & FISCHBEIN, E. (1997) Defining in Classroom Activities. *Educational Studies in Mathematics*. Nº34 Pp. 219.

MARTIN, G. & HAREL, G. (1989) The Role of the Figure in Students’ Concepts of Geometric Proof. *Proceedings XIII PME Conference.* Paris.

MOORE, R. (1994) Making the Transition to Formal Proof. *Educational Studies in Mathematics*. Nº 27. Pp 249.

NELSEN, R.B. (1993) *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking.* The Mathematical Association of America. Washington.

NESHER, P. (1986) Are Mathematical Understanding and Algorithmic Performance Related? *For the Learning of Mathematics.* Vol. 6, 3. Pp.2-8.

ORTON, A. (1983) Students' Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1. Pp. 1-18.

PALMITER, J. (1991) Effects of Computer Algebra Systems on Concept and Skill Acquisition in Calculus. *Journal for Research in Mathematic Education.* Nº 22. Pp. 151-156.

PELED, I & ZASLAVSKY, O. (1997) Counter-Examples that (Only) Prove and Counter-Examples that (Also) Explain. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Pp. 49-61.

PIMM, D. (1990) *El lenguaje matemático en el aula.* Ministerio de Educación y Ciencia y Ediciones Morata. Madrid.

RASSLAN, S. & VINNER, S. (1994) Images and Definitions for the Concept of Increasing/Decreasing Function. *Proceedings XVIII PME Conference*. Lisboa.

ROBERT, A. & SCHWARZENBERGER, R. (1991) Research in the Teaching and Learning Mathematics at an Advanced Level. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/ Boston/ London. Pp. 127-139.

ROBERTS, W. & VARBERG, D. (1973) *Convex Functions.* Academic Press. New York - London.

SELDEN, A. & SELDEN J. (1996) The Role of Logic in the Validation of Mathematical Proofs. Conferencia presentada en DIMACS: Symposium on Teaching Logic and Reasonning. Rutger University. (http://www-cabri.imag.fr/Preuve/Newsletter/980304.html)

SELDEN, A. & SELDEN J. (1998) The Role of Examples in Learning Mathematics. http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_.html

SIERPINSKA, A. (1992) On Understanding The Notion of Function. En Dubinsky, E. (ed.) *The concept of function*. Mathematical Association of America.

TALL, D. (1990) Inconsistencies in the Learning of Calculus and Analysis. *Focus on Larning Problems in Mathematics,* 12. Pp. 49-64.

TALL, D. (1991a) Intuition and Rigour: The Role of Visualization in the Calculus. En Zimmermann, W. & Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* Mathematics Association of America. Pp. 105-119.

TALL, D. (1991b) Reflections. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/ Boston/ London. Pp. 251-260.

TALL, D. (1991c) The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/ Boston/ London. Pp. 3-21.

TALL, D. (1994) Understanding the Pocesses of Advanced Mathematical Thinking. *Conferencia en el "International Congress of Mathematicians".* Zurich.

TALL, D. (1995) Cognitive Development, Representation an Proof. *Paper presented at a Conference on Institute of Education of London.* Pp. 27-38.

TALL, D., VAN BLOKLAND, P. & KOK, D. (1990) *A Graphic Approach to the Calculus.* Rivendell Software. Warwicks.

TALL, D & VINNER, S. (1981) Concept Image and Concept Definition in Mathematics whith Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics 12,2.* Pp 151-169.

TIROSH, D. (1990) Inconsistencies in Students’ Mathematical Constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics.* Vol. 12. Pp. 111-129.

VINNER, S. (1990) Inconsistencies: Their Causes and Function in Learning Mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics.* Vol. 12. Pp. 85-98.

VINNER, S. (1991) The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking.* Kluwer Academic Publisher. Dordrecht/ Boston/ London. Pp. 65-80.

VINNER, S., LINCHEVSKI, L. & KARSENTY, R. (1993) How Much Information Should Include a Geometrical Definition? *ZDM* 93/5. Pp 164-170

WILSON, P. (1990) Inconsistent Ideas Related to Definitions and Examples. *Focus in Learning Problems in Mathematics*. Vol. 12. Nº 3-4. Pp. 31

ZIMMERMANN, W. (1991) Visual Thinking in Calculus. En Zimmermann, W. & Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* Mathematics Association of America. Pp. 127-138.

ZIMMERMANN, W. & CUNNINGHAM, S. (1991) Editors' Introduction: What is Mathematical Visualization? En Zimmermann, W. & Cunningham, S. (eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics.* Mathematics Association of America. Pp. 1-8.

VII. ANEXOS

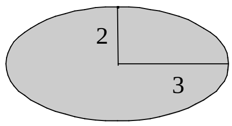
En este último capítulo presentamos información complementaria a la lectura de la parte experimental del presente trabajo. En primer término, exponemos las seis preguntas que integraban el cuestionario que mencionamos en las secciones III.2 y IV.1.2 y del cual analizamos únicamente las preguntas 3 y 6. Luego, presentamos el guión de las entrevistas comentadas en las secciones III.3 y IV.3, tal como fue presentado a los estudiantes. Por último ponemos a consideración de los lectores la trascripción de dichas entrevistas.

VII.1 Copia del cuestionario propuesto

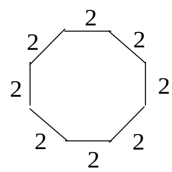
PREGUNTA 1: Dibuja una figura no limitada por segmentos de recta ni arcos de circunferencia cuya área se encuentre entre $9cm^2$ y $25cm^2$.

PREGUNTA 4: Dibuja una figura no limitada por segmentos de recta ni arcos de circunferencia cuya área sea aproximadamente $6cm^2$.

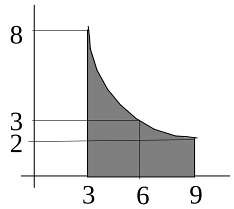
PREGUNTA 2: Escribe un par de valores entre los que estará el área de la siguiente figura (explicando por qué has elegido tales valores).



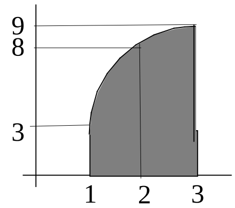
PREGUNTA 5: Escribe un par de valores entre los que estará el área de la siguiente figura (explicando por qué has elegido tales valores).



PREGUNTA 6: El área sombreada es mayor que 12 y menor que 48. ¿Por qué? ¿Puedes dar cotas más ajustadas?



PREGUNTA 3: El área sombreada es mayor que 6 y menor que 18. ¿Por qué? ¿Puedes dar cotas más ajustadas?



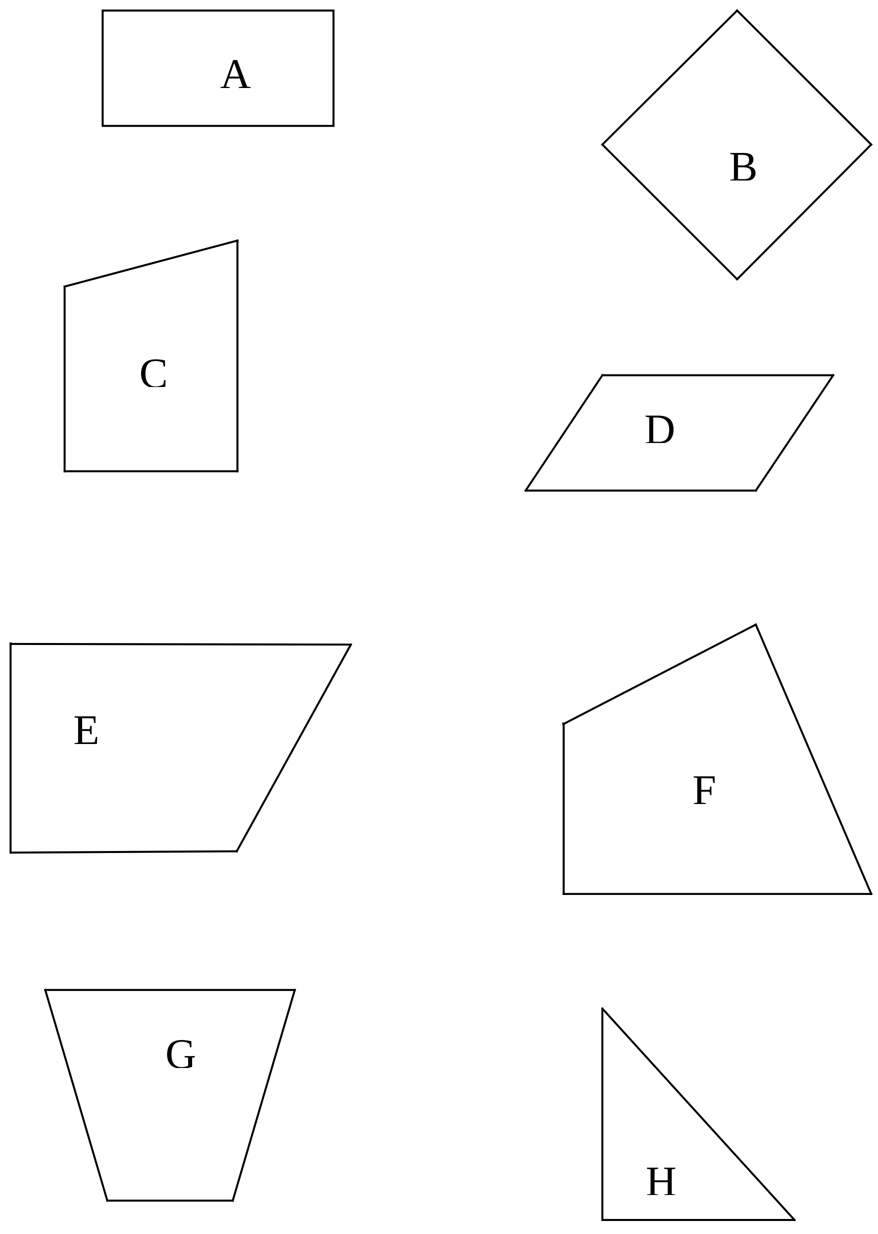
VII.2 Guión de la entrevista

PRIMERA PARTE

1) Definir rectángulo y trapecio

2) Dar dos ejemplos y dos no ejemplos de cada uno

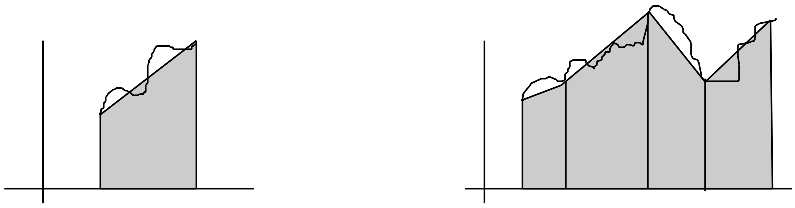
3) Señalar cuáles de los siguientes figuras son trapecios



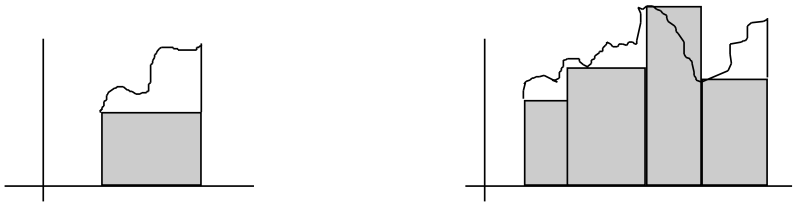
SEGUNDA PARTE

1) Algunos métodos de aproximación del área entre el gráfico de una función positiva y el eje de abscisas:

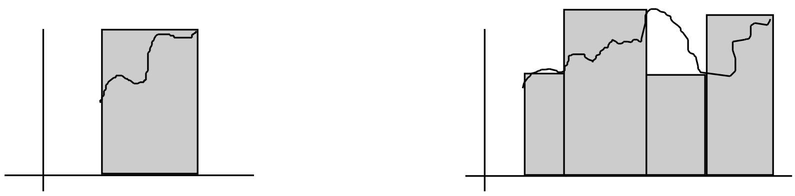
Método trapezoidal:



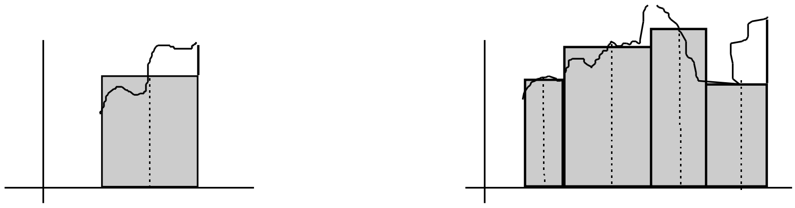
Método rectangular usando la primera ordenada:



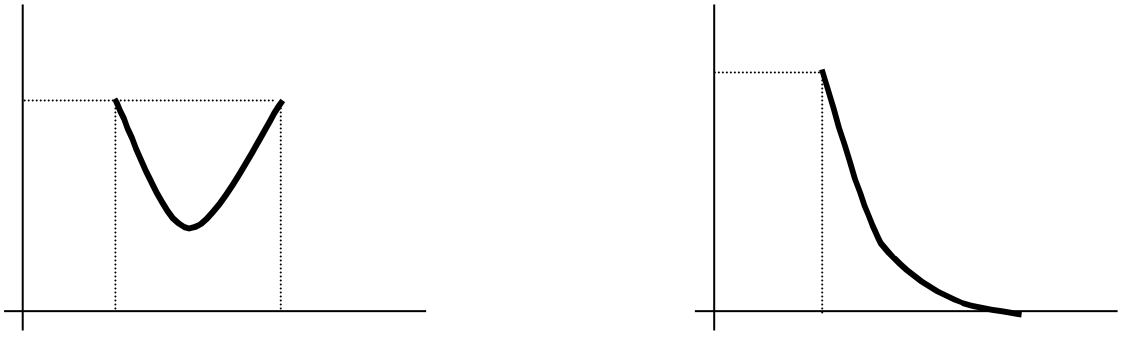
Método rectangular usando la segunda ordenada:



Método rectangular usando la ordenada del punto medio:



2) ¿Qué figura se usa según el método trapezoidal con un solo intervalo en la base para aproximar el área bajo las siguientes gráficas?



TERCERA PARTE

Para funciones positivas de concavidad positiva el método trapezoidal ofrece una aproximación por exceso del área bajo la gráfica

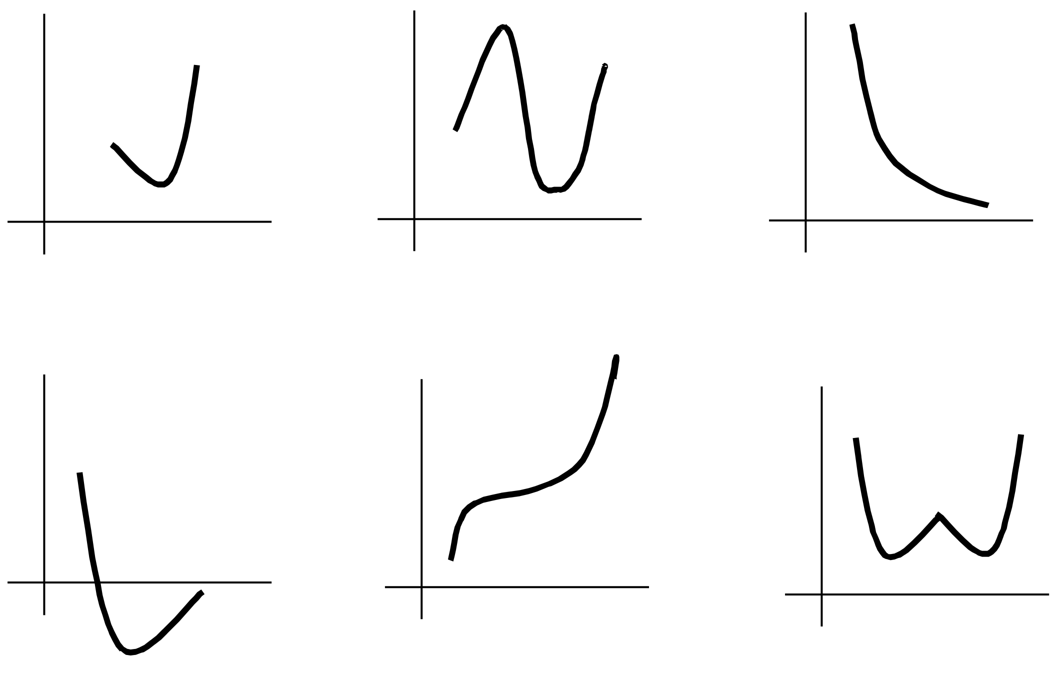
1) ¿Cómo interpretas ese enunciado?

2) ¿Qué quiere decir que una función tenga concavidad positiva?

3) Dibuja algunos ejemplos de funciones de concavidad positiva.

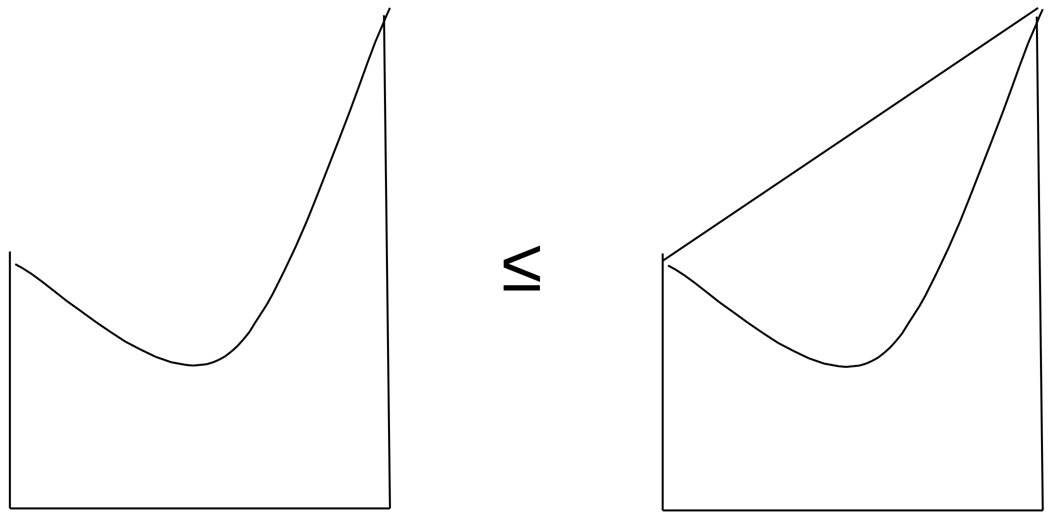
4) ¿Conoces otra definición de "función de concavidad positiva"? ¿Qué relación existe entre esas definiciones?

