ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 34.2 (2016): 87-105
Investigaciones didácticas
http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1859
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

Estructura cognitiva y fenomenología: el caso de la sucesión convergente

Cognitive structure and phenomenology: the case of the convergent sequence

Javier Claros Mellado
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid
fclaros@ucm.es

Moisés Coriat Benarroch
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada
mcoriat@ugr.es

Teresa Sánchez Compaña
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Málaga
teresasanchez@uma.es

RESUMEN • Esta investigación describe conexiones o nexos entre algunas «celdas» de la estructura cognitiva (Vinner, 1991) y los fenómenos, en el sentido de Freudenthal (1983), organizados por una definición de límite finito de una sucesión, así como los fenómenos organizados por una sucesión de Cauchy (Claros, 2010). Estas conexiones surgieron cuando afrontamos el objetivo de proponer secuencias didácticas destinadas a abordar en el aula el límite finito de una sucesión y las sucesiones de Cauchy. Estas secuencias didácticas apelan al uso de los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación descritos por Claros (2010) y los sitúan como elementos indispensables en la construcción de un concepto imagen de una sucesión convergente o de una imagen de la demostración (Kidron y Dreyfuss, 2014). Estas dos «celdas» de la estructura cognitiva ayudan en la elaboración del concepto definición de una sucesión con límite.

PALABRAS CLAVE: límite; sucesión de Cauchy; imagen de la demostración; concepto definición; fenómenos.

ABSTRACT • This research describes how two «cells» of the cognitive structure (Vinner, 1991) connect to the phenomena, in Freudenthal's (1983) sense, organized by a definition of finite limit of a sequence and the phenomena organized by a Cauchy sequence (Claros, 2010). These connections arose when we faced, as a target, to the introduction of didactic sequences or lesson plans to teach the finite limit of a sequence and Cauchy sequences. These didactic sequences appeal to the use of intuitive approach and feedback phenomena described by Claros (2010) and focuses them as essential elements in building a concept image of a convergent sequence or an image proof of it (Kidron and Dreyfuss, 2014). These two «cells» of the cognitive structure help in developing the concept definition of a sequence with limit.

KEYWORDS: limit; Cauchy´s sequence; image proof; concept definition; phenomena.

Recepción: julio 2015 • Aceptación: enero 2016 • Publicación: junio 2016

INTRODUCCIÓN

Antes del análisis no estándar (Robinson, 1966), la idea de límite tuvo que depurarse de cualquier noción de magnitud evanescente o infinitésimo. Los orígenes del límite los encontramos en la antigua Grecia, cuando Eudoxo emplea el método de exhaución, hoy conocido como *lema de Arquímedes*, para calcular el área de figuras planas (Boyer, 1999). Este lema afirma que, dada una razón entre dos magnitudes, se puede encontrar un múltiplo de cualquiera de ellas que exceda a la otra. La propiedad permite excluir el uso de infinitésimos; mantenemos aquí esa exclusión, sin discutir las bondades de los *smooth worlds* (Bell, 1998).

La definición de *límite* que hoy manejamos se desarrolló a comienzos del siglo XIX. A ella contribuyeron autores de la talla de Newton, Euler y Cauchy, pero fueron Weierstrass y Heine los que consiguieron enunciarla como fruto de la formalización en la que se vio inmersa la matemática. Tal definición de *límite* se refería a funciones, pero posteriormente fue enunciada para sucesiones. En este documento abordaremos el estudio del límite finito de una sucesión y las sucesiones de Cauchy (véanse las definiciones usadas en el apartado 1.2). En ambos casos describiremos elementos que intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

En el caso del límite finito de una sucesión, estableceremos relaciones y precedencia entre el concepto imagen, el concepto definición (pensamiento matemático avanzado: Tall, 1981) y el de imagen de la demostración (Dreyfus y Kidron, 2014) y, o bien los fenómenos de aproximación simple intuitiva y retroalimentación (fenómenos a.s.i. e i.v.s.) descritos por Claros (2010), partiendo de la fenomenología de Freudenthal (1983), o bien los fenómenos correspondientes en las sucesiones de Cauchy, que han sido estudiados y descritos por Claros (2010). Las sucesiones de Cauchy son relevantes por la conocida equivalencia matemática entre estas y las sucesiones con límite finito. Su enseñanza y aprendizaje, como otra manera de abordar el límite de una sucesión, se justifican cuando se carece de un candidato a límite.

En ambos tipos de sucesión convergente ponemos de manifiesto la dificultad que supone abordar la demostración: es necesario construir una función épsilon-N, que exige cierta destreza matemática, más propia del último año de bachillerato o primer año de universidad.

El trabajo que aquí presentamos se desarrolla en cuatro apartados más. El primero de ellos, denominado «Antecedentes», ilustra las dificultades de alumnos y profesores cuando afrontan el límite de una sucesión convergente, y esto se pone de manifiesto después de revisar trabajos previos, que consideramos relevantes, procedentes de Francia, Estados Unidos, México y España. Asimismo, presentamos de manera resumida el marco teórico de nuestra investigación sobre el límite.

El segundo apartado, titulado «Enseñanza y demostración del límite finito de una sucesión», está dedicado a la enseñanza de una definición de límite finito en el bachillerato y en la universidad y a la demostración que exige esta definición: el uso de los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación ayuda a superar las dificultades en la enseñanza del límite finito de una sucesión. Además, estableceremos conceptos imágenes adecuados del límite. Al final del apartado daremos un paso más en la comprobación de que una determinada sucesión tiene límite y proporcionaremos imágenes de la demostración, así como la justificación formal de esta.

El tercer apartado, denominado «Guiones de secuencias didácticas en torno al límite», incluye dos secuencias didácticas para la enseñanza de este último. En los cuadros correspondientes a cada una de las secuencias didácticas y en su explicación, se observa mejor la conexión mencionada entre ciertas celdas de nuestra estructura cognitiva (concepto imagen, imagen de la demostración y concepto definición) y los fenómenos organizados por cada una de las definiciones seleccionadas.

El cuarto y último apartado, «Conclusiones y perspectivas», analiza logros alcanzados a lo largo del documento. Estos logros se refieren a la conexión entre dos campos que hasta ahora se venían considerando por separado: la fenomenología y el pensamiento matemático avanzado. Asimismo, se detalla la función de cada uno de los elementos que entran en juego en la construcción del concepto imagen y el concepto definición para el límite finito de una sucesión y para la sucesión de Cauchy. La imagen de la demostración juega un papel mediador en el acceso al concepto definición de límite de una sucesión convergente *dada*, pero no estamos en condiciones de generalizar *toda* sucesión convergente.