En caso que los ejemplos dados en 3) no sean abundantes, se agregaría:
3') ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen concavidad positiva?



CUARTA PARTE

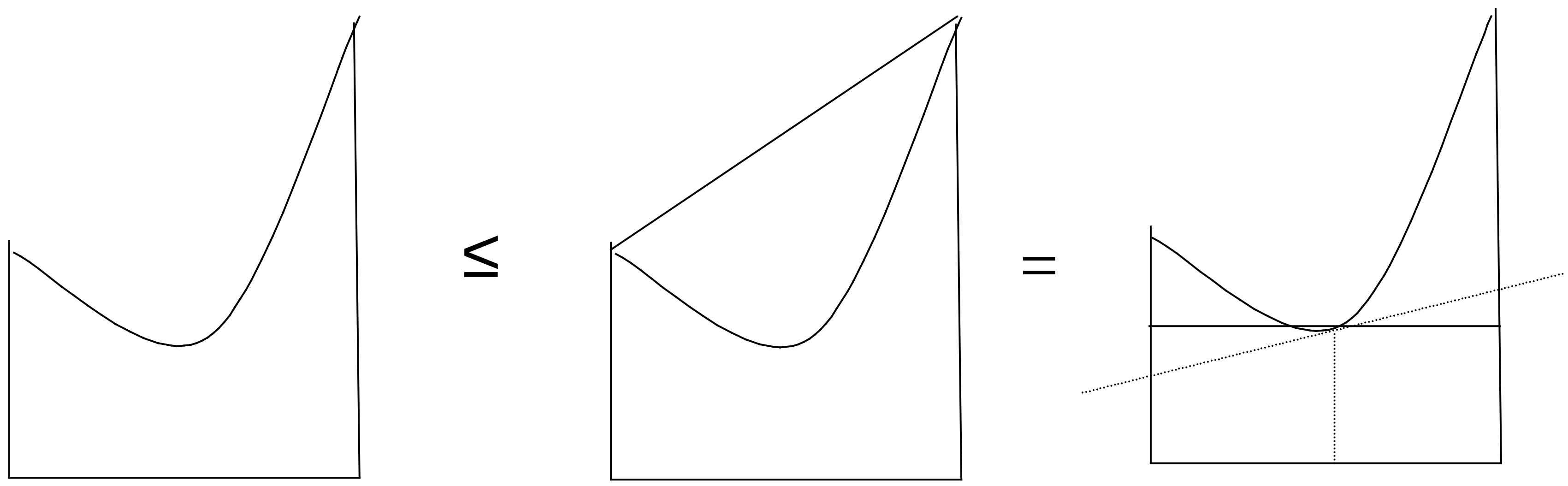
Para funciones positivas de concavidad positiva el método trapezoidal ofrece una aproximación por exceso del área bajo la gráfica



1) ¿Depende la prueba anterior de la figura elegida como ejemplo genérico de función positiva de concavidad positiva?
2) ¿Qué sucede si en vez de considerar un solo intervalo en la base se toman varios?

CUARTA PARTE

Para funciones positivas de concavidad positiva el método trapezoidal ofrece una aproximación por exceso del área bajo la gráfica



SEXTA PARTE

1) Para funciones de concavidad positiva ya vimos que el método trapezoidal aproxima por exceso y el método rectangular usando la ordenada del punto medio aproxima por defecto ¿Qué tipo de aproximación ofrece para funciones de concavidad positiva el método rectangular usando la primera ordenada? ¿y usando la segunda ordenada?

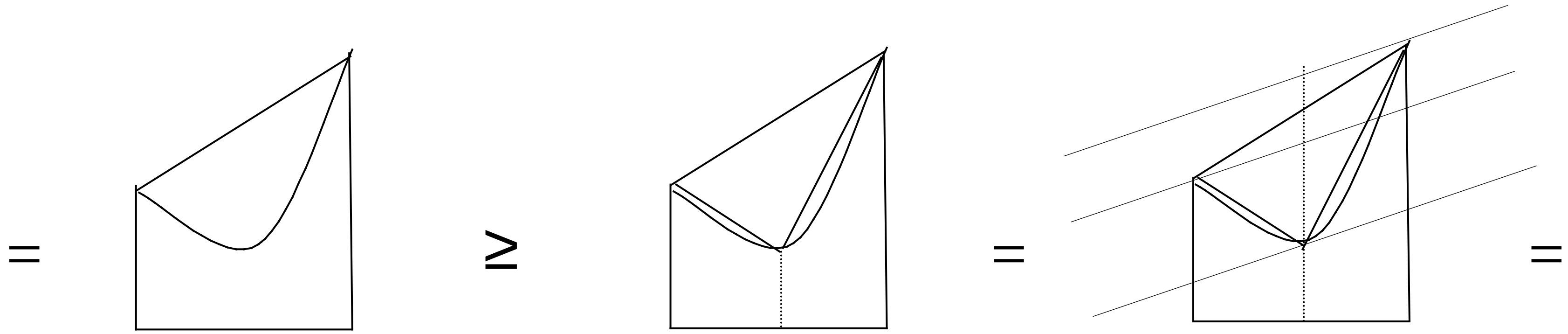
2) ¿En que puntos de las pruebas anteriores se usa el dato acerca de la concavidad de la función?

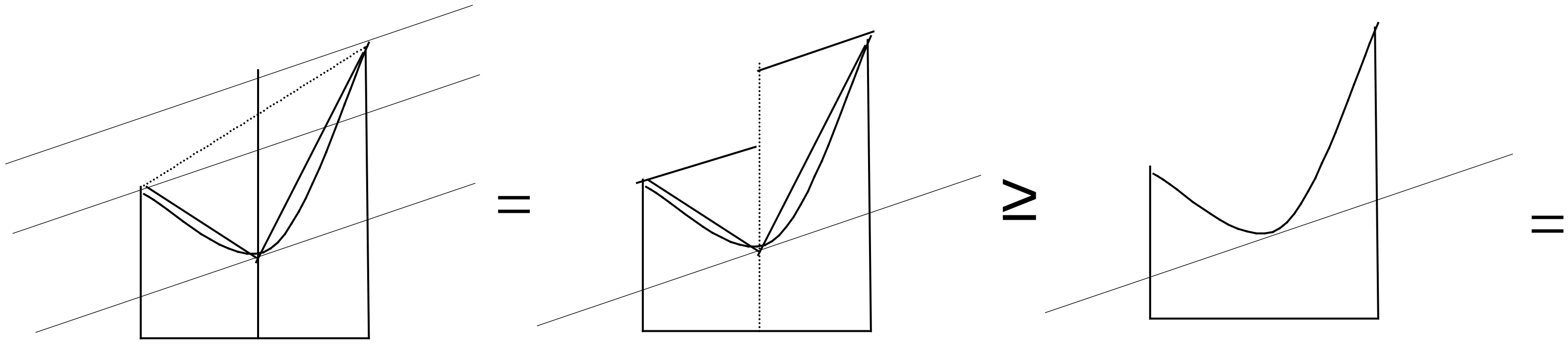
3) ¿Qué podrías decir de las aproximaciones que ofrecen el método trapezoidal y el método rectangular usando la ordenada del punto medio cuando las funciones no tienen concavidad positiva?

SÉPTIMA PARTE

Para funciones positivas de concavidad positiva el método trapezoidal ofrece una aproximación del área bajo la gráfica menos ajustada que la que ofrece el método rectangular usando la ordenada del punto medio

Error de
la aproxi-
mación
ofrecida
por el MT





Error de
la aproxi-
mación
ofrecida
por el MR

VII.3 Trascripción de las entrevistas

A continuación presentaremos la trascripción de las cinco entrevistas realizadas para la parte experimental de este trabajo

Las entrevistas, de poco más de una hora de duración, fueron realizadas en abril de 1999, en base a un guión preestablecido que aparece en el capítulo III. Y, como ya habíamos mencionado, los entrevistados fueron cinco estudiantes matriculados en el primer año de la Licenciatura de Matemática en la Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, que en esta oportunidad identificaremos con las letras A, B, C, D y E.

Para la lectura de las trascripciones que aquí aparecen conviene conocer, con anterioridad, las claves para interpretar ciertas abreviaturas que utilizamos:

aprox	aproximación
c+	concavidad positiva
c-	concavidad negativa
dem	demostración
teo	teorema
tg	tangente
MR	método rectangular
MR1	MR usando la ordenada del primer punto
MR2	MR usando la ordenada del segundo punto
MR_	MR usando la ordenada del punto medio
MT	método trapezoidal

Entrevista al estudiante A

Primera parte

Y ¿Vos cómo definirías qué es un rectángulo?

A Un cuadrilátero con 4 ángulos rectos

Y ¿Y un trapecio, cómo lo definís?

A ¿Trapecio es el que tiene dos bases paralelas?

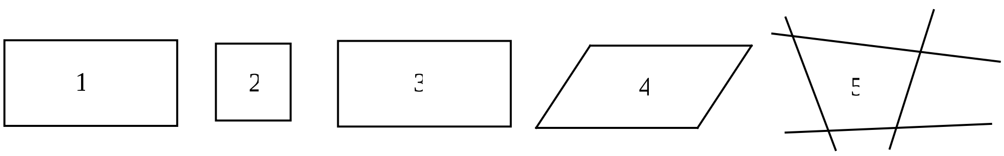
Y Sí... es una definición posible

A No sé... no me acuerdo cuál era... Sí, un cuadrilátero donde dos lados son paralelos

Y ¿No me dibujarías un par de ejemplos y no-ejemplos de cada uno que te resulten interesantes? De rectángulo primero...

A Un "rectángulo común" (dibujo 1) o un cuadrado (dibujo 2) serían casos típicos... Un rectángulo sería un trapecio (dibujo 3) o un paralelogramo (dibujo 4) o cualquier figura en que tomo dos rectas paralelas, las corto con dos rectas cualquiera y lo que queda en el medio sería un trapecio. Y un no-ejemplo... para rectángulo 4 rectas cualquiera y algún par de ellas no forme ángulo recto, que la intersección fuera un punto (dibujo 5)

A dibuja



Y De las figuras que están acá (se le enseñan las figuras que aparecen en la primera parte del guión de la entrevista) señalá cuál de ellas son trapecios.

A A, B que es un cuadrado girado, C también, D, E, F no, G también y H no.

Segunda parte

La entrevistadora explica cada uno de los 4 métodos tal como aparecen en el guión de la entrevista.

Y ¿Qué figura usarías para el MT en estas dos funciones que están aquí dibujadas? (señala las gráficas que aparecen en la segunda parte del guión de la entrevista)

A ¿Qué figura en el MT? Esta figura sería simplemente lo que está acá debajo.

Y Sí, con un intervalo solo.

A Ah, con un intervalo solo... el área de esto va a ser mayor que el área que está acá arriba... ¿puede ser un trapecio cualquiera?

Y A ver, según el MT (señala la explicación gráfica del MT que se le había enseñado antes) ¿con un solo intervalo, vos qué tendrías que tomar?

A Tendría que tomar este cuadrado... este rectángulo (señala el rectángulo correcto)

Y Perfecto... ¿y en este caso? (señala la segunda gráfica)

A Quedaría un triángulo así (señala el triángulo correcto)

Y De acuerdo.

Tercera parte

Y Nosotros vamos a trabajar con 3 enunciados, tres teos que se pueden demostrar en relación a esto de aprox de áreas. El primer enunciado es éste que tenemos acá para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aprox por exceso del área bajo la gráfica. ¿Qué entendés por lo que dice ese enunciado?

A El área que te da el método es mayor que la integral de la función

Y Que la integral, o sea...

A El área...

Y El área que está por debajo... bien

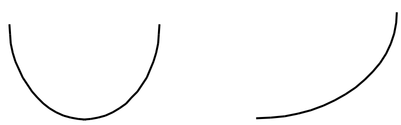
A Ya que la función queda incluida dentro del trapecio

Y Bárbaro ¿qué quiere decir una función de c+?

A Que la derivada segunda sea positiva en el intervalo

Y Bien, esa es una posible definición de c+. Dibujame ahí algunos ejemplos de funciones de c+

A dibuja



A Hacia arriba digamos, e^x tendríamos... ¿en todo el dominio o en alguna parte del dominio?

Y Nosotros trabajamos con funciones definidas en (a, b) y en (a, b) queremos que tenga c+

A Ta... o sea que no puede ser constante... sería por ejemplo, cualquier polinomio con coeficiente del término en x^2 o superior positivo y aparte evaluada después de la primera raíz... o del cero de la derivada

Y Ta, ta... no te preocupes, no quería “fórmula” simplemente cómo te parecía que iban a ser los gráficos de esas funciones

A Como una U

Y Sí... recién dijiste algo en lo que quería detenerme: que no podía ser constante ¿por qué no puede ser constante?

A Porque la derivada segunda sería 0

Y De acuerdo ¿conocés alguna otra definición de lo que es una función de c+?

A No...

Y Bueno, acá tenés 6 funciones y necesitaría saber cuáles te parece que tiene c+

A ¿En el intervalo en que están dibujadas?

Y En el intervalo en que están dibujadas

A La primera; ésta (se refiere a la segunda función) tiene c+ desde el máximo en adelante

Y De acuerdo pero ¿en todo donde está definida?

A En todo no... Ésta (se refiere a la tercera función) tiene c+, ésta (la cuarta función) también tiene c+, ésta no (la quinta), tendría el cero de la derivada que estaría por ahí, o sea, no tiene y ésta (la sexta) tampoco porque tiene... ah, ahí hay un punto donde es discontinua, digamos...

Y No, discontinua no...

A Esa tiene c+, a ver... no va a existir ahí la derivada segunda...

Y Según me decías en ese punto que está allí la derivada no existe ¿entonces?

A Habrá que redefinir la noción de c+... habría que ver que tipo de discontinuidad tiene la derivada... no sé en el punto cómo se considera pero en los dos pedazos, en los otros dos sectores es de c+... en el punto no sé

Y Pero te preguntaba en todo el intervalo... en todo el intervalo ¿vos considerás que tiene c+?

A ¿Está definida la concavidad en un punto?

Y No, la concavidad está definida en intervalitos... pero con tu definición, podría llegar a ser…

A Podría llegar a decirse que tiene c+... porque la derivada primera es siempre creciente, tiene un salto finito en un punto pero es siempre creciente

Y La derivada primera es siempre creciente...

A Ah, no, siempre positiva... no, a ver...

Y Bueno, dejémoslo...

Cuarta parte

Y Volvemos al teo: para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aprox por exceso del área bajo la gráfica ¿de acuerdo? Primero, lo que hicimos fue interpretarlo, después nos detuvimos bien en qué quería decir de c+... Ahora te presento esta dem, esta prueba visual de este teo. Primero que nada ¿qué es lo que ves que aparece en el diagrama ese?

A Una curva, luego el área bajo esa curva hasta un eje trazado horizontalmente y en la segunda mitad, lo mismo... no, un trapecio formado por el eje y los dos puntos, el primero y el último de la curva...

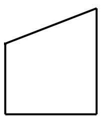
Y De acuerdo ¿a vos te parece que ese diagrama muestra lo que dice el teo?

A Para funciones positivas con c+ el MT ofrece una aprox... porque en ese caso el área ni se aproxima porque es bastante más grande una que otra

Y ¿Y por qué se cumple el ≤ ese que aparece ahí?

A Porque si considero una función que fuera recta el área sería la misma

A dibuja



Y Ah, eso es por qué sería el =, perfecto pero ¿por qué se cumple el <?

A Porque esta figura está incluida en la otra

Y Correcto... a ver, un par de preguntitas acerca de eso ¿Depende la prueba esta que hice de la función que elegí como ejemplo de c+?

A No, siempre que tenga c+... a ver... ¿cómo es la pregunta?

Y Viste que acá en las pruebas visuales vos tenés que tomar una función porque no podés tomarte una genérica, tomás una y esa la considerás que representa a todas las otras, la pregunta es si yo cambiara, por ejemplo, esta función por otra función positiva de c+ ¿cambiaría la dem? o ¿seguiría siendo válida?

A La idea seguiría siendo la misma... o sea, la idea es que la recta que une la función en el primer punto del intervalo, los extremos del intervalo, esté por arriba de la curva lo cual queda asegurado por la c+... por lo tanto siempre es válida esa dem.

Y De acuerdo pero eso que vos me estás diciendo, que la cuerda queda por encima de la gráfica, vos decís que eso es

A Equivalente a que tenga c+... a ver... sí, la derivada primera siempre creciendo por lo tanto la derivada en el extremo final va a ser ≥ que en el inicial por lo tanto la curva va a estar siempre por debajo de la recta...

Y Bien esa era una de las posibles definiciones alternativas de las que hablaba hoy... ¿Qué sucede si en vez de considerar un solo intervalo consideramos más de uno?

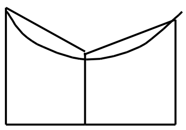
A La aprox va a ser mejor

Y Pero ¿va a seguir siendo por exceso?

A Sí... no, porque si yo parto la gráfica en... a ver... sí, va a seguir siendo por exceso

Y ¿Te animás a ver cómo sería la dem con más de uno?

A dibuja



A Para cada intervalo usando eso (se refiere a la prueba del teorema) el área va a ser mayor por lo tanto la suma de los dos trapecios va a ser mayor a la suma de los dos intervalos

Y Eso con dos y lo mismo hubiera sido con cualquier cantidad...

A Claro

Quinta parte

Y El segundo teo es: para funciones positivas de c+ el MR_ (señala la hoja donde se presentó dicho método) ofrece una aprox pero que es por defecto del área bajo la gráfica ¿de acuerdo? Esto que tenemos acá pretende ser una dem; pero antes de explicar la dem vamos a ver qué es lo que vemos en el diagrama

A ¿Siempre se cumple?

Y La dem ésta lo que pretende ilustrar es que esa situación siempre se va a dar ¿Qué ves en la dem?

A Que el área de la curva es mayor o igual que el área del trapecio... el igual es siempre para que la función pueda ser constante o recta... hace un trapecio en el punto medio y luego el área que queda por exceso aquí es igual a la que queda por defecto porque esto es medio...

Y A ver... vamos despacito... vos decís que el área ésta, naranja, es mayor o igual que el área celeste ¿por qué?

A Porque el área celeste está incluida en la naranja

Y Bien pero ¿cómo se forma la celeste?

A Tomando un punto medio... habría que ver que el mínimo parece que coincide con el punto medio... o más o menos... por lo tanto va a estar siempre por arriba de la tangente entonces esta área... nunca va a quedar por arriba sino tendría que hacer así (hace un gesto con la mano indicando el comportamiento que pasaría a tener la función si bajara bajo la tangente) y en algún punto tendría c-

Y De acuerdo, ahí usaste que si tiene c+ ¿qué particularidad tiene?

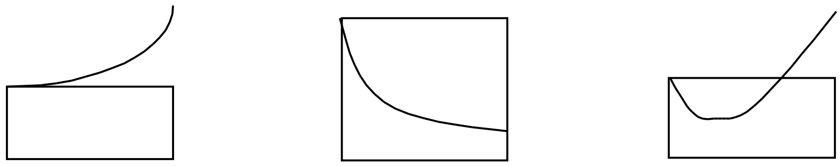
A Siempre para cualquier tangente que tome la curva está por encima de la tangente... que sería otra definición de c+

El resto de la entrevista no pude grabarse por lo que se transcriben las notas que tomó la entrevistadora inmediatamente acabada la misma

Y: Vos decías que podía ser importante que en este caso el mínimo de la función se da en el punto medio ¿por qué no te fijás que pasa en otros casos?
A: (Hace un dibujo de otra función de c+) no depende de eso porque siempre la tangente va a quedar por debajo de la curva...

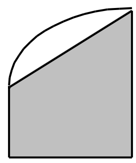
Sexta parte

- Afirma que no se puede decir qué tipo de aproximación ofrece el MR1 para el área bajo la gráfica de funciones positivas de c+ y para justificarlo dibuja un caso en que da por defecto, uno que da por exceso y otro en que no se sabe...

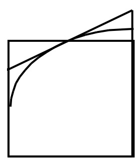


- Cuando se le pregunta en qué puntos de las pruebas anteriores se usa explícitamente la hipótesis de concavidad positiva, vuelve a mencionar el hecho de que la cuerda está por encima del gráfico de la función en la prueba del MT y que la tangente está por debajo en la del MR_

- Cuando se le pregunta por el resultado de la aproximación del MT para funciones que no son de c+ responde que “dividiría a la función en trozos donde la concavidad fuera positiva y otros donde fuera negativa, en lo que es positiva el MT aproxima por exceso y en los que es negativa aproxima por defecto” y dibuja:



  Para el MR_ responde análogamente pero agrega “esto habría que verlo con más cuidado” y dibuja:



Séptima parte

El entrevistado afirma que:
- el error del MT es la zona pintada de verde pues es la diferencia entre el área del trapecio y el área de la figura bajo la curva
- la zona verde tiene mayor área que la naranja pues como en cada mitad es de c+ la cuerda queda por encima de la gráfica y por lo tanto el triángulo queda incluido en la zona verde
- en la tercera parte del diagrama aparecen tres rectas paralelas que son a su vez paralelas a la tangente al gráfico por el punto medio

- la zona gris tiene igual área que la celeste porque los dos triángulos son iguales “ya que al estar comprendidos entre paralelas los ángulos son iguales y por Thales y por la propiedad de la paralela media los lados son iguales dos a dos”
- la zona roja tiene igual área que la gris porque la diferencia entre una y otra figura “son las dos mitades del paralelogramo”
- la zona roja tiene mayor área que la amarilla porque las cuerdas están por encima entonces la zona amarilla “queda incluida”
- el error del MR_ es la zona pintada de amarillo porque “horizontalizo (sic) la tangente y me queda el error entre el rectángulo por el punto medio y la curva”

Entrevista a la estudiante B

Primera parte

Y Lo que te pido es que me definas qué es un rectángulo y qué es un trapecio

B Un rectángulo es un cuadrilátero con los lados paralelos y un ángulo recto, al decir que un ángulo es recto y los lados son paralelos ya estoy diciendo que todos lo son... Y un trapecio es un cuadrilátero que tiene dos de los lados paralelos entre sí

Y Bárbaro, dibujame un par de ejemplos y un par de no-ejemplos interesantes de rectángulos y de trapecios

B Cuando digo trapecio además de tener... además de ser dos lados paralelos... a ver ¿cómo lo explico? Si por ejemplo... Si yo dibujo un paralelogramo (dibujo 1) estos dos lados son paralelos, sin embargo no es lo mismo que un trapecio (dibujo 2)

B dibuja

Y O sea que ahí ¿el segundo es trapecio pero el primero no?

B Sí, entonces tiene que ser condición para que sea trapecio además de tener dos lados paralelos que los otros dos no sean paralelos, sino estaríamos en este caso...

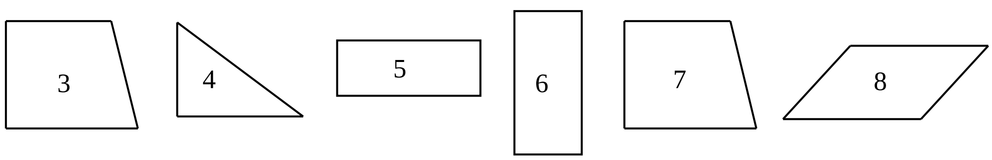
Y Bien entonces el primero ¿sería un ejemplo o un no-ejemplo?

B No-ejemplo

Y No-ejemplo de trapecio, el segundo es un ejemplo de trapecio

B ¿Qué más? Otro ejemplo de trapecio (dibujo 3) y otro no-ejemplo (dibujo 4) ¿De rectángulo también? (da como ejemplos los dibujos 5 y 6 y como no-ejemplos los dibujos 7 y 8)

B dibuja



Y Mirá estas figuras que están acá (señala las figuras que aparecen en la primera parte del guión) ¿cuáles son trapecios?

B El C, el E, el G. Con los otros tengo el problema que no sé si está bien mi definición de que los otros dos lados no tengan que ser necesariamente paralelos

Y Bien, ahí vamos a un punto importante... vos tenés una definición que dice que...

B A ver... tampoco es que... sé que si tiene dos lados paralelos es un trapecio, no? Pero no sé si cuando... si por ejemplo el rectángulo es un caso particular... o sea, tengo ese problema

Y O sea, si vos trabajaras con la definición...

B	Con la definición mía, ta, me quedaba con esos
Y	Con el C, el E y el G, nada más... y si la definición admitiera...
B	¿Los rectángulos como un caso particular, decís? Si admitiera que también pudieran ser los otros lados debería incluir el A, el D, el B no sé qué es...
Y	Es un cuadrado
B	Bueno, también... pero tampoco estoy... pero claro tengo que...
Y	Depende de la definición

Segunda parte

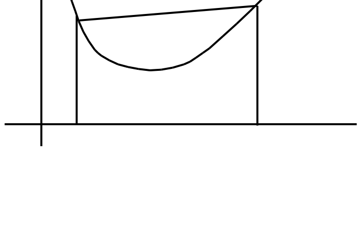
La entrevistadora explica cada uno de los 4 métodos tal como aparecen en el guión de la entrevista.

Y	Si te doy esta función, la función ésta que está dibujada entre este valor y este valor (señala la gráfica 1 de la segunda parte del guión) ¿Qué figura usarías según el MT con un solo intervalo para aproximar el área que está bajo esa gráfica?
B	¿Con un solo intervalo?... o sea, haría así con dos trapecios
Y	Claro pero es con un solo intervalo... si tomaras el punto medio estoy de acuerdo que consideraras los dos trapecios ahí
B	Supuestamente tengo que ir del punto éste al punto ese (señala (a, f(a)) y (b, f(b)))
Y	El rectángulo... tendrías que usar el rectángulo que te cubre toda la figura ¿y en este? (señala la gráfica 2)
B	Lo que pasa es que... necesariamente tiene que ser ese método... estamos de acuerdo que para esta función (se refiere a la que aparece en la gráfica 1) no es conveniente
Y	Definitivamente... no es un problema de conveniencia sino que es un problema de: suponiendo que tenemos que usar el MT ¿qué significaría usar el MT es esa figura? (señala la gráfica 2)
B	Acá así... (une con un gesto (a, f(a)) y (b,0))
Y	O sea ¿qué figura te quedaría?
B	Un rectángulo... un triángulo, digo
Y	Un triángulo rectángulo... Bien... De acuerdo, o sea que lo de trapezoidal venía por la forma general, no por lo que dibujamos en los casos específicos

Tercera parte

Y	Mirá este enunciado: para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aprox por exceso del área bajo la gráfica ¿Qué es lo que entendés vos por ese enunciado?
B	Cuando vos calculás el área y estás tomando una figura... no va a ser el área exacta, va a ser una más chica o una más grande. Cuando estás tomando por exceso estás tomando más área que la que en realidad tiene la que estás calculando... si vos tenés... yo lo que entiendo es que tenés esta situación ¿puedo dibujar? Tengo una función del lado positivo, con c+ y si yo hago el área del trapecio estoy tomando más de lo que es... por eso es por exceso... Si la concavidad es positiva y vos vas de un extremo a otro del intervalo ese que te interesa, con un lado del trapecio, con una recta, vas a tomar más que...

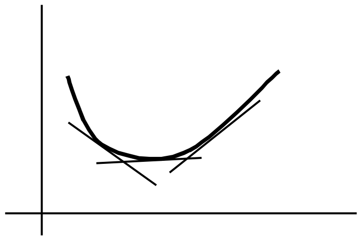
B dibuja



Y Lo primero era acercarnos a ver si entendíamos de lo que hablábamos, ahora vamos a volver sobre eso... ¿qué quiere decir que una función tenga c+?

B Que en ese intervalo donde tiene c+, cada vez que vos dibujes la tg, la tg por un punto, la recta va a quedar por debajo del gráfico. Si las dibujo acá (se refiere al dibujo que acaba de hacer) van a quedar todas así

B dibuja



Y De acuerdo, o sea, que vos definís que una función tiene c+ si la tg queda siempre por debajo del gráfico

B Y eso está de acuerdo con lo que te da la derivada segunda.

Y O sea que conocés otras definiciones de función de c+

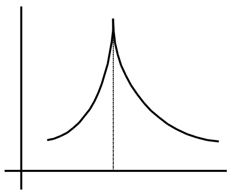
B Sí, la concavidad es positiva cuando la derivada segunda te da positiva

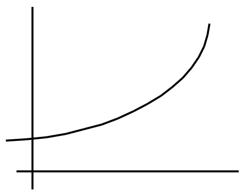
Y O sea que vos ahí ya me nombraste dos definiciones posibles de c+...

B Bueno, pero si me acuerdo... si algo me quedó de 6º año... o sea, creo que a partir de esto llegabas a demostrar que la derivada tenía que ser positiva... o sea, no son dos definiciones, es la misma.

Y Claro, tenés una definición y la otra la demostrás a partir de esa... Dibujá un par de ejemplos de funciones de c+

B dibuja





B Así... tiene c+ pero tiene un punto singular

Y ¿Y en ese punto tiene c+?

B Sí... bueno, acá no porque acá en este punto no existe la derivada segunda, acá en este punto no tiene c+ ni negativo, es singular... pero acá tiene c+ y acá (señala cada uno de los subintervalos a derecha e izquierda del punto singular)

Y De estas que están acá, de estos seis ejemplos ¿cuáles tienen c+ en todo el intervalo donde están definidas?

B Éste (señala la primera gráfica), éste (señala la cuarta), la tercera, la quinta no, la sexta tampoco y en ésta estamos en la misma situación que acá, tiene un punto singular pero en el resto hay c+

Y Bien...

Cuarta parte

Y Ya vimos qué se entendía por ese enunciado y ahora vamos a ir a la dem: para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aprox por exceso del área bajo la gráfica... Y esto pretende ser una dem visual... ¿qué tenés en esta dem?

B Lo que se ve es el área por debajo de la función y el área ésta del MT que es por exceso... algo más que el área que querés calcular digamos...

Y Bien y eso justifica entonces el “ ≤ ” Viste que en las demostraciones visuales tenemos que tomar una figura en particular para hacer la representación ¿Depende de que yo haya tomado esta figura para que sea válida o para cualquier otro ejemplo de función de c+ se hubiera cumplido?

B A ver... por ejemplo... en éste que hice yo (señala su primer ejemplo de función de “c+”) para hacerlo con un solo intervalo el trapecio que hubiera hecho no... pero si lo hago... ah, acá tenemos un problema... (pausa)

Y El problema lo estás teniendo con esa que tiene un punto singular

B La historia es que al hacer un trapecio no me va a quedar por exceso... de hecho me va a quedar... no es el mismo caso

Y ¿Y eso por qué será? ¿porque no es el mismo caso o porque la figura que vos tomaste no es ejemplo de función positiva de c+?

B Hay que hacerle alguna salvedad al teo para que...

Y Por ejemplo ¿cómo lo salvarías?

B No sé si vale la pena salvarlo o desecharlo...

Y Supongamos que lo queremos salvar...

B A ver se cumpliría... a ver... (interrupción: se acaba el primer lado de la cinta) A ver yo tengo un intervalo... y sí... la cuestión es que no haya otro punto donde sea mayor... si en los puntos en que varía el intervalo, la función... a ver, lo armo al revés... si hay algún punto como acá en el que la función vale más, tome el mayor valor y no es ninguno de los extremos, me pasa eso pero me parece que cualquiera que me tome en que no haya ningún punto “más alto”, hablando mal... se va a cumplir el teo

Y A ver... es cierto que si nosotros cambiamos las hipótesis el teo se puede cumplir, pero vamos con esas hipótesis ¿vos te acordás que me dijiste? La primera definición: que una función era de c+ cuando las tgs pasaban por debajo de la curva. Imaginate entonces el ejemplo éste que tiene el punto patológico éste, si vos tomás la tg ¿qué te pasa?

B Claro... corta a la curva pero después del punto ese de inflexión

Y Claro, entonces la función ¿vos podés considerarla de c+ en todo el intervalo?

B En todo el intervalo no porque de hecho hay un punto que...

Y Exacto, entonces el problema de este ejemplo que fallaba era porque en realidad éste no era...

B No era un ejemplo porque tiene un punto... sólo con ese punto me tiraba todo abajo

Y De acuerdo... Nos acercamos un poco más a la idea de lo que es una función de c+ y la pregunta vuelve a ser: si tomamos otro tipo de función que sí tenga c+, la demostración ésta que está allí ¿es válida?

B La dem... o sea ¿el teo es válido?

Y A ver, el teo se cumple, lo que yo quiero ver es si esa dem que puse ahí es una dem que sirve, que la puedo trabajar, que es general...

B ¿Si precisás una figura? ¿si podés tomar una figura en la dem?

Y Eso es lo que estamos tratando de averiguar

B (Frase imposible de transcribir) ¿Si la podés aceptar?

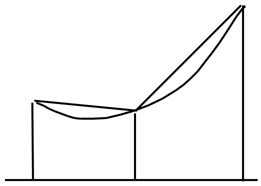
Y Bueno, salvo los problemas filosóficos de si se aceptan las dem visuales o no...

B Yo personalmente si hago un dibujito no siento que lo haya demostrado porque bueno... vos hiciste el dibujito pero me parece que es más fácil hacer una dem “como la gente” que pensar si realmente tu dibujito cumple o no con todas las posibilidades

Y De acuerdo, después en todo caso te muestro una dem analítica del teo... Viste que esa dem, esa explicación está hecha para cuando tomás un solo intervalo en la base ¿qué pasaría si tomás más de un intervalo en la base? ¿sigue siendo por exceso el área que te da el MT?

B Depende cómo te lo tomes ¿no? A ver... cualquier punto en que se me ocurra dividir en dos intervalos y dibuje la recta que une el extremo del intervalo con esto siempre me va a quedar esta recta por arriba y la función por abajo (Pausa) O sea, la recta que une los extremos de lo que tome como subintervalos divididos siempre va a estar por arriba del gráfico...

B dibuja



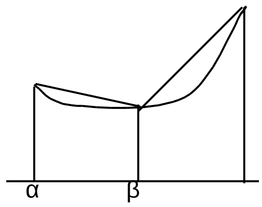
Y De acuerdo, o sea que vos lo que estás diciendo es que...

B Que se va a cumplir aunque me tome más intervalos...

Y A ver ¿cómo es la propiedad esa que me estabas comentando? ¿cómo la enunciarías esa propiedad?

B Ponele, si el intervalo varía entre un α y un β y vos tomás la recta que va desde $f(\alpha)$ a $f(\beta)$ te va a quedar por arriba del gráfico de la función

B dibuja



Y De acuerdo, y eso ¿es para funciones de qué tipo según vos?

B Positivas... con c+

Y Con c+, de acuerdo, entonces eso es una caracterización de las funciones de c+ similar a las otras que me habías dicho ¿no?

B Sí, en lugar de trabajar con la tg que queda por abajo trabajo con la recta que queda por arriba

Y Bárbaro, o sea que si tomo más intervalos el teo también se cumple

Quinta parte

Y Mirá lo que dice acá: para funciones positivas de c+ el MR_, o sea usando este método que está acá (señala la hoja explicativa de los métodos) ofrece una aprox por defecto del área bajo la gráfica. O sea, la del MT ofrecía una aprox por exceso y ahora te dice que el MR_ te hace una aprox por defecto. Esto que está acá pretende ser la dem, como ves es un poquito más sofisticada que aquella...

B Sí... usa tres colores...

Y Por lo pronto tres colores... Vamos primero que nada a identificar qué es lo que aparece en los gráficos... En el primero ¿qué hay?

B Una función positiva con c+ en que pintaste el área por debajo de la gráfica

Y Bárbaro y ¿en el segundo?

B ¿En el segundo? No entiendo mu... o sea, usaste esto del punto medio, la ordenada del punto medio, pero no hiciste un rectángulo sino un trapecio

Y Un trapecio que está formado por ¿qué líneas?

B Supongo que será la tg por el punto medio

Y Claro y hay que suponerlo porque como es sólo dibujo dependés del dibujo nada más. Bárbaro ¿entonces?

B En el tercero hiciste el MR_

Y Bien vamos primero ¿por qué la naranja es mayor igual que la azul? ¿por qué el área naranja es mayor o igual que la azul?