Al anotar futuras líneas de actuación, orientadas a examinar con mayor detenimiento las conexiones halladas y materializarlas en actividades de aula concretas, señalamos la posibilidad de establecer nuevas relaciones entre la imagen de la demostración y los conceptos de imagen y definición. Estas nuevas relaciones tienen que quedar materializadas en actividades concretas que puedan ser llevadas al aula y en las que se trabaje la imagen de la demostración, tanto en el límite finito de una sucesión como en las sucesiones de Cauchy.

ANTECEDENTES

Dificultades en torno a la enseñanza-aprendizaje del límite

Clasificamos los trabajos en torno a la enseñanza y el aprendizaje del límite en dos grupos:

a) Investigaciones sobre dificultades observadas en *alumnos* cuando tienen que aprender el concepto de límite (véanse Sierpinska, 1985, 1987, 1994; Robert, 1982; Cornu, 1991; Earles, 1995; Garbin y Azcárate, 2001; Burn, 2005; Przenioslo, 2005; Fernández-Plaza, Ruiz Hidalgo y Rico, 2015).

b) Investigaciones con *profesores*, que pretenden detectar los elementos clave en la enseñanza del límite y mejorar su enseñanza-aprendizaje analizando o bien la labor docente (Espinoza y Azcárate, 2000; Hitt, 2003; Penalva, 2001), o bien secuencias didácticas (Mamona-Downs, 2001).

Dentro de cada grupo, las investigaciones se suelen centrar, obviamente, en algún aspecto particular del límite. Así, Garbin y Azcárate (2001) señalan dificultades de los alumnos para manejar el concepto de infinito potencial, mientras que Earles apunta a la dificultad de manejar el conjunto de los números reales, que es considerado un requisito para la comprensión del límite. La dificultad en este último caso tiene que ver con la necesidad de dominar el concepto de infinito. Fernández Plaza, Ruiz Hidalgo y Rico (2015) se centran en describir las concepciones de los estudiantes cuando aplican su definición individual en una tarea de gráficas sobre el límite finito de una función en un punto. En dicha descripción se analiza la coherencia entre la definición individual y los argumentos aportados sobre la existencia del límite a partir de las gráficas. Otros autores como Burn (2005) consideran el límite como un requisito para comprender el número real. De hecho, cita a Cauchy para afirmar que este autor formuló argumentos rigurosos sobre el concepto de límite antes de que se demostrara la completitud de IR. A continuación, Burn propone una nueva definición de límite finito de una sucesión: «Una sucesión (A_n) se dice que tiene límite L, si y solo si existe una secuencia nula de términos (a_n) tal que $-a_n < A_n - L < a_n$, para todo entero positivo n» (traducción al español, p. 287).

La definición anterior de Burn (2005: 287) ha sido criticada por Bergé (2006), alegando que Burn no habría tenido en cuenta los trabajos de Davis y Vinner (1986), Sierpinska (1990) y Mamona-Downs (2001), quienes, además de señalar las dificultades de los alumnos en torno al límite, proponen categorías para describir la comprensión de este (en particular, así lo hace Sierpinska). Berge critica sobre todo el hecho de que Burn señale que el punto principal para superar las dificultades de los alumnos en el aprendizaje de las sucesiones numéricas sea trabajar inicialmente con sucesiones que convergen a cero. A pesar de estas discrepancias, Berge (2006) está de acuerdo con Burn en que el límite es un prerrequisito para comprender el número real. La autora señala que la completitud del conjunto de los números reales requiere conocimientos sobre convergencia de sucesiones numéricas.

Abordaremos ambos campos de investigación: por un lado, diseñaremos actividades orientadas a superar dificultades que tiene la enseñanza-aprendizaje del límite, y por otro lado, usaremos dichas actividades para el diseño de una secuencia didáctica, destinada a profesores de bachillerato y universidad cuando tienen que enseñar el límite finito de una sucesión. Tendremos en cuenta el trabajo de Przenioslo (2005), quien sugiere presentar una amplia gama de ejemplos que favorezca el desarrollo de conceptos imágenes, a partir de los cuales los alumnos construyan y desarrollen, además de la definición, situaciones apropiadas en las que se empleen los límites.

Hasta ahora los trabajos revisados señalaban la dificultad de la definición formal asociada al sistema de representación simbólico (véase, por ejemplo, Claros, 2010). De hecho, esta parece haber desaparecido prácticamente de los libros de texto de educación secundaria en países como España o Reino Unido. Una manera de construir adecuadamente el límite podría ser la de partir de una aproximación intuitiva y, a continuación, afrontar la parte formal de la definición de *límite*; así hicimos en Claros (2010), usando, separadamente, el pensamiento matemático avanzado y la fenomenología de Freudenthal. Daremos un paso adelante en la construcción del límite finito de una sucesión usando los trabajos de Kidron y Dreyfus (2014), los cuales añaden y discuten el término *image proof* y lo integran en la bien conocida teoría del pensamiento matemático avanzado (traducimos *image proof* como 'imagen de la demostración'). En nuestra opinión, un alumno o profesor diremos que tiene una imagen de la demostración sobre una afirmación cuando está convencido de que dicha afirmación es verdadera y además tiene elementos matemáticos sobre cómo abordar la demostración de dicha afirmación aunque aún no lo haya hecho concretamente. Este término, así como los de concepto imagen y concepto definición, los consideramos elementos claves en la construcción del límite finito de una sucesión, aunque su grado de generalidad sea diferente. Para la construcción de la demostración de que una determinada sucesión tiene límite, tendremos en cuenta los trabajos de Weber y Alcock (2009), los cuales señalan que en la construcción de la demostración pueden aparecer dos problemas: (1) un ejemplo o imagen puede incorporar propiedades que no son universalmente verdaderas y por lo tanto guiar al investigador a probar algo que es falso; (2) un individuo puede ser capaz de desarrollar una correcta comprensión matemática de por qué una proposición es verdadera pero ser incapaz de demostrarla en un sistema de demostración formal.

Marco teórico

La necesidad de establecer un marco teórico para estudiar el límite finito de una sucesión fue discutida por Claros (2010). Se mencionaron tres pilares en los que se apoya nuestro estudio del límite finito de una sucesión: fenomenología, pensamiento matemático avanzado y sistemas de representación. La relación entre cada uno de los elementos queda reflejada en la figura 1.