B Porque la tg, cuando dije lo que era c+ dije que la tg quedaba por debajo del gráfico de la función entonces queda todo este pedazo que no... todo este pedazo de área que no está considerada

Y Perfecto y ¿por qué la celeste es igual a la verde?

B Porque... a ver... tenemos que pensar sobre estos triángulos... estos lados son iguales... porque tomaste el punto medio... los ángulos éstos son opuestos por el vértice por lo tanto son iguales... los ángulos son rectos y el triángulo es rectángulo... Ta, te alcanza para decir que son iguales

Y Perfecto entonces ¿cuál es tu conclusión final luego de ver cada uno por separado?

B Con respecto a estas dos que es lo mismo que tome la ordenada del punto medio que...

Y ¿Y con respecto al total? Porque vos lo que querías ver era que el MR_ ofrece una aprox por defecto del área de la gráfica

B Sí, claro, porque... porque...

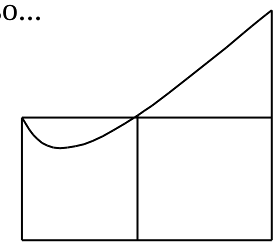
Y ¿Cuál es la que te da el área bajo la gráfica de las que están allí?

B Ésta, la naranja... Bueno, ta, porque éstas son más chicas pero... visualmente, depende de la representación... Es que en este caso queda medio particular porque el punto medio además de ser punto medio es el mínimo

Y De acuerdo, bien, entonces tendríamos que ver si eso se cumple en otro caso...

B ¿Puedo dibujar? A ver, por ejemplo uno que sea bien alevoso...

B dibuja y sombrea la zona que queda entre la gráfica y la recta horizontal con altura la ordenada por el punto medio



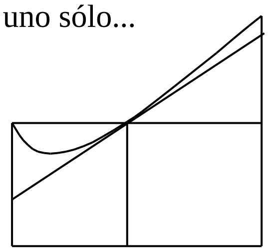
B No es una aprox por defecto, al menos no necesariamente

Y ¿Por qué?

B O sea, acá desde el punto medio para este lado donde está el mínimo, acá estoy tomando más área que el área por debajo de la función y acá (señala el subintervalo a la derecha del punto medio) estoy tomando menos... A ver si es por defecto

Y A ver ¿cuál es el proceso que hace la dem ésta? No es comparar directamente el área ésta con ésta.... lo que hace primero, antes que eso ¿qué es? ¿Comparar con cuál? El área bajo la gráfica la compara con el área de un trapecio que determina la tg por este punto ¿no? Hacé los tres pasos para tu dem, no uno sólo...

B agrega la tangente al dibujo anterior



B Lo que hacías era tomar la tg por el punto medio que en este caso no es el mínimo

Y Acá no, en tu dibujo no, justamente estás salvando eso para ver si es general...

B Claro, ta, acá estoy segura que estoy tomándola por... acá estoy segura que estoy tomando menos área, o sea, estoy tomándola por defecto

Y ¿Por qué?

B Porque trabajé con la tg y ya sé que la tg está por debajo

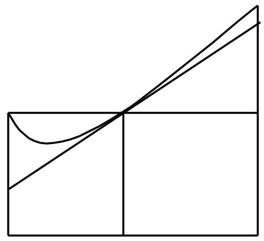
Y De acuerdo, o sea que... esa vendría a ser la celeste, ya sabés que la celeste es...

B Claro y ahora la celeste es igual a la verde

Y ¿La celeste es igual a la verde aunque no sea el mínimo?

B A ver, voy a hacer un dibujo más prolijo

B hace un dibujo como el anterior pero en éste sombrea los triángulos determinados por la recta horizontal y la tangente por el punto medio

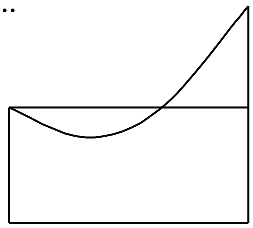


B	Sí, de todas maneras son iguales (y repite el argumento anterior para justificar la igualdad de los triángulos)
Y	¿Por lo tanto?
B	Aunque parezca que no es sí... Para funciones positivas de c+ la aprox es por defecto

Sexta parte

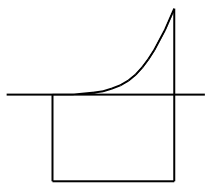
Y	Vos para funciones de c+ ya viste que el MT aproxima por exceso y el MR_ aproxima por defecto ¿Qué tipo de aprox te ofrece para funciones positivas de c+ el MR1?
B	El MR1 ¿cuál era? (se le recuerda la explicación dada antes) Vamos a ver...

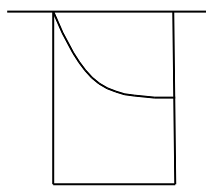
B dibuja



B	De todas maneras queda por defecto... No, lo que pasa si uso la primera ordenada no puedo tener en cuenta... En el otro para llegar a que era por defecto lo que hice fue tomar el triángulo, o sea, de todas maneras puedo tomarlo... A ver ¿cómo lo pienso?
Y	¿Cuál es tu conjetura en principio? ¿Qué va a dar: por defecto o por exceso?
B	No sé...
Y	Si no sabés hacé unos cuantos ejemplos y te fijás a ver qué pasa...
B	(Sin atender la sugerencia) En ésta (señala la sexta gráfica) no sé si es por exceso o por defecto porque...
Y	¿Te podrías construir alguna función de c+ en que estés segura que te va a dar por exceso o segura que te va a dar por defecto?

B dibuja





B	En ésta va a dar por defecto y en ésta por exceso
Y	Por lo tanto ¿qué tipo de aprox ofrece el MR1? ¿Podés decir que es por exceso o que es por defecto?
B	No, depende...
Y	Por eso estos teos no están... Para funciones de c+ se cumple una relación con el MT y el MR_ pero en principio no sabés si es por exceso o por defecto... Vos hiciste el MR1 pero también con el MR2
B	Es lo mismo

Y	Contame, en las dem anteriores (señala la del teo1 y la del teo2) ¿cuál es el momento fundamental en que usas la hipótesis de que la concavidad es positiva?

B Acá (señala la prueba del teo2) cuando trazás la tg, o sea, en el paso intermedio y estás segura que la tg está por debajo y por eso es por defecto

Y ¿Y en aquella, la del primer teo? ¿cuál es el punto fundamental donde se usa la c+?

B No me acuerdo que tipo de prueba... (la revisa) Cuando llegas a esa propiedad que enuncié, que si tomabas $f(\alpha)$y $f(\beta)$ te quedaba por debajo

Y Que la curva te quedaba por debajo de la cuerda... Bien

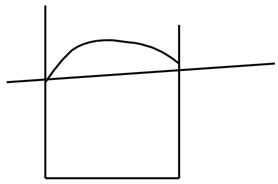
Y ¿Qué podrías decir de los MT y MR_ cuando la concavidad no es positiva?

B ¿Cuando no es positiva porque es negativa o cuando no es positiva porque tenés casos como ese (señala uno de los ejemplos que incluye la tercera parte del guión)?

Y Los dos. A ver, primero el primer caso, cuando no es positiva porque es negativa

B Cuando tenés una función con c- el MT da... por defecto

B dibuja



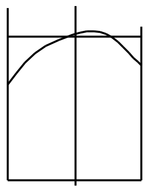
Y ¿Y eso es siempre o sólo para la función que vos dibujaste?

B No, es siempre porque... es como si a una de c+ la miraras al revés. O sea, para c- se cumple la propiedad que si tomás la cuerda te va a quedar por debajo, o sea lo que antes quedaba por encima va a quedar por debajo...

Y Entonces vos decís que el MT...

B Aproxima por defecto cuando la concavidad es negativa... Y con el MR_ ...

B dibuja



B Parecería por exceso pero habría que ver por qué... (agrega en su dibujo la tg por el punto medio) Es análogo al otro, si hacés por el punto medio queda por exceso porque si vos trazás la tg como es de c- ya sabés que estás tomando más del área y... (pausa) Acá cuando tomo la tg sí que estoy tomando más área que la que corresponde

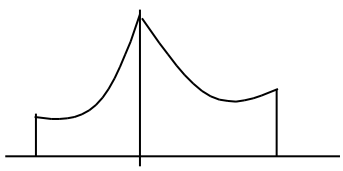
Y Eso es porque la tg ¿dónde está?

B Por encima de la gráfica de la función y la diferencia que tengo con éste son los triangulitos éstos que son iguales

Y De acuerdo, o sea que para funciones de c- los resultados se invierten entre sí ¿y para funciones que no son de c+ ni c-? ¿qué te parece? Un comentario no más...

B Y yo creo... la cuestión es que las tenés que... por ejemplo ahí (señala la última gráfica de las que aparecen en la tercera parte del guión) yo tenía una función con c+ salvo en el punto singular... lo que tenés que hacer es considerar el intervalo donde existe todo...

B dibuja



Y Dividir el intervalo en dos subintervalos donde en cada uno podés decir...

B Que la concavidad es positiva o negativa...

Y De acuerdo

Sétima parte

Y Ahora una más colorinche: para funciones de c+ nosotros sabemos que el MT aproxima por exceso pero lo que vamos a mostrar ahora es que la aprox del MT es menos ajustada que la del MR_ ¿Qué querrá decir que es menos ajustada?

B Que va a ser más exacto el resultado que tengas usando el MR_

Y De acuerdo, vamos a ver cómo se entiende eso, vamos a leer primero cada uno y después globalmente ¿de acuerdo? Lo primero te dice que el error de la aprox ofrecida por el MT es igual al área verde ¿Por qué?

B Porque es lo que estás considerando que no está por debajo de la función... es lo que estás considerando de más

Y De acuerdo, ahora aparece un área naranja ahí ¿cómo está determinada esa área naranja?

B Tomaste el mínimo y uniste un extremo y el mínimo y el otro extremo y el mínimo y te quedó

Y Bien... ¿por qué es mayor el área verde que el área naranja?

B Porque sabés que si te tomás un intervalo como el que acá te estás tomando... a ver, cuando te tomás el primer intervalo te tomás la cuerda que une los extremos de ese intervalo y estoy dejando... a ver, si lo miro al revés (da vuelta la hoja) es como si tuviera una con c- y tomara la aprox del MT que daría por defecto

Y Acá es igual, tomás acá (da vuelta la hoja a la posición original) o sea que la cuerda está por encima de la curva y entonces...

B Entonces estoy tomando... estoy reduciendo el error, o sea el verde tiene más error que el naranja

Y Perfecto... pasemos al celeste ¿qué aparece ahí que hay unas rectas nuevas?

B La tg por el punto medio que parece coincidir con el mínimo

Y No debería ser el mínimo porque mirá cómo queda la tg

B Ah, claro si fuera el mínimo quedaría así (dibuja en el aire una recta horizontal)... la tg por el punto medio, la tg por uno de los extremos del intervalo y la tg por el otro de los extremos del intervalo... Lo pasás acá y en vez de este triangulito quedó éste dibujado acá

Y Bárbaro, el triangulito de abajo lo pasaste para arriba, ahí te quedó el área gris. El área celeste es igual al área gris.

B Y acá... el área roja acá, esta partecita sería lo que...

Y Esto viene de acá primero: dice que el área gris y el área roja son iguales ¿por qué?

B Este triángulo es igual a éste porque acá hay un paralelogramo y tomaste una diagonal, la diagonal del paralelogramo y acá igual...

Y Bárbaro entonces el área gris y el área roja son iguales y ¿el área roja y el área amarilla?

B El área roja es mayor porque... ta, lo mismo tomando una cuerda por encima de una gráfica positiva te tomabas un poco más

Y De acuerdo, y el área amarilla ¿por qué es el error de la aproximación del MR_?

B Era el paso celeste de acá (señala la prueba del segundo teo) te tomabas el rectángulo por el punto medio y veías que el triangulito que te quedaba acá era igual al triangulito de acá

Y De acuerdo... entonces ¿cuál es la conclusión total?

B Que sí, que es verdad el error es más chico si tomo el MR_

Entrevista al estudiante C

Primera parte

Y ¿No me hacés acordar cuál es tu definición de rectángulo y de trapecio?

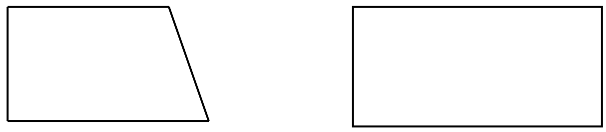
C ¿De rectángulo y de trapecio?... Rectángulo sería una figura geométrica determinada por 4 lados con dos lados iguales y entre sí 90 grados

Y Bien y ¿de trapecio?

C ¿Trapecio? Formado por 4 lados, con 2 lados paralelos, sin más

Y Bien, dibujame un par de ejemplos y no ejemplos que te parezcan interesantes para trapecio y para rectángulo

C dibuja los cuadriláteros que aparecen a continuación, el primero como ejemplo de trapecio y no-ejemplo de rectángulo, el segundo como ejemplo de rectángulo y no-ejemplo de trapecio:



Y Ahora, mirá... acá tenemos unas cuantas figuras, de la A a la H, figuras geométricas, todas cuadriláteros... Contame cuáles de esas te parecen trapecios...

C Trapecios: la C, la E, la G... y ¿la D?... ah, no...

Y La D ¿cómo la clasificarías? ¿qué tipo de figura es?

C Un paralelogramo

Segunda parte

Y ¿Por qué era esto de los trapecios y de los rectángulos? Simplemente porque quería contarte cuál es el MT y el MR para aproximar el área bajo una curva... A ver la idea es la siguiente... (le explica cada uno de los 4 métodos tal como aparecen en el guión de la entrevista) Ahora... tengo estas dos funciones que están acá (señala las gráficas que aparecen en la hoja correspondiente al final de la segunda parte de la entrevista) dos ejemplos... Si yo digo que quiero usar el MT con un solo intervalo para esta función que está acá (la primera de las dos funciones indicada) ¿Cuál sería la figura que tendrías que tomar para aproximar el área?

C Vos decís este método (señala la página donde se le presentó el MT) pero acá (señala la gráfica en que se le pide que aplique el MT)... Podrías unir de acá a acá y a acá (señala los tres puntos que podríamos llamar (a, f(a)), ((a+b)/2, f((a+b)/2)) y (b, f(b)))

Y Vos decís que tomás la ordenada del primer punto, la ordenada del punto medio y la ordenada del segundo punto y así te quedan dos trapecios... yo estaría de acuerdo si te pidiera que aproximaras con dos intervalos en la base pero te piden con uno sólo...

C (Pausa) Uniría de acá a acá (señala los puntos (a, f(a)) y (b,0))

Y Viste que lo que dice el MT es ir desde la ordenada del primer punto a la ordenada del segundo punto, vos ahí ibas desde la ordenada del primer punto a un punto sobre el eje

C Ah, sí... Sería unir acá y quedaría el rectángulo

Y El MT acá te quedaría con un rectángulo y vos consideraste que los rectángulos eran no-ejemplos de trapecios

C Ta... ta, está bien... sería un caso particular... sí, donde los otros dos lados también serían paralelos...

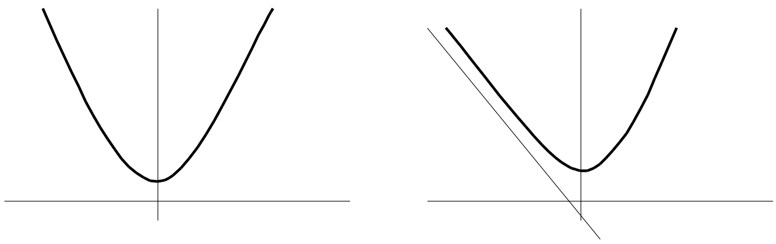
Y ¿Te acordás como habías definido trapecio?

C Sí, dos lados paralelos y los otros dos no tenían por qué serlo... acá es un caso particular...
Y Bien, de acuerdo ¿y con ésta? (señala las gráficas a las que se le pidió que aplicara el MT)
C Con esa, ahora sí, uniría éste de acá con este de acá (señala los puntos (a, f(a)) y (b,0) = (b, f(b))) ahora sí te queda un triángulo...
Y Ese está más difícil de salvar para que sea trapecio...
C Sí, sería un rectángulo por la mitad... ¿qué me querés decir con esto?
Y Nada... estábamos mirando que en este caso el MT por ejemplo no daría un trapecio como forma de aproximar... daría un triángulo y mientras que en ésta (señala la gráfica que requería un rectángulo como trapecio de aprox) pudimos hacer una revisión de la definición... acá no, pues consideramos que trapecio tiene que ser un cuadrilátero...

Tercera parte

Y A mí me interesan tres teos, un teo es éste: si vos tenés una función con c+ el MT ofrece una aprox por exceso del área bajo la curva, bajo la gráfica... ¿Tenés idea qué quiero decir con ese enunciado?
C Sí, que superás el área real debajo de la curva
Y Perfecto... que con el trapecio superás el área real... pero viste que en el enunciado aparecen "funciones de c+" ¿qué quiere decir que una función tenga c+?
C Está relacionado con la derivada
Y ¿Cómo? ¿Tenés idea cómo era?
C Sí, era cuando la curva quedaba por encima de todas las tgs
Y Bien... eso es una definición posible de curva con c+: cuando la curva queda siempre por encima de las tgs... Bárbaro. Dibujame algunos ejemplitos de funciones de c+

C dibuja los dos gráficos que aparecen a continuación apuntando que el primero de ellos corresponde a una parábola y en el segundo indicando la presencia de una asíntota.



Y ¿Conoces otra definición aparte de la que me diste de función de c+?
C No me acuerdo.
Y A ver... acá aparecen unos ejemplos, 6 casos de funciones... ¿cuál de ellas te parece que tiene c+?
C Así tal cual están: la primera de todas... la cuarta... Esta última... tiene este punto acá... donde no existe la derivada.
Y No existe la derivada y por lo tanto ¿qué es lo que no funciona?
C No entiendo...
Y Me decís que no tiene derivada y ¿cómo relacionás esto con la concavidad?
C Tendría un valor positivo... el valor de la derivada tendría que ser positivo...
Y Mirá esta función que está acá (señala la gráfica 1 de las seis que se le están mostrando) acá la derivada ¿qué signo tiene cuando tenés esta zona que es decreciente?
C Negativa.
Y La derivada es negativa... Retomemos... Vos me dijiste que tenía que tener una tg y

la tg tenía que estar por debajo de la curva... en este punto (se refiere al punto anguloso de la gráfica 6) ¿qué pasa con la tg?... No hay... porque como no es derivable no tiene tg... Vos me diste como ejemplo de función de c+ la primera y la cuarta ¿por qué la segunda no tiene c+?

C Tendría que definir el intervalo donde estás trabajando

Y Bien, pero si yo trabajo en todo el dominio ese en que está ahí dibujada... ¿por qué en ese intervalo no es de c+?

C Y porque el tramo éste de acá, la función, si yo manejo lo que estaba diciendo, la curva quedó por debajo de la tg... porque acá tenés (señala una tangente en un punto del primer tramo)

Y Bien en esos puntos del primer tramo donde la función empieza a crecer ahí la tg te queda por encima de la curva... ese es el motivo por el que descartaste la segunda... ¿y la cuarta? (señala en realidad la gráfica 5 no la 4)

C Lo mismo

Y ¿En qué zona falla?

C Donde comienza acá la curva

Y Bárbaro... ¿y ésta, la quinta? (señala en realidad la gráfica 3 no la 5)

C Y en ésta, de ahí hasta acá viene bien (señala desde el primer punto del intervalo al último) pero después yo no sé como sigue...

Y A mí no me preocupa cómo sigue, a mí me preocupa entre los puntos en que está dibujada.

C Ah, está bien... ésta también tiene c+

Y Bien, o sea, que la tercera tiene c+... De acuerdo... contame... retomemos ahora con la última... en todo el intervalo donde está definida ¿tiene c+ o no?

C Sí...

Y Por ejemplo si vos tomás la tg en este punto que está acá... en un punto donde empieza a subir por primera vez... ¿cómo te queda la tg?

C Acá te queda por debajo de la curva

Y La tg en este punto te queda ¿toda por debajo de la curva?

C En este tramo que está ahí...

Y Entonces ¿qué pasa?

C No.

Y No va a ser de c+

Cuarta parte

Y Volvamos al teo... el teo decía: para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aprox por exceso del área bajo la curva, primero vimos qué decía el teo y después nos detuvimos en la hipótesis de la c+... Ahí aparece un diagrama y se pretende saber si ese diagrama explica lo que el teorema asegura... ¿qué ves en el diagrama ese?

C ¿Qué veo? ¿en los dos casos? Acá (figura naranja) está cubriendo toda el área bajo la curva y acá (figura amarilla) está... por exceso... está cubriendo más que el área...

Y Bien ¿por qué el área naranja es menor o igual que el área amarilla?

C ¿Por qué es menor o igual? Porque acá (figura amarilla) estás cubriendo la misma área y además todo lo que tenés arriba

Y Perfecto, entonces ¿a vos te parece que este dibujo explica lo que dice el teorema?

C Éste acá (figura amarilla) sí

Y Yo me refiero a este teo (señala el enunciado) y al diagrama en su conjunto que te muestra como vos dijiste: el área bajo la curva pintada de naranja, el área del trapecio pintada de amarilla y un ≤ en el medio ¿El conjunto te explica el teo ese?

C Acá (figura amarilla) se usa el MT y acá (figura naranja) yo no lo veo al MT

Y Acá lo que tenés es el área bajo la gráfica y en éste aplicado el MT, entonces este ≤ ¿qué te implica? Que la aprox que te da el MT ¿de qué tipo es?

C Por exceso.

Y Bien, ahora un par de preguntas, la primera es: viste que en una prueba visual como ésta que está acá se depende de la figura que tomemos, nosotros sabemos que las funciones de c+ no todas tienen esta forma, no? Hay algunas como las que vimos en los ejemplos (señala los ejemplos de la tercera parte del guión), la del caso 4 no nos servía porque tiene que ser positiva ahora la función pero hay otras formas de función de c+. La pregunta es: ¿depende la prueba anterior de la figura que elegiste de función positiva de c+ o para otra función de c+ también sirve el mismo tipo de dem?

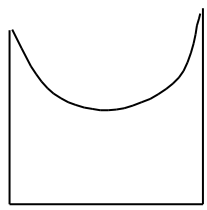
C ¿Te estás refiriendo al tipo de curva para usar el MT? Para mí no... Se va a seguir cumpliendo el teo éste.

Y Sí, el teo sí, y el tipo de dem visual ¿seguirá siendo válida aunque yo tome otra función positiva de c+?... (pausa).... A ver, dibujate vos otra función positiva de c+

C Yo estaba fijándome en ésta de acá (señala la gráfica 4 de las que aparecen en el guión de la tercera parte)

Y Ah, no, esa no sirve porque no es positiva...

C dibuja



Y Bien ¿cómo sería el MT y el área bajo la curva ahí?

C No te entendí

Y A ver, el asunto es: cuando yo hago una dem visual tengo que tomar una cierta figura, una figura que tiene ciertas características... el temor que yo puedo llegar a tener es que la dem que yo haga dependa de las características de mi dibujo y lo que yo necesito quede explicado es que cualquier función positiva de c+, en cualquiera de ellas siempre el MT ofrece una aprox por exceso. Ahora yo hice un dibujo y te pedí que hicieras otro distinto... En tu dibujo, el MT ¿ofrece una aprox por exceso del área?

Pinta de negro el área bajo la curva y de rojo lo que queda dentro del trapecio pero encima de la curva

Y ¿Cuál es el área del trapecio?

C Toda esa (señala la región que pintó de negro) más lo que está ahí

Y Por lo tanto, el MT para tu caso...

C Sirvió...

Y También dio una aprox por exceso, para cualquiera... la respuesta era la que dabas vos antes “la dem no depende de la figura” ¿de qué depende? ¿en qué se apoya para que el MT te dé mayor que el área bajo la curva?

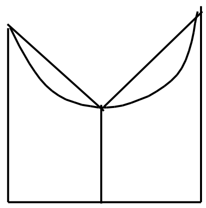
C En que una figura está contenida dentro de la otra... entonces el área es menor siempre

Y Bárbaro, viste que en el diagrama que hiciste vos y en el que hice yo considerábamos un solo trapecio porque considerábamos un solo intervalo pero cuando dice el enunciado: MT no aclara cuántos intervalos tenés que tomar; para saber si la justificación es válida tendríamos que ver también qué sucede si en vez de tomar un solo intervalo en la base tomamos varios ¿la aprox sigue siendo por exceso?

C También

Y ¿Por qué?

C dibuja



C Igual... esta figura siempre va a estar conteniendo a esta otra de acá dentro y lo mismo acá (se refiere a uno y otro trapecio)

Y Aplicás tu razonamiento en cada uno de los trapecitos... Vos lo hiciste ahí para dos intervalos pero...

C Para n igual

Quinta parte

Y Este teo dice que para funciones positivas de c+ el MR_, te acordás cómo era el método, no? Tomabas en cada intervalo el punto medio y esa era la altura del rectángulo... te ofrece una aprox por defecto del área bajo la gráfica. Y esto que está acá pretende ser una dem de ese hecho... Vamos por partes, primero a describir qué hay en la figura y después a tratar de explicar por qué eso justifica el teo ¿Qué ves en la figura esa? (breve interrupción de la grabación, mientras tanto C comenta que en la figura del medio no está el MR)... esa es una figura auxiliar intermedia. Primero, en la parte naranja ¿qué está pintado?

C Toda el área de debajo de la curva.

Y ¿Y en la verde?

C Está pintada desde... la mitad del, de la ...

Y ¿Y el rectángulo tiene qué altura?

C La mitad de la coordenada… de la abscisa

Y Ahí está, tomás la abscisa que está en el medio

C La del punto medio y después...

Y La ordena de ese punto... bien... eso es lo que explica la verde... eso es lo que te da el MR_, la verde... Y ahí apareció una figura en el medio: la celeste ¿cómo está formada esa figura? ¿qué figura es la celeste?

C Un trapecio

Y Un trapecio que ¿qué es lo que limita al trapecio? ¿qué recta es esa?

C Esta recta es la tg a la curva en el mínimo

Y En el mínimo no, porque si fuera en el mínimo ¿cómo sería la tg? ¿qué posición tendría?

C Ah, está bien... horizontal

Y ¿Qué punto es?

C En el punto que está al lado de...

Y En el punto medio, lo que acá se hace es tomarse el punto medio, subís... es lo mismo que acá (señala la hoja explicativa del MR_) tomás punto medio, subís y acá en la verde tomás el rectángulo que tiene esa altura, pero en la azul... tenés la tg

C Ah, sí.

Y Bien, ahora sabés lo que tenés en cada figura pero ahora nos dicen que la naranja es mayor o igual que la celeste ¿eso por qué es?

C Porque... por lo mismo, le falta cubrir toda esta parte de acá de la curva... y la figura ésta de acá (figura celeste) es menor siempre

Y De acuerdo, la figura celeste ¿en qué relación está con la figura que antes estaba pintada de naranja? Si le faltaba un pedazo por cubrir estaba...

C Menor

Y Es menor, exactamente... estaba incluida y ¿cómo podés asegurar que la tg te hace eso, que te deja una figura que es menor?... (pausa)... no te preocupes... cambiemos un poquito... habíamos llegado a que la figura naranja era mayor o igual que la celeste; ahora nos dicen que la celeste es igual a la verde... ¿por qué te parece que la celeste es igual a la verde?

C Y porque el área que no cubre acá...

Y A ese triangulito que estás señalando ¿qué le pasa?

C Sí, la cubre acá que es donde la cubre

Y De acuerdo y ¿cómo tendrían que ser esos dos triangulitos?

C Iguales

Y ¿Por qué son iguales?

C Son iguales porque tienen los tres lados iguales, esto que es el punto medio...

Y Como es el punto medio las dos horizontales que estás señalando son iguales

C Tienen este mismo ángulo que es igual por opuestos por el vértice, tienen estos ángulos de 90º y por eso son congruentes los triángulos

Y Entonces llegaste a que el área azul es igual al área verde y por lo tanto ¿qué relación hay entre la naranja y la verde?

C Son iguales

Y ¿Entre la naranja y la verde?

C Ah, entre la naranja y la verde... que ésta (figura naranja) es mayor

Y La naranja es mayor que la verde y eso ¿qué quiere decir respecto al teo?

C Que usando el MR se obtiene una aprox por defecto porque...

Y Perfecto

Sexta parte

Y Viste que para funciones de c+ el MT aproxima por exceso y el MR_ aproxima por defecto, pero yo no dije nada acerca de cómo aproximan el MR1 ni el MR2 ¿qué te parece? ¿qué tipo de aprox da el MR1?

C Ahí sí, para mí va a depender de la curva

Y Bien ¿qué quiere decir que va a depender de la curva?

C Y que la relación que había entre las ordenadas va a ser distinta

Y ¿Qué tipo de aprox. te puede dar?

C Hay los dos casos... o igual en caso que sea una constante

Y A ver, dibujame un caso en que la aprox con el MR1 te dé por exceso... ¿y una por defecto?

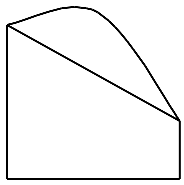
C dibuja

Y ¿En qué punto usamos la hipótesis de la c+ en las demostraciones anteriores? ¿Cuál te parece el punto fundamental donde decís “esto se cumple porque la función es de c+, si no fuera de c+ no se tendría por qué cumplir”?

C ¿Dónde usamos que es de c+? (Pausa)

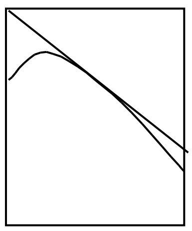
Y A ver, en la primera dem que hicimos... no es cierto que siempre el MT dé una aprox por exceso, ¿no es cierto? A veces el MT da aprox por defecto y a veces da una aprox que no sabemos si es por exceso o por defecto... Pero ahí te da por exceso ¿por qué daba por exceso? ¿dónde se usaba el hecho de que la función sea de c+?... (Pausa)... Hagamos otra cosa... imaginate una función que no tenga c+... dibujá una función que no tenga c+... tomá el MT... ¿te da una aproximación por exceso el MT?

C dibuja



C No, porque me queda área de la curva sin cubrir acá.
Y Bien y eso se cumplió ¿por qué? ¿qué es lo que cambia entre aquel dibujo y éste?
C La curva queda ahora por debajo de la curva
Y En el caso que vos dibujaste, que es el caso de una función de concavidad negativa la cuerda quedó por debajo de la curva y en las de c+ ¿qué pasa?
C Quedó por encima
Y ¿Y eso se cumple en todas las funciones de c+, que la cuerda quede por encima?
C Sí
Y Esa es una característica de las funciones de c+ equivalente a la que vos me comentaste al principio cuando yo te pedí que dieras una definición por eso se cumple... ¿y en ésta, en la segunda dem, dónde está el hecho que hace que se cumpla para funciones de c+?
C MR... acá te queda la curva toda por encima de la... (señala la tg)
Y ¿Si la función no fuera de c+?
C Te quedaría por debajo
Y Bien, ahora mirá, relacionado con eso una nueva preguntita ¿qué podrías decir de la aprox que ofrece el MT y el MR_ cuando las funciones no tienen c+?
C ¿Querés que te responda en cada caso?
Y Quiero que me digas algo acerca de eso... lo hicimos para funciones de c+ ¿qué podrías decirme de otras funciones que no tuvieran c+ para el MT y el MR_?
C El MT va a dar una aprox por defecto y con el MR por exceso
Y Bien, dibujaste la tg por el punto medio...
C La curva te queda por debajo de la tg... y entonces tiene más área cubriendo...
Y Y el MR ¿dónde aparece ahí? Porque vos trazaste la tg ¿y?

C dibuja



Y Ese de ahí es el MR pero no usando la ordenada del punto medio, no? La idea si repetís esta misma dem...
C Está bien... sí... acá (ahora sí dibuja el rectángulo correspondiente al MR_)
Y O sea que vos me dijiste que el MR_ te da una aprox. por exceso, me lo acabás de mostrar con un dibujito y también me dijiste que el MT ofrece una aprox por defecto... pero tu función ¿es una función cualquiera o es una función que tiene una concavidad particular?
C Tiene concavidad negativa.
Y Claro, lo que vos me acabas de decir es para funciones de concavidad negativa...
C Ah, ta... pensaba que era eso
Y No, un caso particular dentro de las que no tienen c+ son las que tienen concavidad

negativa pero ¿qué pasa para las que no tienen c+ ni negativa?

C Si tomo por ejemplo una constante (dibuja una función constante), el MR_ me da el área real bajo la curva y acá el MT sería el rectángulo mismo

Y Esas aproximaciones no serían por exceso ni por defecto serían aproximaciones exactas

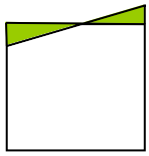
C El valor real... y después en una recta... (dibuja una recta de pendiente positiva)

Y Con la recta, el MT, ¿qué tipo de aprox te da?

C Con esta de acá te da el valor real

Y Exacto... ¿y la del MR_? ¿la aprox es por exceso o por defecto?

C dibuja y resalta



Y Efectivamente... son los mismos... pero ahora imaginate una función como la del segundo ejemplo (señala el gráfico 2 de la tercera parte del guión) ¿qué tiene c+ o negativa?

C Tiene las dos

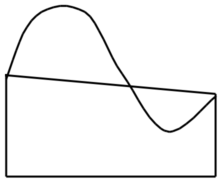
Y Según en qué intervalo trabajes

C Claro

Y Y cuando te enfrentás a una función de esas ¿el MT qué hace ahí? ¿aproxima por exceso o por defecto?

C Por defecto... porque considero el trapecio, la cuerda, uniendo estos dos puntos y me va a quedar área de la curva fuera y no va a... será por defecto.

C dibuja



Y El área bajo la curva es ésta y la del MT es ésta pero si vos decís que la aprox. es por defecto ¿qué quiere decir?

C Ah, sí... no sé... no sé como salen estos dos pedacitos (se refiere al trozo de trapecio que queda encima de la curva respecto al trozo bajo la curva que queda fuera del trapecio)...

Y Claro, el problema es que no sabés como son esos dos... y por lo tanto ¿podés sacar una conclusión acerca de cómo va a ser la aprox.?

C No

Séptima parte

Y El último teo es el que relaciona los dos anteriores: para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aprox del área bajo la gráfica, que nosotros sabemos que son por exceso, que es menos ajustada que la del MR_, que sabemos que es por defecto. ¿Qué quiere decir eso de menos ajustada?

C En eso estaba pensando... que el MT se acerca más al valor real que... pará... el MR se acerca más al área real que hay debajo de la curva...

Y De acuerdo, eso es lo que intentamos demostrar acá. Mirá un poquito... tiene varias partes y empezamos por acá... "el error de la aprox ofrecida por el MT" dice que es ésta que está pintada de verde ¿por qué es eso?

C Está bien... porque me está cubriendo toda el área de la curva más esto que está acá que no forma parte del área real bajo la curva. Y ese es el error que...

Y Bien, primera parte: perfecto. Ahora queremos ver que el área verde es mayor o igual que el área naranja ¿cómo está formada la figura naranja?

C Está formada por un triángulo que está contenido en la...

Y Dentro del área verde... bien... el vértice del triángulo está en...

C El punto medio

Y Bien... y ¿por qué el triángulo está metido dentro del área verde? (Pausa) Lo que limita el área verde es la curva y lo que limita el triángulo son rectas ¿por qué el área naranja es más chica que el área verde?

C Y porque acá la curva está quedando debajo de lo que está limitando el triángulo.

Y De acuerdo y eso ¿por qué es?

C Porque tiene c+

Y Mirá ahora la tercera parte del dibujo, acá aparecen unas rectas nuevas ¿identificás qué son esas rectas nuevas?

C Sí, son la tg por el punto medio y las paralelas por acá...

Y Por los extremos... perfecto... esa era para identificar nuevos elementos porque lo que hay pintado es lo mismo... ahora dice que esa área celeste es igual al área gris

C El triángulo de acá vuelve a ser congruente con éste de arriba: este vértice es común, éste...