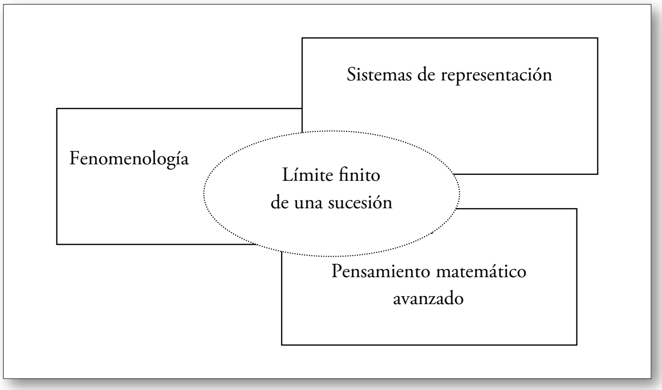


Fig. 1. Marco teórico (esquema).

Fenomenología se usa sin excepción en el sentido de Freudenthal (1983), los sistemas de representación se usan en el sentido de Janvier (1987) y Blázquez y Ortega (2001) y el pensamiento matemático avanzado se emplea siguiendo las ideas de Tall y Vinner (1981) y Vinner (1991). Estos tres elementos se aplicaron en el análisis de una definición de límite finito de una sucesión[1] y en la definición de sucesión de Cauchy,[2] lo que permitió determinar que cada definición organiza dos fenómenos.

Fenómenos: su función en las definiciones

Una definición de *límite finito* de una sucesión organiza dos fenómenos: fenómeno de aproximación simple intuitiva (a.s.i.) y fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s.) (Claros, Sánchez y Coriat, 2013). Expondremos la función de estos fenómenos.

El fenómeno a.s.i. se observa cuando los términos de la sucesión parecen acercarse a un determinado valor que será propuesto como un candidato a límite; la verificación de dicho candidato se remite al segundo fenómeno (i.v.s.), con cuya ayuda establecemos fehacientemente si el candidato seleccionado es (o no) el límite de la sucesión con la que estamos trabajando. La verificación del fenómeno i.v.s. exigirá la construcción de una función ε-*N*. Estos fenómenos a.s.i. e i.v.s. recuerdan en gran medida la distinción realizada por Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006) entre aproximación y tendencia. La aproximación parece estar relacionada con el fenómeno a.s.i., aunque hay que señalar que este último ajusta más el valor al que se acercan los términos de la sucesión. Por otro lado, la idea de *tendencia* remite directamente al fenómeno i.v.s., que permite demostrar que el candidato seleccionado como límite es el verdadero límite de la sucesión.

La definición de sucesión de Cauchy organiza otros dos fenómenos. Al primero convenimos en llamarlo *fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy* (a.s.i.C) y al segundo *fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de Cauchy* (i.v.s.C). El fenómeno a.s.i.C se manifiesta cuando las diferencias entre los valores a_m y a_n de la sucesión parecen reducirse a medida que m y n son cada vez más grandes. Este fenómeno, de naturaleza intuitiva, da la primera pista para saber si una sucesión determinada sería de Cauchy. El fenómeno i.v.s.C se manifiesta al intentar asegurar que una determinada sucesión recibirá el apelativo *de Cauchy*. La verificación de este fenómeno, de naturaleza más formal, exige la construcción de una función natural de variable real. La descripción detallada de cada uno de los fenómenos enunciados puede verse en Claros (2010) y en Claros, Sánchez y Coriat (2013).

Concepto imagen. Concepto definición y fenómenos

Asociado a un concepto matemático, Tall y Vinner (1981) introdujeron los términos concepto imagen y concepto definición, que Vinner (1991) considera como «dos diferentes celdas en nuestra estructura cognitiva».

El concepto definición queda especificado como un conjunto de palabras usadas para describir la idea matemática subyacente. Enunciado por el profesor y trabajado por el alumno, tiene un camino personal hasta la asimilación por parte de este último. En este camino, un concepto definición personal puede diferir de un concepto definición formal, y es el último el que es aceptado por la comunidad matemática.

1. Definición: Sea xn una sucesión en R, decimos que xn converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos $\lim x_n = x$) si para cada $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que si $n \geq N$ se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$ (Spivak, 1991: 615. Notación adaptada).
2. Definición: Una sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión de Cauchy si para $\varepsilon > 0$ existe un número natural N tal que, para todo m y n, si $m,n > N$, entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$ (esta condición se escribe generalmente $\lim_{m,n \to \infty} |a_n - a_m| = 0$) (Spivak, 1991: 624. Notación adaptada).

Cada concepto definición personal estaría asociado con algún concepto imagen, o más de uno.

Vinner (1991) señala que el concepto imagen es algo no verbal asociado al nombre de un concepto. Puede ser una representación visual de un concepto o una colección de impresiones o experiencias. El término concepto imagen evocado es introducido para describir el contenido de la memoria evocado en un contexto dado. No lo usaremos en el presente trabajo.

Para establecer una conexión entre concepto imagen, concepto definición y fenómenos, empezamos delimitando los ámbitos que estos determinan: ámbito intuitivo y ámbito formal. Aquí, el orden en los ámbitos es esencial, como hemos visto al mencionar las funciones de los fenómenos.

En el primero, conviene elegir un sistema de representación y, con su ayuda, observaremos que los términos de la sucesión parecen acercarse a un determinado valor (fenómeno a.s.i.), el cual se convertirá en un primer candidato a límite de la sucesión. Se trata de un concepto imagen basado en una convicción personal sobre el límite. Si nos detuviésemos, estaríamos expuestos a afrontar dificultades como las que hemos reseñado en 1.1 o mencionaremos en el próximo apartado.

En el segundo ámbito, apelamos al fenómeno i.v.s.

En un primer momento, construimos algunos valores de la función de IR en IN (para valores concretos de épsilon) y comprobamos que «la vuelta» satisface en cada caso lo exigido por la definición. Esto no es aún una demostración matemática, pero (1) aumenta nuestra confianza en el candidato a límite y, por lo tanto, en el concepto imagen que hemos elaborado; (2) la pequeña colección de valores de épsilon elegidos genera una imagen de la demostración (no necesariamente como figura dibujada, sino como acúmulo de experiencias particulares).

En un segundo momento, si tenemos la formación matemática suficiente, generalizamos y construimos una función de IR en IN, demostrando así que el candidato a límite lo es indiscutiblemente, acercándonos al concepto definición formal del límite finito de una sucesión a través de la sucesión concreta que hemos estudiado.

El concepto definición de límite finito de una sucesión engloba por lo tanto varios elementos de cada sucesión: (1) la definición de límite propiamente dicha, que incluye los fenómenos a.s.i. e i.v.s.: el primero aporta un concepto imagen y, con el segundo, lo ponemos a prueba; (2) esta puesta a prueba consiste en construir varios valores de una función de IR en IN que constituyen una imagen de la demostración (Kidron y Dreyfus, 2014);[3] (3) la demostración para la sucesión estudiada: es necesario generalizar esta imagen de la demostración a todo valor permitido de épsilon.

En nuestro caso, la demostración de que una determinada sucesión tiene límite debe suscitar en los alumnos uno o varios conceptos imágenes, una imagen de la demostración (no exenta de dificultades) y una demostración. El concepto definición se alcanza cuando esto se ha realizado un cierto número de veces con sucesiones diferentes, número que depende de cada sujeto. Es más probable en los alumnos de universidad que cursan matemáticas que en los alumnos de bachillerato, ya que la demostración de afirmaciones, propiedades y teoremas no somos capaces de hallarla en los actuales currículos de la enseñanza secundaria.

En el apartado siguiente, mostramos actividades que arrojan luz sobre la construcción del límite finito de una sucesión, apoyados en la fenomenología de Freudenthal, el pensamiento matemático avanzado y los sistemas de representación. Usaremos varios ejemplos y varios sistemas de representación

3. Dichos autores introdujeron el término *proof image* (imagen de la demostración) y lo caracterizan de la siguiente manera: diremos que un individuo tiene una imagen de la demostración de una afirmación cuando reúne los siguientes dos componentes: la comprensión cognitiva de que una afirmación es verdadera y el sentimiento afectivo de certeza, consistente en la convicción intuitiva en el sentido de Fischbein (1994). El primero de ellos se caracteriza por ser personal, dinámico, incluye enlaces lógicos con los conceptos que se ponen en juego para demostrar la afirmación y, por último, la constitución de una entidad que permita, a través de una simple imagen, evocar la situación matemática que se está abordando. El segundo se basa en el sentido de comprensión debido a la entidad construida y está intrínsecamente conectado con la comprensión cognitiva.

para solventar las dificultades señaladas por Weber y Alcock (2009) y para obtener diferentes conceptos imágenes coherentes entre sí y que den lugar, en cada caso, a una imagen de la demostración.

Usaremos el método de Kidron y Vinner (2014), basado en el uso de ejemplos; en este caso, apelamos a ejemplos simples para ilustrar la aparición de cada uno de los elementos señalados anteriormente y relacionarlos con los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación. Estos ejemplos se expresarán por medio de diferentes sistemas de representación, aprovechando de esta manera las distintas visiones que aporta cada uno.

ENSEÑANZA Y DEMOSTRACIÓN DEL LÍMITE FINITO DE UNA SUCESIÓN

En este apartado presentamos ejemplos de cómo abordar el límite finito de una sucesión en el aula usando la secuencia indicada al final del apartado anterior. En cada uno de los ejemplos presentados sugerimos un orden adecuado para la aplicación de cada fenómeno y su posterior uso en la construcción del concepto definición, en el que juegan un papel importante el concepto imagen y la imagen de la demostración. Empezamos abordando el estudio de los fenómenos organizados por la definición de límite finito de una sucesión con la que hemos trabajado.

Ejemplos. Fenómenos a.s.i. e i.v.s. Pensamiento matemático avanzado

En este apartado trabajamos con varios ejemplos en los que detectaremos cómo aparecen los fenómenos de aproximación intuitiva y retroalimentación y cómo se pueden usar para enseñar y demostrar que una determinada sucesión tiene límite.

Ejemplo: $a_n = \dfrac{n+1}{n}$

En primer lugar, trabajaremos en diferentes sistemas de representación, el tabular o numérico (Blázquez y Ortega, 2001) y el gráfico. Para el primero de ellos construimos la tabla 1, extraída de una hoja de cálculo (tabla 1):

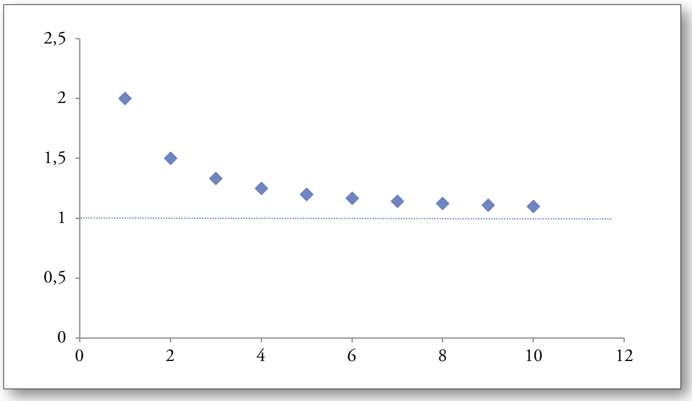
Tabla 1.
Fenómeno a.s.i. en el sistema de representación tabular

n	1	2	3	4	5	…	100	….	1000	…
$a_n = \dfrac{n+1}{n}$	2/1	3/2	4/3	5/4	6/5		101/100		1001/1000	...
a_n	2	1,5	1,333….	1,25	1,2	…	1,01	….	1,001	…

En la última fila de esta tabla es cómodo observar el fenómeno de aproximación intuitiva, expresado a través del hecho de que los términos de la sucesión se van acercando cada vez más a 1, a medida que n, en la primera fila, crece. Al sugerir que el límite de la sucesión es 1, generamos un concepto imagen. Sin embargo, existen otros modos de generar otro concepto imagen, sea compatible o no con el que ya tenemos. Esto lo expresamos a través del siguiente sistema de representación: el sistema de representación gráfico. Según Kidron y Tall (2014), la representación gráfica puede ayudar a mejorar el concepto imagen sobre el límite de una determinada sucesión, si este se ha obtenido a través del sistema de representación tabular, ya que puede dejar ciertas dudas sobre si se llegará a alcanzar el límite o no. Estos autores sostienen que la representación gráfica ayuda en el hecho de que los términos representados se van acercando cada vez más a un valor, en las sucesiones con límite, y que la diferencia entre estos y los valores de la sucesión representados se hacen inapreciables, produciéndose de esta manera un concepto imagen en el que el límite es alcanzado. El ejemplo abordado por Kidron y Tall (2014) hace referencia a una sucesión de funciones que tienen como límite una función, pero es perfectamente aplicable a una sucesión de números reales que tiene límite finito.