Y Como lo hiciste antes, perfecto... es el mismo razonamiento, no te preocupes... llegamos a que el área azul es igual al área gris y el área gris dicen que es igual al área roja

C Porque éste es un rectángulo (señala el paralelogramo determinado por un triángulo gris unido a un triángulo rojo) y ésta es la mitad del... la diagonal lo divide en dos partes iguales

Y Exactamente, cada uno de los triángulos grises es igual a cada uno de los triángulos rojos entonces bárbaro... y dicen que el área roja es mayor o igual que el área amarilla

C Acá (se refiere al intervalo entre a y (a+b)/2 en la figura amarilla) está cubriendo el área que hay entre la recta y la curva, de este lado (se refiere al intervalo entre (a+b)/2 y b) es lo mismo y acá (figura roja) es hasta...

Y Las rectitas esas... y ¿por qué es menor entonces? ¿qué le pasa a la curva respecto a la recta?

C Queda por debajo de la recta... y el área... queda área determinada...

Y Bárbaro... ahora dice que eso que está pintado de amarillo es el error ofrecido por la aprox del MR_ ¿eso por qué será? (Pausa)... Claramente el rectángulo por el punto medio no está...

C Sería éste de acá (señala las figuras de la prueba del teo anterior)

Y O sea ¿qué sucede? El área amarilla en aquellos dibujos ¿a qué correspondería?

C A ver, un momentito...

Y Me callo...

C Hago acá el rectángulo... es lo que pasa acá (señala el segundo teo) lo que no cubre acá lo cubre de este lado y sobra la misma cantidad

Y O sea que es la misma idea que tenías ahí...

C Claro.

Entrevista al estudiante D

Primera parte

Y ¿Te acordás de alguna definición de rectángulo?

D ¿Rectángulo? Una figura que tenga tres lados de 90... un cuadrilátero con tres ángulos rectos

Y Perfecto, esa es tu definición de rectángulo ¿y de trapecio?

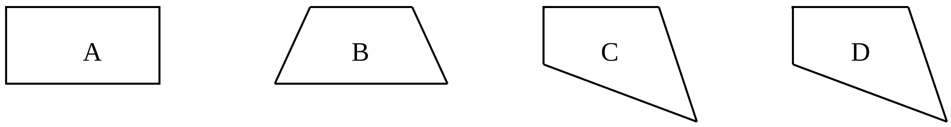
D ¿Trapecio? Vendría a ser... si me acuerdo...

Y No importa que te acuerdes... dame la tuya

D Sí pero no me acuerdo del trapecio... un cuadrilátero con dos lados paralelos

Y Bien esa es una definición bien posible de trapecio. Bárbaro, dibujame un par de ejemplos, uno que sea trapecio (B) y uno que sea rectángulo (A), y un par de no-ejemplos, o sea una figura que no sea rectángulo (C) y una que no sea trapecio (D)

D dibuja



Y Perfecto, ahora yo te muestro una cantidad de figuras ahí ¿cuál de esas te parece que son trapecios?

D ¿Trapecios? Según mi definición serían la A, la D y la C, la B creo, la E, la G. O sea, sólo la F y la H no

Y Sólo la F y la H fuera ¿Por qué dudabas sobre la B?

D No porque no veía bien si eran paralelas o no

Y Sí, es como un cuadrado la B, ¿no? ¿entonces?

D Sí, sí, si es un cuadrado sí.

Segunda parte

La entrevistadora explica cada uno de los 4 métodos tal como aparecen en el guión de la entrevista.

Y ¿Qué figuras tendrías que considerar para usar el MT con un solo intervalo con esta función (señala la primera figura que aparece en el guión de esta parte)? ¿Cuál sería el trapecio que considerarías?

D ¿Con un solo trapecio? Pero... ta, tengo que hacer un trapecio pero entonces tengo un solo... es decir tengo que hallar el área de acá abajo pero con un solo trapecio y tengo este punto primero y éste segundo entonces ¿qué puedo agregar yo?

Y ¿Cuál sería el trapecio que considerarías entonces? ¿Cómo sería el dibujo del trapecio que considerarías?

D Vendría a ser toda esta área, vendría a ser un rectángulo

Y De acuerdo ¿eso te provoca algún problema: que se llame MT y que tomes un rectángulo?

D No, porque un rectángulo es un trapecio

Y Perfecto y ahora con esta función (señala la segunda figura que aparece en el guión de esta parte)

D ¿Lo mismo? Pero si yo... yo podría en esta primera yo podría poner dos trapecios uno con un punto acá y un punto acá (señala uno de los extremos y el punto medio)... No, ¿no porque tenía que ser uno solo?

Y Claro, obviamente con lo que vos me decís obtendrías una aprox mucho mejor, si en vez de considerar un trapecio considerás dos porque tomás el punto medio y el área queda mucho más ajustada al área que vos querés calcular... yo sólo lo que quería era mirar el caso en que dos puntos tienen la misma altura en que en realidad lo que te queda es un rectángulo pero para vos eso no fue inconveniente porque tenés claro que los rectángulos son un caso particular de trapecio. Bien, ahora quería ver con este tipo de problema... de vuelta un trapecio con un solo intervalo ¿cuál tomarías?

D El área que quiero es la que está debajo de la curva... pero ahí tengo un lado de cero, quedaría un triángulo y entonces no es un cuadrilátero... capaz que se puede considerar que un cuadrilátero puede tener un lado chico

Y Habría que hacer una extensión de lo que es la idea del trapecio...

Tercera parte

Y Mirá el primer teoremita: para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aprox por exceso del área bajo la gráfica ¿Qué entendés por eso, de sólo leerlo?

D Que el área que te da el trapecio es mayor al área que vos querés medir

Y Perfecto, eso es cuando la función es de c+ ¿qué quiere decir que una función tenga c+?

D ¿c+? Me tengo que meter con las derivadas... sí ¿c+ en un intervalo?

Y Sí, en un intervalo... Vos contame cuál es la definición que primero se te ocurriría de función de c+

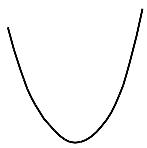
D Si en ese intervalo le haces la derivada, el signo de esa derivada te quedaría... no... + - +

Y ¿A ver? ¿cómo es? Si el signo te quedara...

D No, es para abajo... sigue de largo la derivada... claro, es positiva después tiene un cero, después negativa... Si fuera c- sería negativa, un cero y después positiva

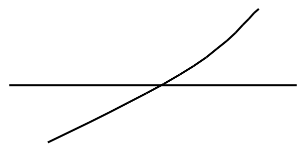
Y A ver, dibujame una función de c+... ¿Cómo me decías de la derivada?

D dibuja



D La derivada viene a ser la tg en cada uno de los puntos entonces en este punto de acá (señala el mínimo) la tg es cero y acá la tg de este ángulo (señala un punto a la izquierda del mínimo) es negativa entonces, y acá en este ángulo es positiva (señala un punto a la derecha del mínimo). Sería negativa, después cero y después positiva

D hace un esquema del comportamiento de la derivada



Y De acuerdo, o sea que vos decís que una función tiene c+ cuando el signo de su derivada cambia: negativo, cero, positivo. Bien, ahí dibujaste un ejemplo ¿tenés idea de otro ejemplo?

D (Pausa) De c+ también es la función constante... no... con mi definición de recién no

Y ¿Por qué? ¿qué le pasa a la derivada?

D Siempre es cero

Y O sea que según tu definición no pero a vos te parece que tendría que ser de c+

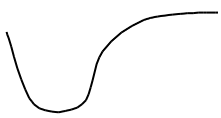
D Creo que recuerdo que era las dos al mismo tiempo de c+ y de c-, entonces esto está mal

Y No, puede ser que no esté mal lo que pasa es que de repente la definición es muy estricta ¿conocés otra definición de c+ además de la que me dijiste del signo de la derivada?

D No me acuerdo...

Y Bueno, de repente aparece alguna más en el resto de la charla, o sea, lo que teníamos era que con tu definición vos podías dar este ejemplo de acá (se refiere a la función de c+ que dibujó D) y ¿qué pasaba con este ejemplo que empezaste a hacer acá?

D había dibujado



D No tiene por qué ser así simétrica... pero... pero no puede hacerse constante acá... tiene que tener un mínimo y tiene que seguir yéndose...

Y Viste que según tu definición... Acá tiene derivada negativa, acá derivada cero, acá derivada positiva y acá se empieza a hacer derivada cero de nuevo pero hasta este punto de acá (señala el punto de inflexión de la gráfica)...

D Hasta ahí sí

Y Bárbaro ahora yo te voy a mostrar 6 ejemplos de funciones y yo quiero saber cuáles de éstas te parece que tienen c+

D (Pausa) Si seguimos con lo mío vendrían a ser estas dos (la primera y la cuarta) y ésta (la tercera) no sería completa

Y ¿Por qué? ¿por qué descartaste las otras? ¿qué le pasaría al signo de su derivada? (mientras señala la sexta murmura -, +, -, +, y algunas frases más) En ésta que es el sexto caso vos decís negativa, positiva y acá de vuelta negativa y positiva por eso la descartaste... La que sí seguro descartaste fue la segunda. La tercera estabas diciendo que te parecía de c+ pero no cumplía tu definición y con la quinta ¿qué pasaba?

D Con la quinta... no, la quinta tampoco... según mi definición sería la primera y la cuarta, nada más pero... por ejemplo la tercera podría llegar a ser cambiando un poco la definición...

Y Acá hiciste un dibujito (se refiere al esquema del comportamiento de la derivada que aparece más arriba) que podría llevar a cambiar un poquito la definición aun siendo verdadera... Vos ¿por qué hiciste esta raya acá?

D Esto sería el signo de la derivada

Y ¿Cómo viene la derivada? Vos dijiste negativa, cero, positiva pero en realidad dibujaste más que negativa, cero, positiva dibujaste que la derivada era...

D Función lineal

Y Pero no tenía por qué ser lineal en principio, pero sí lo que tenías era que era creciente

D Claro, creciente

Y De repente no tenés que pedirle tanto

D Pedirle que es creciente, no positiva

Y Con esta definición la función constante aquella ¿qué te pasaba? ¿cómo te queda su derivada?

D Es constante y por lo tanto es creciente como caso extremo de creciente... y entonces serviría... y ésta (se refiere a la quinta función graficada) pasaría a ser...

Y ¿Por qué?

D Este tramo de acá (se refiere al primer tramo) es positiva, después disminuye, capaz que llega a cero

Y Entonces ya no es creciente si era positiva y disminuye casi a cero...

D Pero ésta... la tercera, va aumentando siempre entonces tendría c+ y estas otras no (señala la última función)

Y Entonces trabajamos ahora con esta definición de c+

Cuarta parte

Y Estábamos con el enunciado: para funciones positivas de c+ el MT da una aprox por exceso... Ahora retomamos el teo: este dibujo que está acá se pretende que sea una explicación de lo que dice en el teo ¿Qué ves en el dibujo ese? ¿qué te parece que hay? Como es un dibujo pero no tiene texto depende de lo que vos interpretás que hay en el dibujo, entonces lo primero que necesito es que me digas qué ves en el dibujo.

D En el primero sería... Ah, no, lo que pasa es que tenés el coso, el signo éste (se refiere al ≤). La primera parte sería el área bajo la curva: lo que queremos hallar, la exacta, la otra: la aprox que te da el MT, y dice que es mayor el área del MT, que el área que queremos hallar.

Y Bárbaro y ¿por qué es mayor?

D Es mayor porque hay una parte del área de la gráfica... el trapecio hay una parte que la toma como área y que no es

Y De acuerdo, por lo tanto el menor o igual éste está justificado... ¿y siempre el trapecio va a tomar una parte del área que no es?

D No, puede no tomarla... ah, no, lo que pasa es que habíamos dicho que tiene c+... si tiene c+ puede tomar área que no es... La pregunta que me habías hecho era si siempre iba a tomar y es sí. Si el punto A y el punto B, si es una recta la función, el área va a ser igual

Y Pero viste que el signo es...

D Es menor o igual

Y ¿Y podrá suceder que no sea menor o igual, que sea mayor?

D No, porque tiene c+, nunca se va a ir para arriba

Y Y eso ¿por qué es?

D Porque la derivada pasaría a ser decreciente, va subiendo y si se pasa de la línea va a tener que volver y va a tener que disminuir

Y Bien, ahí estás usando el hecho de que la concavidad tiene que ser positiva. Vos me dijiste que para las funciones que no tienen c+ no tiene por qué cumplirse por la explicación que me estabas dando de que tenía que subir y después volver a bajar y así no tendría c+. Imagináte que tomás una figura distinta que tenga c+ ¿igual se va a cumplir el teo? sigue siendo de c+... si hubieras dibujado otra función de c+...

D Seguiría siendo porque por lo que dijimos recién para la c+ tiene que ser siempre creciente la derivada, entonces no va a poder... por más que haga vueltas nunca va a poder pasarse de esta línea porque tendría que volver sea como sea, entonces...

Y Bárbaro, ahora la pregunta es que acá dice el MT, no dice el MT con un solo intervalo y yo en mi dibujo lo hice con un solo intervalo ¿Qué pasa si se hace el MT con muchos intervalos? Si la función es de c+ y el MT lo aplicas con muchos intervalos ¿sigue siendo por exceso la aprox?

D ¿Siempre el trapecio va de un punto de la gráfica?

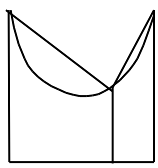
Y En cada intervalito va del extremo izquierdo al extremo derecho

D Y sí, seguiría siendo

Y ¿Y cómo lo justificarías visualmente para c+ pero con muchos intervalos? ¿qué dibujarías para justificar eso mismo pero no con un intervalo sino con muchos?

D Con la misma gráfica...

D dibuja



D Acá serían dos pero si fueran más siempre habría una curvita... entonces por más que yo los tome más chiquitos, pero finitos

Y ¿Qué sucede?

D El área que voy a tomar va a ser mayor o igual, siempre va a haber un pedacito que no tome salvo como máximo que coincidan la recta con el coso

Y Pero cuando no es recta vos sabés que ¿qué queda por debajo siempre?

D Siempre va a quedar la gráfica

Y La gráfica queda por debajo de la recta, perfecto

Quinta parte

Y Ahora el segundo teo: siguen siendo funciones de c+ pero ahora lo que usas no es el MT sino el MR_, o sea que tomás el intervalo, tomás el punto medio y esa es la altura del rectángulo. Entonces lo que dice el teo es que para funciones positivas de c+ el MR_ ofrece una aprox por defecto del área bajo la gráfica... ¿se entiende lo que dice el teo? Y esto que está acá pretende ser de vuelta una explicación. Vamos primero que nada a interpretar que hay en cada una, en el primero...

D En el primero el área que queríamos nosotros hallar

Y Dice que eso es mayor o igual que el segundo y en el segundo ¿qué está dibujado?

D En el segundo no tenemos el promedio de... los extremos... sería un área... son dos rectángulos

Y A ver ¿qué aparece ahí? ¿qué punto es éste?

D El punto mínimo... no, no el mínimo, el punto medio

Y Sí, que en este caso está muy cerquita del mínimo pero que no es el mínimo porque ¿qué es esta recta que aparece ahí?

D Esa es la derivada... la tg

Y Ahí está y la tg no es horizontal así que no es el mínimo

D No

Y Bien, aparece la tg, tenés éste que es el punto medio y lo que hay pintado ¿qué es?

D El área bajo la curva de la derivada en ese punto

Y En el punto medio... y en el siguiente, en el verde ¿qué es lo que hay dibujado?

D Está el área bajo... podría ser... el área bajo la función constante que pasa por el "f" del punto medio

Y Perfecto, o sea que lo que tenés es... combinando con los métodos que vimos antes... si es el área que tenés debajo de la constante es el área del rectángulo ¿no? O sea que es el MR, MR_ o sea que el primero es el área exacta que vos querés bajo la curva y el último es el MR_

D Ah, claro... ya veo... yo no había entendido lo del MR_, yo pensaba que es el punto medio usando el promedio entre este y este punto (señala f(a) y f(b))

Y Ah, claro, lo que tenés que hacer en cada intervalito es tomar el punto medio y por ahí tomar la altura. Mirá acá se ve claro lo que hacés en todos es tomar el punto medio y en ese, la altura ¿se entiende?

D Sí, sí

Y Venimos acá entonces ¿por qué se explica el mayor o igual que está acá entre el área naranja y el área azul?

D A ver... si la concavidad sigue siendo positiva... ni antes ni después va a poder la gráfica volver a pasar debajo de la tg en ese punto... porque sino pasaría a ser la derivada decreciente y dejaría de serlo... Entonces ta, por eso, siempre va a quedar, va a quedar un área o máximo va a ser lo mismo... por eso

Y Vos me dijiste que la gráfica nunca va a pasar a estar debajo de la tg ¿entonces?

D Entonces siempre va a haber un área que no va a cubrir, el área de la parte azul no la va a cubrir, que pertenece al área que queríamos nosotros encontrar... o como máximo no va a existir el área pero nunca va a ser mayor

Y Claro ese es el = del ≥

D Ahí va

Y Entonces el área naranja siempre va a ser mayor o igual que el área celeste. El área celeste y el área verde ¿por qué son iguales?

D Porque... por congruencia de triángulos

Y Congruencia de triángulos, claro. Ahí hay dos triangulitos que son iguales ¿por qué?

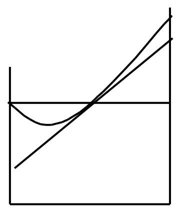
D Son iguales porque es el punto medio, entonces tenemos que... entonces el lado éste horizontal es el mismo y después tenemos el ángulo por opuesto por el vértice... y después me quedaría la hipotenusa... Ah, no, tenemos 90 grados acá entonces ya tenemos dos ángulos y un lado, ta, dos ángulos y el lado comprendido, entonces, son iguales

Y Bien, perfecto, además cuando tenés dos ángulos ya tenés el tercero... Me faltó una pregunta: acá ya entendimos toda la figura y por qué dice ≥ o =, ahora ¿por qué esto explica el teo? ¿qué relación tiene este dibujo con lo que dice el enunciado?

D El enunciado... lo que dice es que el área roja es más grande que el área verde entonces por transitiva...

Y Bien, viste que acá tenemos el peligro de que el mínimo y el punto medio están muy cerca uno del otro, dibujame una función donde eso no suceda, donde el mínimo y el punto medio no estén cerca y veamos si el teo igual se sigue cumpliendo

D dibuja



D El área debajo de la derivada siempre va a ser menor o igual porque nunca vamos a volver para abajo... y ta ahí estamos probando esto

Y La primera desigualdad

D Ta, para la otra sería la mismo

Y Claro para la igualdad no importa donde está, la función ya no se considera

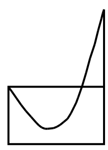
Sexta parte

Y Ya vimos que MT aproximaba por exceso y que el MR aproximaba por defecto ¿qué tipo de aprox te da para funciones de c+ el MR1? Acabamos de demostrar un teo para MT y un teo para MR_ ¿podría demostrar un teo para el MR1?