Ejemplo: $a_n = \frac{n+1}{n}$. Representamos esta sucesión, en primer lugar, dando unos cuantos valores «pequeños» a n: 1, 2, 3, 4, 5, 6…

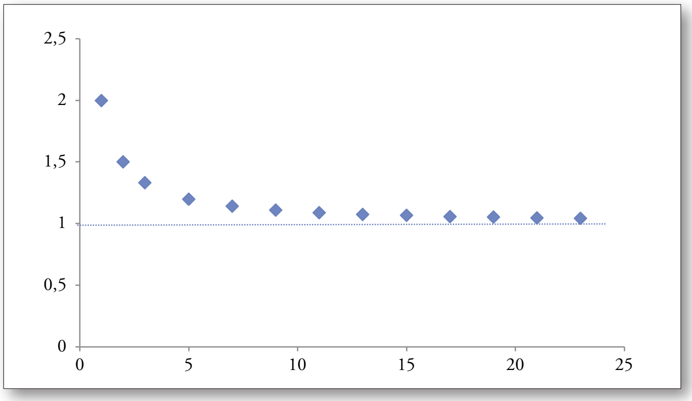
Gráfica 1.
Fenómeno a.s.i. en el sistema de representación gráfico



Si observamos la gráfica 1, extraída de una hoja de cálculo, parece que los valores de la sucesión se mantienen siempre a una cierta distancia del valor 1, y esto induciría a pensar que el límite podría no ser 1. Estas dificultades relativas a los ejemplos que se usan para introducir un concepto ya fueron señaladas por Weber y Alcock (2009). Por este motivo, presentamos el mismo ejemplo, pero usando más valores para n.

En este segundo caso, damos a n valores comprendidos entre 1 y 25. Para representar los resultados, hacemos uso de una hoja de cálculo.

Gráfica 2.
Fenómeno a.s.i. en el sistema de representación gráfico



A través de estas gráficas observamos cómo los términos de la sucesión se van acercando cada vez más a la recta y = 1, y con ello pensamos que el límite de esta sucesión es 1. En la gráfica 1, los términos se acercan a la recta sin tocarla, pero en el segundo caso parece que sí la tocan. En ambos casos observamos el fenómeno de aproximación simple intuitiva gráfico en el formato ejemplo que denotamos como a.s.i. g-e,[4] fenómeno descrito por Claros (2010), y en el segundo de ellos podemos observar, además de ese fenómeno, lo que señalan Kidron y Tall, ya que los términos de la sucesión se solapan entre sí e incluso parecen alcanzar el límite. Todo ello hace que este segundo sistema de representación genere otro concepto imagen, coherente con el anterior (ya que los valores de la sucesión se acercan a un valor finito determinado), pero que lo perfila aún más y que viene precedido por la observación del fenómeno a.s.i. g-e. Hay que señalar que el hecho de que se alcance o no el límite es una de las dificultades y obstáculos señalados por varios autores (Cornu, 1991; Sierpinska, 1987).[5]

La observación del fenómeno a.s.i. en diferentes sistemas de representación ayuda a generar conceptos imágenes correlacionados, ya que ambos señalan el mismo candidato a límite, con posibles dificultades relativas a la idea de que el límite se alcanza para algún valor de n. Hay que señalar que el candidato a límite será más o menos fácil de obtener dependiendo de la sucesión, y es importante asegurarse de que dicho candidato es el adecuado, ya que lo usaremos para los pasos posteriores.

El siguiente paso, una vez construido el concepto imagen, es construir la imagen de la demostración asociada, como paso previo a la demostración del límite de la sucesión presentada. Lo explicitamos a través del siguiente ejemplo: $a_n = \frac{n^2+n+1}{n^2}$.

En esta sucesión observamos que, al calcular un número finito de valores de dicha sucesión, los términos parecen acercarse a 1. Para ello recurrimos a los sistemas de representación tabular y gráfico, como hemos hecho en el ejemplo anterior. Esta comprobación puede hacerse cómodamente en una hoja de cálculo para varios miles de valores de n consecutivos.

Una vez obtenido el candidato a límite, tenemos que asegurarnos de que dicho candidato es el verdadero límite de la sucesión. Para ello recurrimos al fenómeno de ida-vuelta en sucesiones. Según la definición, para cada ε >0 que fijemos tenemos que determinar un N (ida), tal que si n > N se cumple que $|a_n-1| < \varepsilon$ (vuelta).

Tomemos por ejemplo ε = 1. Tenemos que calcular qué valor N hace que si n > N entonces $\left|\frac{n^2+n+1}{n^2}-1\right| < 1$. Si trabajamos en esta última expresión $\left|\frac{n^2+n+1}{n^2}-1\right| = \left|\frac{n+1}{n^2}\right|$, tendremos que ver cuándo es menor que 1. Usaremos las siguientes desigualdades:

$\left|\frac{n+1}{n^2}\right| \leq \left|\frac{n+n}{n^2}\right| = \left|\frac{2n}{n^2}\right| = \frac{2}{n}$. Ahora tenemos que ver cuándo se cumple $\frac{2}{n} < 1$. Esta expresión se cumple para n > 2.

Si ahora hacemos una lectura resumen de todo lo anterior, podemos observar que para ε = 1 hallamos un valor N (en nuestro caso 2), tal que si n > N entonces $\left|\frac{n^2+n+1}{n^2}-1\right| < 1$.

Esto que sucede para ε = 1 se puede también demostrar para $\varepsilon = \frac{1}{2}$. En este caso llegamos a la siguiente desigualdad: $\frac{2}{n} < \frac{1}{2}$, que se cumple para n > 4.

4. Estas siglas se refieren al fenómeno de aproximación simple intuitiva, ya que los términos parecen acercarse a un valor (a.s.i.). La letra *g* alude al sistema de representación gráfico y la letra *e* hace referencia a que el formato de presentación que se usa es un ejemplo.

5. La creencia de que el límite sea alcanzado o no depende de que los alumnos manejen el infinito actual; este concepto complejo no lo trabajamos en este documento y nos remitimos a una investigación posterior.

Parece, por lo tanto, que el fenómeno de ida-vuelta se cumple para cualquier valor de ε que fijemos. Es decir, «parece»[6] que se cumple lo siguiente:

Para cada ε > 0, existiría un número natural N tal que si n > N se cumple que $|a_n - 1| < \varepsilon$ [1].

Esta es nuestra imagen de la demostración. No es un dibujo propiamente dicho, sino una generalización basada en la convicción personal de que no hallaremos sorpresas en el caso general. Otro problema es que sepamos abordar esa generalización.

El siguiente paso es el de validar [1], es decir, generalizar nuestra imagen de la demostración a todo valor permitido de ε. Para realizar esta demostración, tendremos que probar que $\left|\frac{n^2+n+1}{n^2}-1\right| < \varepsilon$ para n > N. Es decir, $\left|\frac{n^2+n+1}{n^2}-1\right| = \frac{n+1}{n^2} < \varepsilon$ para n > N [2].

En dicha demostración hay que tener en cuenta tres asuntos que los alumnos deben manejar: desigualdades con valor absoluto, propiedad arquimediana y coherencia con los casos particulares previamente estudiados.

Los dos primeros forman parte de la imagen de la demostración que un sujeto tiene cuando se enfrenta a la expresión [2] y a los cuales recurre cuando tiene que realizar dicha demostración. A estos dos elementos debemos *añadir que el sujeto (alumno o profesor)* posee ya la firme convicción de que la sucesión con la que está trabajando tiene límite, ya que ha observado el fenómeno de aproximación intuitiva, así como el de retroalimentación en algunos casos. Por ello, partiendo de este último, pero para cualquier valor de épsilon, iniciamos una demostración.

Para ello operamos en [1] llegando, posiblemente, a lo siguiente:

$\left|\frac{n+1}{n^2}\right| < \left|\frac{n+n}{n^2}\right| = \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} = 2 \cdot \frac{1}{n} < 2 \cdot \varepsilon$ (este *último paso se justifica recurriendo a la propiedad* arquimediana). Si tomamos $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$, resulta que $\left|\frac{n+1}{n^2}\right| < \left|\frac{n+n}{n^2}\right| = \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \varepsilon'$ [3].

Con lo expuesto en [3] hemos demostrado que la sucesión $a_n = \frac{n^2+n+1}{n^2}$ tiene límite 1.

Este es un caso particular de *demostración que explica*,[7] ya que se usan propiedades en las que se detallan los pasos que se dan y en cada uno de ellos se explica lo que se hace. Además, permite mostrar otros elementos matemáticos como son el uso de desigualdades y el valor absoluto.

Una vez realizada la demostración, en la que ha tenido importancia la imagen de la demostración, nos habremos acercado un poco más al concepto definición de límite finito de una sucesión.

El tercer asunto al que el alumno deberá hacer frente procede de su curiosidad, ya que no es probable que obtenga los mismos valores de N trabajando con valores particulares de épsilon que trabajando con el caso general y particularizando a esos mismos valores de épsilon a continuación.

Los pasos principales que llevan a la demostración de que la sucesión con la que estamos trabajando tiene límite 1 son, por lo tanto, los siguientes:

6. El término *parece* es usado de manera intencional, ya que no tenemos seguridad: lo hemos comprobado para dos valores de épsilon, no «para todos los valores posibles».

7. La expresión *demostración que explica* es usada por Gatward (2011) para señalar la diferencia entre dos tipos de demostraciones: la que explica y la que prueba. Esta última únicamente se limita a probar una propiedad o un teorema a partir de una aplicación formal de resultados anteriores (axiomas, teoremas demostrados con anterioridad, etc.). Un ejemplo en nuestro caso de este tipo de demostración sería que la sucesión $a_n = \frac{n^2+n+1}{n^2}$ está acotada y es decreciente y, por lo tanto, tiene límite.

– Paso 1.º: Calculamos algunos valores de la sucesión y observamos cómo estos se acercan a «1» (fenómeno a.s.i.). Esto lo hicimos usando el sistema de representación tabular y gráfico, y anotamos posibles dificultades.
– Paso 2.º: Empleamos el fenómeno de ida-vuelta y observamos que para algunos valores de ε encontramos un N tal que si n > N entonces $|a_n - 1| < \varepsilon$ (ε valor que fijamos).
– Paso 3.º: Generamos una imagen de la demostración a partir de los pasos anteriores. Esta imagen no es un dibujo, sino una convicción de que estamos en condiciones de generalizar a cualquier valor de épsilon.
– Paso 4.º: Demostramos que a_n tiene límite 1. Para ello nos apoyamos en el uso de desigualdades y en la propiedad arquimediana.
– Paso 5.º: Superamos posibles dificultades que surgen por discrepancias entre los casos particulares estudiados y la aplicación a dichos casos del resultado general obtenido.
– Paso 6.º: Atesoramos experiencias que nos acercan al concepto definición de límite finito de una sucesión.

Ejemplos. Fenómenos a.s.i.C e i.v.s.C. Pensamiento matemático avanzado

Hasta ahora hemos abordado el límite finito de una sucesión indagando con el fenómeno a.s.i. un candidato a límite. Puesto que la definición de límite finito de una sucesión es matemáticamente equivalente a la definición de sucesión de Cauchy, el estudio del ejemplo con el que se trabaje puede hacerse usando esta última definición.

Por este motivo presentamos a continuación varios ejemplos de cómo trabajar los fenómenos de aproximación simple intuitiva de Cauchy (a.s.i.C) y retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones de Cauchy (i.v.s.C) para construir un concepto imagen, la imagen de la demostración, necesaria para la demostración de que la sucesión con la que trabajamos es una sucesión de Cauchy y el concepto definición de sucesión de Cauchy, y por lo tanto de sucesión que tiene límite finito.

Dada la sucesión siguiente: $a_n = \frac{n+1}{n}$, calculamos unos cuantos términos de esta. En un primer momento trabajamos con el sistema de representación tabular:

Tabla 2.
Fenómeno a.s.i. en el sistema de representación tabular

n	1	2	3	4	5	…	100	101	…
$a_n = \frac{n+1}{n}$	2	3/2	4/3	5/4	6/5		101/100	102/101	...
a_n	2	1,5	1,333….	1,25	1,2	…	1,01	1,099..	…
$\lvert a_n - a_{n-1}\rvert$	--	0,5	0.166..	0,833	0,05		---	0,089..	---

Observamos (última fila) que las diferencias entre los términos consecutivos se van haciendo cada vez más pequeñas. Este fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy genera nuestro primer concepto imagen, el cual permite sospechar que la sucesión va a ser de Cauchy, y justificaremos esta suposición apelando al fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de Cauchy. Para ello tenemos que asegurar que, dado un valor de ε > 0, existe un número natural N tal que, para todo m y n, si m,n > N, entonces $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Tomemos ε = 1/2: podemos encontrar N = 2, de manera que se cumple que $|a_n - a_m| < ½$ si n,m > 2.

Para demostrar esto fijamos n y tomamos m = n + 1. Si observamos que se cumple para n y n + 1, se cumplirá para cualquier valor mayor de n + 1 que tomemos, ya que $|a_n - a_{n+1}| < |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n|$ puesto que todos estos sumandos son positivos.

$$\left|\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1}\right| < \left|\frac{n^2+1+2n-n^2-2n}{n^2+n}\right| = \frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{2}$$

Como podemos observar, la anterior desigualdad se cumple para n > 2. Por lo tanto, tomando N = 2, establecemos la afirmación.