D ¿Puedo?

Y Claro, dibujá todo lo que quieras

D dibuja

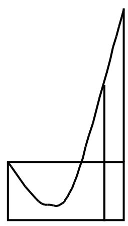


D No te da nada porque yo puedo tomar que esta área sea más grande que ésta

Y Lo que perdés es más grande que lo que ganás o…

D O lo que pierda sea más chico que lo que gane

D hace una extensión hacia la derecha de su dibujo anterior



Y O sea, depende de dónde termina tu función… es que la aprox te va a dar…

D Por exceso o por defecto

Y O sea que ¿se podría dar algún teo con el MR1?

D No

Y ¿En qué puntos especialmente de estas dos dem usamos la hipótesis de que la concavidad fuera positiva? ¿dónde fueron los puntos fundamentales donde usamos que la concavidad fuera positiva para demostrar estos teos?

D En ésta, en la primera, no hay muchas cosas para…

Y Pero en algún punto la tuvimos que usar, sino…

D Claro, la idea es que no puede… si se pasara… si hubiera un área que no la estamos comprendiendo, la función tendría que seguir de largo y volver después porque tiene que ir a… sería absurdo, no sé…

Y La idea es "¿en qué momento?" No tenés por qué volver a repetir la dem pero ¿dónde fue que usaste que la concavidad fuera positiva? Para que la curva se mantuviera ¿por dónde?

D Se mantuviera por debajo de la recta…

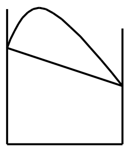
Y ¿Dónde lo usaste en la segunda dem?

D En la primera parte… es lo mismo… para que la gráfica se mantenga por encima de la tg en el punto medio

Y Bien ¿qué podrías decir de las aproximaciones que ofrecen el MT y el MR_ para funciones que no fueran de c+?

D Para funciones que no fueran de c+, pueden ser de c- o nada, entonces el MT daría…

D dibuja

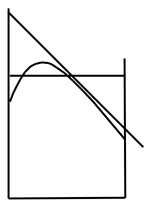


Y ¿Cómo podrías enunciar ese teo?

D Para funciones de c- el MT ofrece una aprox por defecto. Y para el MR: para funciones de c- el MR_ ofrece una aprox por exceso

Y La dem del MT la veo ahí pero la del MR_ ¿cuál es la dem?

D dibuja



Y ¿Qué dibujaste ahí?

D Ésta es la tg por el punto medio… y pasa lo mismo si es de c-, nunca va a poder volver para tocar a la gráfica otra vez y tener un área que no…

Y ¿Cuál es tu definición para c-?

D Debería ser que la derivada de la función sea decreciente

Y Bárbaro, vos me dijiste que había dos posibilidades para no tener c+, que una era tener c-, que es esa sobre la que estás trabajando

D La otra es la de la constante

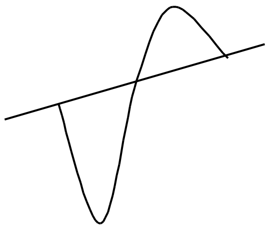
Y La constante o ¿qué otra posibilidad? Por ejemplo, como hoy, esta función que está acá que no tiene c+ ni c-

D Claro

Y Ahí el MT y el MR ¿qué ofrecen?

D Si los dividiéramos en dos podríamos hacer algo pero así no tenés por qué… si yo hago así

D dibuja



D Está esto y esto... y sería por exceso... pero si fuera más arriba sería por defecto así que no puedo decir nada

Y De acuerdo, o sea que cuando sabes que es de c+ el MT ofrece una aprox por exceso, cuando es de c- dijiste que era por defecto pero cuando no sabés nada sobre la concavidad no podés afirmar nada

Séptima parte

Y Acá hay un teoremita que relaciona los dos anteriores, teníamos que el MT ofrecía una aprox por exceso y el MR_ por defecto, lo que dice este teo es que en realidad el error que comete el MR es más chico que el que comete el MT, porque dice: para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aprox del área bajo la gráfica menos ajustada que la que ofrece el MR_. O sea que lo que vamos a tomar es el error de la aprox dada por el MT, el error de la aprox dada por el MR y ¿cuál queremos ver que es más grande?

D El de la trapezoidal

Y De acuerdo, entonces leamos esto y vemos qué pasa… el error de la aprox ofrecida por el MT dice que esto pintado de verde ¿por qué?

D Sí, porque esa es el área que nosotros medimos con el MT pero no está bajo la curva

Y Ahora considerá esta figura que está acá, pintada de naranja ¿cómo está formada esa figura?

D Está formada por el primer punto, es un triángulo, entonces: el primer punto, el punto medio y después el segundo punto

Y Dicen que el verde es mayor o igual que el naranja ¿por qué?

D Sí, lo mismo, si es positiva va a ser así (hace un gesto como que el gráfico tiene forma de U)

Y ¿Qué quiere decir eso?

D Que va a existir un área en que… estaríamos tomando un área por encima entonces… siempre va a existir un área por encima de la curva que no está incluida en el triángulo porque… si existe un área que estuviera por debajo del área de la curva, y estuviera dentro del triángulo en algún momento la derivada no sería creciente

Y Ahora aparece esta celeste donde no hay cambios en la zona pintada pero sí aparecen unas rectas ¿cuáles son estas rectas que aparecen?

D Estas rectas son… la última, la de más abajo… (murmura algo) sería la tg a la curva en el punto medio y las otras serían las paralelas a esa por el primer y el último punto

Y Entonces eso fue simplemente para presentar esas rectas pero ahora nos dicen que el área celeste es igual al área gris

D Al área gris… estamos sacando ese triangulito de ahí y el otro es lo mismo

Y O sea que los dos triangulitos, el que falta y el que sobra son iguales entre sí

D Tienen que ser iguales… tenemos dos ángulos iguales, entonces son los tres, opuestos por el vértice y dos paralelas cortadas por una misma diagonal ahí. Y el punto medio, ésta que tenemos acá corta en el punto medio entonces este segmento es igual a éste

Y Bárbaro, como los triángulos son iguales el área celeste y la gris son iguales.

Ahora la gris y la roja…

D La gris y la roja… y son iguales también porque… este ángulo es lo mismo que éste porque…

Y ¿Qué querés mostrarme ahí?

D Que este triangulito de acá es igual a éste y después sería que éste es igual a este otro (señala cada una de las mitades de uno de los paralelogramos rojos)

Y Bien y estás tratando de ver con los ángulos que esos eran iguales

D Tengo este lado que es el mismo…

Y Un lado común y los ángulos esos son todos iguales porque son todas paralelas ahí…Bárbaro entonces ahí…

D El otro es lo mismo

Y Entonces te quedó que el área gris es igual al área roja y ahora dicen que la roja es mayor o igual que esta amarilla

D Sí, por lo mismo que la verde es mayor o igual que la naranja

Y Perfecto… y ahora nos dicen que la amarilla es el error de la aprox ofrecida por el MR_ ¿Por qué es?

D Sí, eso es porque según el MR…el área es lo de abajo de esa línea (se refiere a la tg)

Y Pero el MR es con un rectángulo y ahí no hay un rectángulo

D No, lo que pasa es que el rectángulo pasaría por el punto medio de la función y después… nosotros habíamos demostrado que es lo mismo el área del rectángulo que pasa por el punto medio que la del trapecio tg a la curva por ese punto entonces… el área bajo esa es lo que mide el MR y la parte amarilla es la que no mide pero nosotros queríamos medir, entonces la parte amarilla es el error

Y Después de haber leído esto parte por parte ¿por qué el error del MT es mayor que el error del MR?

D No sé… porque podría ser igual

Y Ah, claro, mayor o igual, ese seguro

D Porque cada igual es como un si y solo si… entonces podemos ir para atrás

Y De acuerdo, en realidad vos tenés que éste es igual a éste y que éste es mayor o igual que éste ¿cómo llegas hasta acá?

D Por transitiva

Y De acuerdo

Entrevista a la estudiante E

Primera parte

Y Lo que me interesa es que me cuentes una definición que conozcas de rectángulo y una definición que conozcas de trapecio

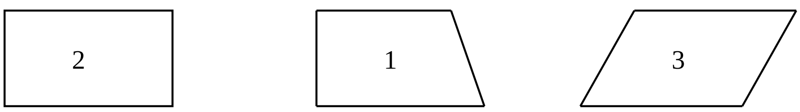
E Rectángulo es un cuadrilátero que tiene tres ángulos rectos

Y Bien ¿y trapecio?

E Trapecio es un cuadrilátero con un par de lados paralelos

Y Bárbaro ¿no me dibujarías un par de ejemplos y de no ejemplos de trapecio y rectángulo? O sea, uno que sea ejemplo de trapecio (dibujo 1), uno que sea ejemplo de rectángulo (dibujo 2), uno que no sea ejemplo de rectángulo (señala dibujo 1) y uno… (dibujo 3)

E dibuja



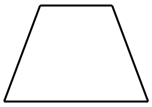
Y Bien… y de los siguientes ¿cuáles son trapecios? (señala las figuras que aparecen en el guión)

E ¿Éste puede considerarse que es un trapecio y además es ambas cosas? (se refiere a la figura A)

Y A ver tu definición ¿cuál era?

E Por ejemplo un trapecio es esto

E dibuja



E Tiene un par de lados paralelos y no tiene por qué tener el segundo, pero éste también es un trapecio (se refiere a su ejemplo de rectángulo). Entonces éste (se refiere a la figura A) es un trapecio. Éste no porque es un trilátero. Éste porque no tiene ningún par de lados paralelos, ni este par ni este par. Éste es un trapecio y éste es un trapecio

Y O sea que…

E No son trapecio el F, el H y ta. El F y el H no son trapecios

Y Ahora vos me dijiste que el B era trapecio y allá cuando pusiste un no ejemplo de trapecio…

E Me equivoqué, el no ejemplo de trapecio está mal

Y O sea que tu definición de trapecio es que tiene…

E Un par de lados paralelos por lo menos, o sea que un no ejemplo de trapecio tendría que ser un cuadrilátero que no tuviera… o un triángulo cualquiera

Segunda parte

La entrevistadora explica cada uno de los 4 métodos tal como aparecen en el guión de la entrevista.

Y Ahora tenés esto (se le muestran las figuras que aparecen en el guión de esta parte), acá tenés una función y acá tenés otra, si vos querés usar un MT con un solo intervalo, con un solo intervalo en la base ¿qué figura tendrías que tomar en este caso y qué figura tendrías que tomar en este otro?

E ¿Cómo qué figura? Yo quiero calcular el área de acá abajo

Y Sí, con un trapecio, con un solo trapecio ¿cuál sería el trapecio que tenés que considerar?

E Para que me de lo más aproximado…

Y No, no es problema de si es muy aproximado o poco, es… Si a vos te dicen usá el MT tal como se te explicó allí con un solo intervalo ¿cómo lo usarías? ¿qué trapecio te tomarías?

E Me tomaría el punto medio de acá y me tomaría este trapecio

Y Y ¿por qué el punto medio? Acá ¿cómo dice que se tienen que tomar los trapecios? ¿de dónde a dónde van?

E Ah, desde la primera ordenada hasta la última o sea que acá si me tomara un trapecio me estaría tomando un rectángulo

Y Bárbaro ¿y en aquel?

E Si acá me tomara un trapecio me estaría tomando un triángulo, un triángulo rectángulo

Y Bien, era para ver si quedaba claro lo que se entiende por MT. El rectángulo vos me habías dicho que era un caso particular de trapecio pero ¿el triángulo?

E El triángulo tendrías que tomar como que… como que un punto sería un segmento

Y Habría que generalizar mucho la definición para poder admitirlo

Tercera parte

Y El primer teoremita es éste: para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aprox por exceso del área bajo la gráfica ¿Se entiende lo que dice?

E Sí, si la función viene sonriendo y hacés un trapecio, el área que te da el trapecio es más grande que el área de la función

Y Bárbaro, eso era una primera interpretación, vamos a profundizar… ¿Cómo interpretás ese enunciado?

E Que el área que te da el trapecio es más grande que el área que querés calcular

Y Bárbaro ¿qué quiere decir que una función tenga c+?

E Que la derivada segunda te da positiva, es como que ríe

Y Tiene esa forma, bien…

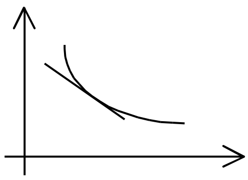
E Sé que hay una definición bien pero no la manejo

Y Manejás ésta, bien…

E Ah, que la tg si la hacés en cada punto te queda por arriba…

Y A ver, haceme un ejemplo de función de c+

E dibuja



E Vos sabés que es positiva… porque si vos hacés en cada punto la tg a la curva te queda por arriba

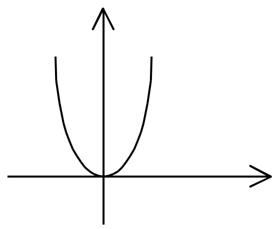
Y ¿Qué te queda por arriba?

E La curva te queda por… este valor (se refiere al valor funcional) te queda por arriba de este otro, más alto

Y Bien, la curva te queda por encima de la tg… o sea que lo que vos me hiciste acá fue un ejemplo de función de c+. Hacé otro ejemplo de función de c+

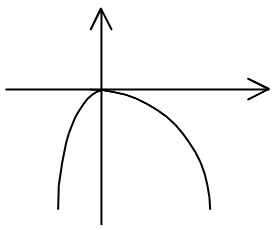
E Yo que sé, puede ser una parábola

E dibuja



Y Bárbaro, acá tenés otro ejemplo de función de c+ ¿y un no ejemplo de función de c+?

E dibuja



E Toda, toda la concavidad negativa

Y Bien, ¿sólo es eso? ¿sólo puede ser de c- para no tener c+?

E No, puede ser… se supone que si hacés una recta… no sabría qué es una recta

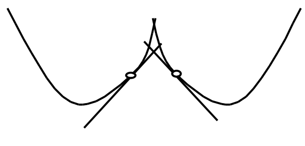
Y Con tu definición, a ver…

E Puede ser así… con mi definición si tenés una recta… creo que no podés hallar la derivada segunda… no sé, hay determinados puntos donde no podés hallar la derivada primera y sin la derivada no podés hallarla… no sé. La tg a la recta es ella misma entonces no tienen c+ ni c-, porque no está por encima está coincidiendo… o lo podés considerar como que está teniendo al mismo tiempo c+ y c-

Y Es cierto pero volvamos un poco a lo que decías recién… si tenés una recta ¿qué fórmula tienen las rectas?

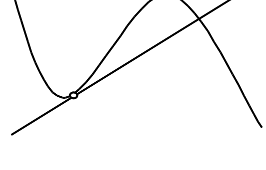
E y = mx+n o…
Y Con esa alcanza… ¿y cuando la derivas?
E Cuando la derivo queda igual… la m queda 0, mx queda m… y = m
Y ¿La derivada segunda?
E La derivada segunda es igual a cero
Y ¿Entonces?
E El 0 es un punto de inflexión entonces está constantemente teniendo un punto de inflexión, o sea que está constantemente cambiando de concavidad, o sea que no es ni positiva ni negativa
Y Bárbaro… Ahí dibujaste unos ejemplos de funciones de c+, la otra pregunta es: vos me diste dos definiciones de función de c+ ¿no? ¿cuáles son las dos que estamos manejando?
E Sí, una es que la tg estaba por encima y otra es que la derivada segunda era positiva... pero ésta no es una definición sale de la definición...
Y Bárbaro ¿conocés otra definición de c+?
E No
Y Bueno, mirá acá hay unos ejemplitos tenés que decir si son funciones de c+ o no
E Esto tiene c+ (señala la primera gráfica), ésta tiene c- hasta acá y c+
Y ¿Y si yo hablo de todo el intervalo? ¿tiene c+?
E No... c+ (señala la tercera gráfica)... c+ (señala la cuarta gráfica)... no tiene c+ (señala la quinta gráfica)... y acá las dos tienen c+ (se refiere a los dos tramos de la sexta gráfica)
Y ¿Y en total, en todo el intervalo, tiene c+?
E Sí, por eso sí... las dos, o sea, todo el intervalo tiene c+ menos un punto
Y A ver pero yo no te pregunto concavidad puntual sino en todo el intervalo
E Sí, en todo el intervalo tiene c+
Y A ver, miremos un poco con tu definición... tu definición es que la tg ¿cómo tenía que quedar?
E Por encima de la... la tg en un punto tiene que quedar por encima del... ta... hay un punto en que...
Y A ver, la tg vos me dijiste...
E Sí, sí, sí, por debajo de la curva y hay un punto que no tiene tg
Y ¿Y si tomás un punto cercano que sí tenga tg? ¿qué pasa con la...?
E Me queda supuestamente...
Y Trazás la tg ¿y? ¿te queda toda la curva por encima de la tg?
E No, no me queda
Y A ver dibujate...