Si ahora tomamos ε = 1/8, establecemos que tomando N = 3 también se cumple que $|a_n - a_m| < 1/8$.

Parece por lo tanto que el fenómeno de ida-vuelta se cumple para los valores de ε que vamos fijando. Es decir, «parece» cumplirse lo siguiente:

Para cada ε > 0, existiría un número natural N tal que si n,m > N se cumple que $|a_n - a_m| < ε$.

Esta es nuestra imagen de la demostración: se trata de una generalización basada en la convicción personal de que no hallaremos sorpresas en el caso general. Otro problema es que sepamos abordar esa generalización.

Si observamos la frase anterior, hemos llegado a la parte final de la definición de *sucesión de Cauchy*. El siguiente paso es aplicar dicha definición al ejemplo que estamos manejando y establecer que se cumple lo que ella indica.

Para realizar esta demostración, hay que tener en cuenta que el alumno debe manejar desigualdades y que debe sumar y restar términos dentro del valor absoluto para llegar a demostrar la definición.

Una manera de realizar la demostración es la siguiente:

– Tomar m = n + k, donde k es un número natural.
– Usar el resultado anterior en el que, si se toman n y n + 1, se cumple la definición.
– Manejar por comodidad a_n en lugar de $\frac{n+1}{n}$.

Pasemos a realizar la demostración:

$|a_n - a_{n+k}| \leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \ldots\ldots\ldots |a_{n+k-1} - a_{n+k}|$ (Hemos sumado y restado términos en el primer valor absoluto).

En cada uno de los sumandos anteriores se cumple que es menor que épsilon. Para ello basta con tomar $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{k}$. De esta manera, podemos observar que

$$|a_n - a_{n+k}| \leq |a_n - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_{n+2}| + \ldots\ldots\ldots |a_{n+k-1} - a_{n+k}| < \left(\frac{\varepsilon}{k} + \frac{\varepsilon}{k} + \ldots + \frac{\varepsilon}{k}\right) = k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

Siguiendo a Gatward (2011), clasificamos esta como demostración que explica, ya que se detallan los elementos que se usan y se dan todos los pasos necesarios para su justificación.

Los pasos principales que llevan a la demostración de que la sucesión con la que estamos trabajando tiene límite 1 son, por lo tanto, los siguientes:

– Paso 1.º: Calculamos algunos valores de la sucesión y observamos que las diferencias entre términos consecutivos se hacen cada vez más pequeñas (a.s.i.C). Esto lo realizamos usando el sistema de representación tabular.
– Paso 2.º: Empleamos el fenómeno de ida-vuelta, y observamos que para algunos valores de ε encontramos un N, tal que si n,m > N entonces $|a_n - a_m| < ε$ (ε valor que fijamos).

- Paso 3.º: Generamos una imagen de la demostración a partir de los pasos anteriores. Esta imagen no es un dibujo, sino una convicción de que estamos en condiciones de generalizar a cualquier valor de épsilon.
- Paso 4.º: Demostramos que la sucesión dada es una sucesión de Cauchy. Para ello nos apoyamos en el uso de desigualdades.
- Paso 5.º: Superamos posibles dificultades que surgen por discrepancias entre los casos particulares estudiados y la aplicación a dichos casos del resultado general obtenido.
- Paso 6.º: Atesoramos experiencias que nos acercan al concepto definición de sucesión de Cauchy.

GUIONES DE SECUENCIAS DIDÁCTICAS EN TORNO AL LÍMITE

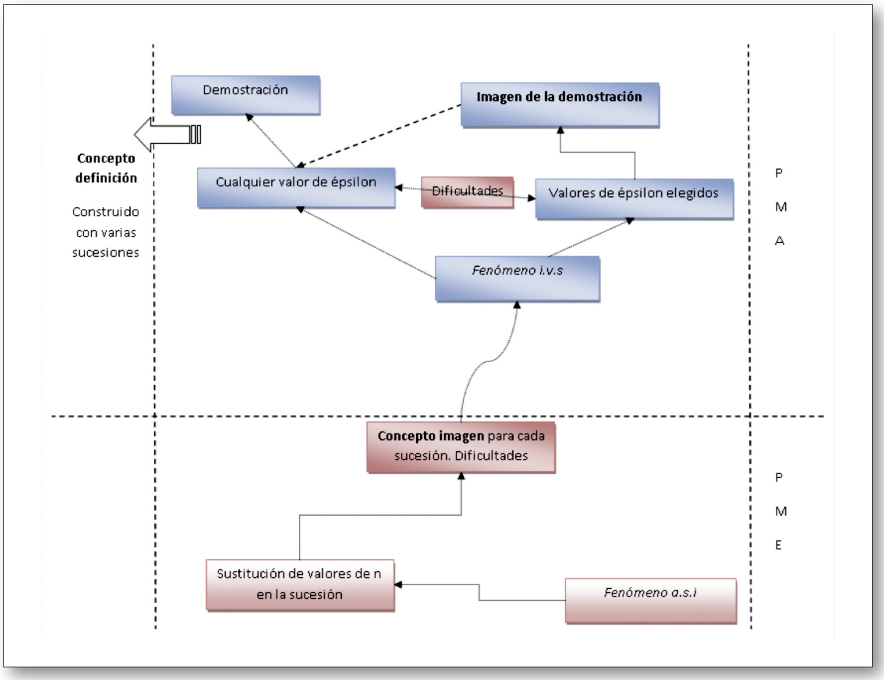
Presentamos a continuación dos guiones de secuencias didácticas dependiendo de que, en el ámbito intuitivo, o bien se obtenga un candidato a límite de la sucesión dada, o bien se observe que las diferencias entre los términos de la sucesión son cada vez más pequeñas.

La secuencia didáctica para el primer caso (límite finito de una sucesión) consta de cuatro pasos.