E dibuja



E Si fuera tipo así... acá me queda bien y acá me queda bien
Y A ver cuando venís en esta zona de acá con la tg (se le señala la prolongación hacia arriba del segmento de tg que E había trazado en el último dibujo)
E Ah, todo el pedazo de curva no me queda... ah, ta, está mal aplicada la definición... ya entiendo lo que me querés decir, que no es toda la curva sino que es en los puntos de alrededor... como que es una definición de "entrecasa" no está bien hecha... si la curva hace así acá hay puntos (de la curva) que me quedan por debajo

E dibuja



E Es que los puntos de acá (de la tg), de este entorno, quedan por encima... pero es una definición intuitiva, yo no sé...
Y De acuerdo

Cuarta parte

Y Estábamos con este teo: para funciones de c+ el MT ofrece una aprox por exceso del área
E Entonces con eso…
Y Vamos a mirar este gráfico que está acá, primero que nada ¿qué hay representado en este gráfico?
E En una función con c+ el área bajo la gráfica y el área que da el MT
Y Y hay un símbolo en el medio ¿qué representaría?
E Es un 4
Y No, es un ≤
E Que el área abajo de la gráfica de una función con c+ es menor o igual al área que obtenemos con el MT
Y ¿Y es cierto?
E Es verdad
Y ¿Por qué?
E Porque como tiene c+ acá hay todo un pedazo que está pintado, que acá está pintado y acá no, acá estás tomando sólo el área de abajo de la gráfica y acá no…
Y Y eso ¿qué tiene que ver con la c+?
E O sea, ¿es "¿cómo se demostraría el teo?"?
Y No, visualmente, no la dem.
E Visualmente que la c+, o sea, si tú tenés una curva entre la primera ordenada y la segunda, tenés como un hueco para adentro… si ponés una recta es como si… si acá hicieras la recta estas sacándole área a esto, a esta figura…
Y A la recta para decirle de alguna manera podemos decirle la cuerda
E Claro, la cuerda
Y Pero vos me estás diciendo que por ser de c+ la cuerda tiene una posición particular
E Sí, la cuerda tiene una posición… la cuerda está entre esta ordenada y ésta, está por afuera digamos…
Y ¿Y eso de dónde sale? ¿eso se cumple siempre en funciones de c+?
E (Pausa) Ya sé, si una figura es no convexa… porque eso es por definición de figura convexa… si vos tenés una figura convexa, cualquier dos puntos que tomes de la figura trazás la cuerda, digamos, y tiene que quedar dentro de la figura… si tenés una figura no convexa te puede pasar que tomes algunos dos puntos y al hacer la cuerda te van a quedar afuera de la figura, o sea, la definición de figura no convexa
Y Totalmente de acuerdo ¿cómo relacionás lo de convexa y no convexa con la concavidad de la función?
E Tenés que llegar a demostrar que cuando tenés una cuerda… un intervalo de c+… y tomás el área de abajo… o sea, acá tomás dos perpendiculares al eje y el eje y la curva… tenés que demostrar que esto te da una figura no convexa y a partir de ahí podés demostrar esto
Y Bien, entonces tengo dos preguntitas para hacerte acerca de esa dem que leímos ¿depende la prueba anterior de la figura que elegimos como ejemplo genérico de función de c+? ¿Se entiende lo que pregunto?

E Sí, sí… si depende de este dibujo que siempre se cumpla lo mismo

Y Porque viste que cuando hago una prueba visual tengo que tomar un ejemplo…

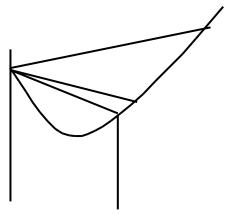
E No tenés que tomar casos particulares… por eso, se podría demostrar que si tomás las dos perpendiculares al eje y la curva te da una figura no convexa, entonces…

Y Escuchame ¿si vos tomaras otra función de c+ ibas a poder repetir la dem de forma análoga?

E Claro… aunque no porque si tomas ésta… ah, no porque acá ya no tiene…

Y A ver, dibujate una función cualquiera de c+, que no tenga por qué ser igual a esa…

E dibuja



E Ya no puede bajar…

Y ¿Entonces?

E Entonces sí, tome lo que tome siempre me va a quedar el área por defecto, aunque una éste con éste o éste con éste (se refiere a los vértices de los distintos trapecios) siempre el área por debajo va a ser menor o igual que el área que tengo acá

Y Bárbaro ¿qué sucede si en vez de considerar un solo intervalo –porque viste que acá usamos el MT con un solo intervalo- qué sucede si considerás muchos intervalos?

E Ah, si considerás varios intervalos cada vez te acercas más al área o sea cada vez tenés menos exceso de área

Y Pero ¿siempre es por exceso?

E Claro, porque si vas tomando cachitos, cachitos, cachitos como que te vas tomando siempre lo mismo… o sea, hacés un trapecio hasta acá, hacés un trapecio hasta acá que es casi la curva, te tomás otro pero siempre es por exceso…

Y Bárbaro

Quinta parte

Y Acá tenemos otro teo, nada más que en vez de tomar el MT tomás el MR_: para funciones de c+ el MR_ ofrece una aprox por defecto del área bajo la gráfica ¿Se entiende lo que dice el enunciado?

E Sí, sí

Y Contame qué tenés en el diagrama, primero

E ¿Qué tengo acá? Acá tengo que el área por debajo de la curva de una función con c+ es mayor o igual que el área por debajo de la curva… acá (señala la tercera figura del diagrama) esto sí es el rectángulo por el punto medio pero esto (señala la segunda figura del diagrama) es otra cosa, esto es algo así como que se construye un rectángulo por el punto medio y después se toma una distancia para acá y una para acá (se refiere a la distancia entre los lados del trapecio y el rectángulo que aparecen en la figura) y se hace otro trapecio diferente

Y Claro como es una dem visual dependemos de la interpretación porque no tenemos texto que nos diga cómo la tomamos

E Claro, acá lo que hacen es trazar la tg

Y Ah ¿es la tg esa recta?

E Toman la tg entonces este cachito que falta para completar el rectángulo lo ponen acá y acá te están diciendo que esto es igual porque están sacando y lo están poniendo acá… o sea, esto (se refiere a la figura naranja) es el área por debajo, esto es mayor o igual que el MR_ porque acá estás viendo que éste punto es el punto medio de estas dos ¿no? Pero ¿es el punto medio de la altura o es el punto medio de la…?

Y Es el punto medio de la base

E Éste es el punto medio de la base entonces, acá entonces... ¿vos sabés que no parece que fuera el punto medio? Puede ser que sea problema de vista

Y Puede ser

E Entonces hacés la tg en ese punto, en este punto medio, y quedan dos triangulitos, entonces. Éstos están representando, no sé con qué fin, que si se saca este triangulito que pertenece al rectángulo y se lo pone acá, es lo mismo porque son... son... esta distancia es la misma que acá y supuestamente es lo mismo

Y ¿Estás mirando por qué estos dos triángulos son iguales?

E Sí, es porque esta distancia es igual que ésta porque es punto medio

Y Bien, los lados horizontales son iguales

E Después, este ángulo es el mismo porque es recto... y habría que demostrar que esto es igual a esto (se refiere a los catetos de los triángulos)

Y No es la única forma ¿no?

E O sino habría que ver que estos ángulos son iguales

Y ¿Y eso?

E Éstos son opuestos por el vértice, entonces por criterio de congruencia de triángulos...

Y Vos ahí me justificaste perfectamente que el área verde es igual al área azul, ahora ¿por qué el área naranja es mayor que el área azul?

E Ta, esto es lo mismo porque... acá hay una figura no convexa y si hay una manera de justificar que... si se puede decir que si uno traza la tg en un punto a una curva con c+ la tg va a quedar por debajo...

Y Esa es tu definición

E Sí, si es cierta esa definición... quiere decir que... Quedamos en que si es cierta esa definición entonces acá esto es una figura no convexa... pero ésta sí es una figura convexa... La idea es que como esto (se refiere a la curva) queda por encima te estás tomando un pedazo más chico de área que el total de la figura... O sea que si hacés así y vos tomás la tg te estás tomando un pedazo para abajo entonces te estás tomando un pedazo más chico

Y De acuerdo, como la tg queda debajo de la curva cuando tomás el trapecio te estás tomando menos área que la que queda debajo de la curva. Perfecto.

Y ¿Te acordás que aquel (se refiere al teo 1) era válido para toda función? Repito la pregunta para éste ¿es válido para cualquier función que yo tome, para toda función de c+?

E Sí

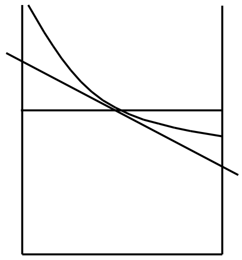
Y Porque acá tengo un problemita que es el siguiente: mi punto medio está muy cercano de ¿qué punto?

E Claro, el punto medio está muy cercano del punto de cambio de... ¿cómo se llama esto cuando baja y sube? Es un... un mínimo. Pero el punto medio no es el mínimo siempre... Es verdad siempre que tomes un trapecio pero no es verdad para un rectángulo porque acá te quedaría así...

Y Pero la dem, a ver si no es válida

E Sí la dem sí... tú usás... acá tenés un mínimo pero acá no, hacés la tg para que quede punto medio, sería más o menos por acá...

E dibuja

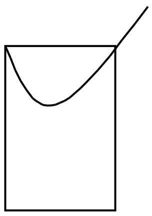


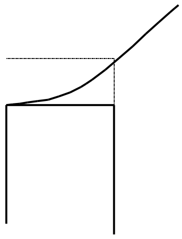
Y ¿Cuál sería? Rayá lo que sería el área naranja
E El área naranja es ésta (raya la zona por debajo de la curva)
Y Y con otro tipo de rayas marcá...
E También es claro que esto es más chico que el área naranja... porque sabemos que con el área azul podemos formar un rectángulo verde y eso lo hacés tomando este triangulito que se mete acá, que este triángulo de acá es igual al de acá porque tiene un ángulo recto, porque es opuesto por el vértice, porque este pedazo es el mismo que ese por el tema ese de que es punto medio, entonces es válido de todos modos
Y De acuerdo

Sexta parte

Y Antes del último teo un par de preguntas: para funciones de c+ ya vimos que el MT aproxima por exceso y el MR_ aproxima por defecto, sin embargo no dijimos nada del MR1 ni del MR2 ¿qué tipo de aprox ofrecen? Dijimos que el MT para funciones de c+ es por exceso, el MR_ por defecto pero estos dos no dijimos nada ¿qué podríamos decir de estos dos métodos para funciones de c+?

E dibuja





E Depende de qué intervalo te tomás, depende de cómo sea la concavidad. Porque no podés afirmar nada
Y O sea a veces te da ¿qué cosas?
E A veces te da por exceso y a veces te da por defecto
Y ¿Y con el MR2?
E Lo mismo, acá con el mismo dibujo te da por defecto y acá por exceso

Y ¿En qué puntos de las pruebas anteriores usaste fuertemente que la concavidad de las funciones era positiva?
E Acá (se refiere a la segunda prueba), para demostrar que esto siempre va a ser menor que esto
Y O sea, la azul es menor que la naranja ¿por qué?
E Porque la c+ y la tg hace que quede por debajo de la curva
Y Bárbaro ¿y en aquella (se refiere a la prueba del primer teo)?
E En aquella no lo supe resolver bien, sé que es por el tema de figura no convexa pero... Tenés que demostrar que... Es visual, como que estos tres segmentos (se refiere a los segmentos incluidos en x=a, x=b e y=0) y esta curva te crean una figura no convexa... que lo podés hacer tomando este punto y este punto y ver que la cuerda queda por afuera

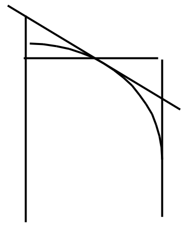
Y Bárbaro ¿qué podrías decir de las aproximaciones que ofrece el MT y el MR_ cuando las funciones no tienen c+?
E Podés hacer lo mismo cuando tienen c-, podés plantearte el mismo caso con c-,

siempre te va a dar... con c- si tomás la primera y la segunda ordenada siempre te va a dar por defecto, siempre

Y ¿Qué método es el que te da por defecto?

E Acá este método es el MT, así que si son de c+ el MT te daba por exceso, con c- el MT te da por defecto y lo mismo con el MR_... Voy a tomar una con c-, (comienza a dibujar) se toma el punto medio, tomo el rectángulo... esto con el tema de que es la tg es... Empiezo de nuevo: esto es una función con c-, esto más o menos es el punto medio, si trazamos la tg, por el tema de la definición de c-, te va a quedar por debajo entonces sabemos que el área de este trapecio va a ser por exceso y después si tomamos este rectángulo de acá podemos demostrar que esto es igual a esto por el tema de los triángulos que son iguales

E dibuja



Y Para funciones de c- el MR_ ¿qué te da?

E Éste, acá para c+ daba por defecto y para c- da por exceso

Y Bárbaro, eso es entonces para funciones de c- y ¿son las únicas funciones que hay que no tienen c+ las de c-?

E No, están las... la recta... es como ridículo tomar... como que lo más normal es tomar el MR... es que es tan fácil tomar el área debajo de la gráfica según la figura que forma que es como ridículo...

Y De acuerdo porque el MT en este caso más que aproximar ¿qué hace?

E Está calculando el área

Y ¿Y el MR_?

E Hay punto medio... pero si es una recta así constante el MT es el MR porque el rectángulo era un caso particular de trapecio

Y ¿Y si no es una recta horizontal, si es oblicua y tomás el MR_?

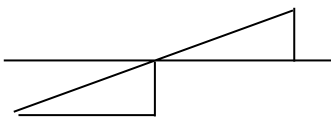
E ¿Recta oblicua es esto?

Y No, recta pero con pendiente...

E Es el MT lo que te estás tomando...

Y Claro pero imaginate que querés tomar el MR_

E dibuja



E La congruencia de este triángulo de acá con este de acá

Y ¿Qué te asegura la congruencia?

E Que es lo mismo tomar el MT que el MR

Y Bien

Séptima parte

Y Volvemos a las funciones positivas de c+, lo que sabemos es que el MT aproxima por exceso y el MR_ por defecto, lo que nos dice este teo es que para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aprox del área bajo la gráfica menos ajustada que la que ofrece el MR ¿qué quiere decir eso?

E Claro, que si tomás el MT... el exceso es más grande que si tomáramos, que si dividiéramos el intervalo en dos, en el punto medio y tomáramos el trapecio

Y O sea que...

E Acá el error es mayor que si agarráramos...

Y Ta, ta, ta, no mires la dem, primero el enunciado

E Dice que para funciones positivas de c+ el MT ofrece una aprox del área de la gráfica menos ajustada... o sea que el exceso es mayor que la que ofrece... ah, ta, ta... si vos tomás el MR_ éste va a tener un error por defecto pero el error va a ser más pequeño que el error de ésta

Y Perfecto, eso es lo que vamos a demostrar que el error del MT es más grande que el error del...

E Que el error del MR

Y Hay muchos dibujitos para llegar de una a la otra, vamos a empezar: dice que el error del MT es lo que está pintado de verde

E Es cierto y esto es mayor o igual que...

Y ¿Por qué era?

E ¿Por qué esto es el error? Porque cuando tomamos el MT pintamos todo y el área debajo de la gráfica es esto, entonces todo menos el área de debajo de la gráfica es el área pintada de verde

Y Bárbaro y dice que la pintada de verde es mayor...

E Es mayor que si hacemos... Esta cuerda la dejamos igual, tomamos el punto medio de la curva y hacemos entre la primera ordenada y el punto medio, entre el punto medio y la segunda ordenada... y eso es verdad porque como vamos con c+... tenemos que la cuerda, la cuerda va a quedar por afuera... Y acá lo mismo, así que acá queda un cachito sin pintar, o sea que esto es mayor o igual que esto

Y Verde es mayor o igual que naranja... Ahora la naranja y la celeste son iguales ¿viste? Pero aparecen unas rectas nuevas que hay que identificar ¿qué son esas rectas?

E Las paralelas, ésta es la tg

Y La tg en el punto medio

E Ésta es la paralela a la tg por un punto de la primera ordenada y ésta es la paralela a la tg por la segunda ordenada

Y Bárbaro, ahora que las rectas ya están identificadas lo que queremos ver es que lo celeste es igualito a lo gris

E Esto y esto no cambian... o sea que en este pedazo hay como un juego de triángulos pero como éstas son paralelas tenemos que... como son paralelas estas dos... como son paralelas, estos segmentos son iguales, como esta distancia es igual a ésta eso es el punto medio de esto... (breve interrupción de la grabación)... Estábamos en que...

Y Estábamos en que la gris era igual a la celeste y para eso teníamos que ver que...

E Acá la idea fue tomar estas tres paralelas, tenemos que este cacho lo dejamos igual, tenemos que ver que este triángulo es igual a éste

Y Ahí está...

E Entonces como esta distancia es igual a ésta, éste es el punto medio de ésta porque estas dos son paralelas, entonces tenemos que esto es igual a esto, que esto también es la mitad de esto y tenemos que el ángulo éste es igual a éste porque son opuestos por el vértice... Entonces ya tenés que este triángulo es igual a éste

Y Bárbaro esto te justifica que celeste y gris son iguales... Gris y rojo dice que son iguales también

E Gris y rojo... habría que demostrar que este triángulo es igual a éste... hay un lado que es igual porque es común, después este lado es igual porque son paralelas

Y Paralelas entre paralelas

E Entonces éste es igual con éste, éste es igual con éste y también éste es igual con éste porque (frase imposible de transcribir), como los tres lados son iguales se puede demostrar fácilmente que este triángulo es igual que éste... y éste igual (se refiere al otro triángulo en que está dividida la zona roja)

Y Bárbaro, rojo igual a gris y ahora nos dicen que rojo es más grande que amarillo...

E Lo rojo es más grande que lo amarillo porque acá tenemos lo que ya habíamos demostrado, la aprox del MT para una función de c+ aproxima por exceso, eso ya lo tenemos demostrado. Este pedazo es igual a éste así que ni te preocupás, sería demostrar que esto es por exceso a esto, entonces restás este pedazo

Y O sea que el rojito es como el MT del amarillo

E Claro el rojito es el MT del amarillo y esto ya está demostrado que es por exceso, que es más grande y a los dos les restás el mismo pedazo

Y Bárbaro y ahora dice que el amarillo es el error del MR

E Es verdad porque como... esto de entrada lo definimos como tg, o sea que si somos consecuentes con eso tenemos la tg y ya tenemos demostrado que éste es igual a éste (se refiere a las zonas verde y celeste del diagrama de la prueba del teo 2)

Y Que el verde es igual al celeste

E Igual lo podríamos hacer acá, podríamos demostrar que este triángulo es igual a éste

Y De acuerdo, bárbaro. Conclusión entonces, de todos esos pequeños pasitos ¿a qué llegamos entonces?

E Como conclusión tenemos que... tomamos la aprox ofrecida por el MT, tomamos una figura conveniente que nos dice que es menor, vamos a que esto es igual, a que esto es igual, a que esto es igual y de última decimos que hay otra cosa que sigue siendo mayor... si esto es mayor que esto y esto es mayor que esto entonces esto es mayor que esto

Y O sea que la verde es...

E La verde es más grande que la amarilla y la amarilla es la ofrecida por el MR

Y Por lo cual el error del MR es mayor que...

E Es mayor que el del MT

Y O sea que es menos ajustada... ¿De acuerdo? Bárbaro...