- Paso 1.º: Trabajar con el fenómeno a.s.i. en diferentes ejemplos y en diferentes sistemas de representación. Para ello sustituimos varios valores de n en la sucesión. Con esto se pretende generar un concepto imagen adecuado. Este concepto imagen forma parte del pensamiento matemático elemental, ya que introducimos la creencia de que la sucesión tiene límite mediante la exhibición de un posible valor límite. Además, el lenguaje usado no es formal: se ha dado mayor importancia a la intuición. Conviene usar diferentes sistemas de representación, con objeto de que surjan en clase dificultades asociadas al límite, como las relativas al infinito actual.
- Paso 2.º: Trabajar el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones. Para ello se trabaja con un valor de épsilon y se halla el valor de n que permita que se cumpla la desigualdad $|a_n - L| < \varepsilon$ siendo L el candidato obtenido en el paso 1 y épsilon un valor que hemos elegido. Repetimos para comprobar con otros valores elegidos de ε.
- Paso 3.º: Hacemos la suposición de que se cumple para cualquier valor permitido que fijemos. Así hemos generado una convicción personal que llamamos imagen de la demostración; queda aún una tarea pendiente que está perfectamente clara: construir la función épsilon de IR en IN que asegure que L es el límite de la sucesión con la que trabajamos. Dicha función permitirá obtener un valor de N para cada valor de épsilon ($\varepsilon \in R$) que fijemos.
- Paso 4.º: Para asegurar la hipótesis formulada en 3, tenemos que recurrir a la demostración, un elemento clave del pensamiento matemático avanzado junto con la formulación de hipótesis y el lenguaje formal. El punto de partida de dicha demostración, además de la convicción mencionada, es la definición de sucesión que tiene límite, porque exige el manejo de desigualdades, la propiedad arquimediana y la superación de posibles dificultades menores para ajustar los valores de N obtenidos en el paso 3 y los correspondientes valores obtenidos en este paso, que pueden corresponder a valores diferentes de épsilon. Estos elementos son evocados cuando uno tiene que afrontar la demostración y acercan a la construcción del concepto definición.

Un esquema de todo lo anterior puede observarse en el cuadro 1 que pasamos a describir a continuación.

Cuadro 1.
Concepto definición de límite finito de una sucesión



Kidron y Dreyfus (2014) pueden situar la imagen de la demostración como parte del concepto imagen o incluso identificarla en alumnos que no tienen una formación matemática muy sólida. Aquí nos alejamos de esa perspectiva: en primer lugar, identificamos la imagen de la demostración como la convicción de que algo es posible, pero no con una imagen dibujada propiamente dicha; en segundo lugar, situamos la imagen de la demostración en un nivel más formal; por último, consideramos que la imagen de la demostración «está próxima» al concepto definición, y ambos se sitúan plenamente en el pensamiento matemático avanzado, ya que surgen en procesos de demostración que el alumno tiene bien o casi bien establecidos. Sin embargo, la imagen de la demostración está asociada a cada sucesión, mientras que el concepto definición entendemos que es ya una noción matemática abstracta que resume diferentes experiencias con el límite finito.

El guión de secuencia didáctica para el segundo caso, las sucesiones de Cauchy, se describe a continuación. Consta de cuatro pasos, que van desde la mera intuición de que las diferencias entre términos de la sucesión son cada vez menores a medida que la sucesión avanza, hasta la definición formal de sucesión de Cauchy y la demostración de que dicha sucesión es verdaderamente una sucesión de Cauchy.

– Paso 1.º: Trabajar con el fenómeno a.s.i.C en diferentes ejemplos y en diferentes sistemas de representación. Para ello se hace necesaria la sustitución de varios valores de n en la sucesión y el cálculo de distancias entre los términos calculados. Con ello se pretende generar un concepto imagen adecuado. Este concepto imagen forma parte del pensamiento matemático elemental, ya que lo que introducimos es la creencia de que las diferencias entre los términos de la sucesión son cada vez más pequeñas a medida que n crece y que, por lo tanto, la sucesión será una sucesión de Cauchy. En este paso, el estilo usado no es formal: se da mayor importancia a la intuición. Pueden experimentarse dificultades como las señaladas en el límite finito de una sucesión.
– Paso 2.º: Trabajar el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de Cauchy. Para ello se trabaja con un valor de épsilon y se halla el valor de N ($m, n > N$) que permita que se cumpla la desigualdad

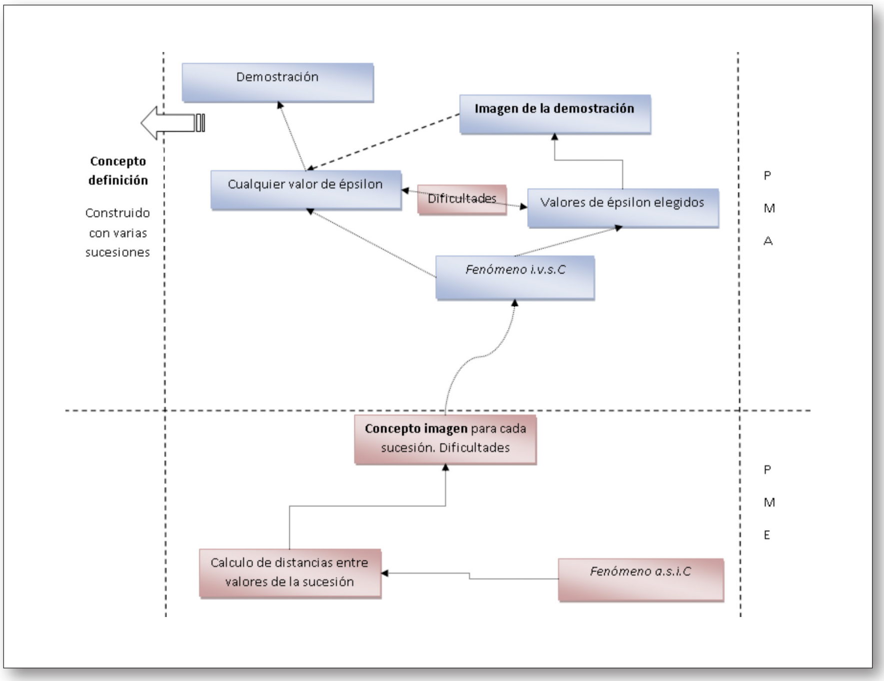
$|a_n - a_m| < \varepsilon$. Se sugiere comenzar con el valor de m = n + 1, ya que hace más sencillo el hecho de comprobar el fenómeno de ida-vuelta en sucesiones de Cauchy. Posteriormente, se puede hacer para cualquier valor de m que fijemos. Repetimos para comprobar con otros valores de ε.

Paso 3.º: Hacemos la suposición de que se cumple para cualquier valor permitido que fijemos. Así, hemos generado una convicción personal que llamamos imagen de la demostración, pero queda aún una tarea pendiente que está perfectamente clara: construir la función épsilon de IR en IN que asegure que la sucesión con la que trabajamos es de Cauchy. Dicha función permitirá obtener un valor de N para cada valor de épsilon ($\varepsilon \in R$) que fijemos.

Paso 4.º: Para asegurar la hipótesis formulada en el paso 3, tenemos que recurrir a la demostración, un elemento clave del pensamiento matemático avanzado, junto con la formulación de hipótesis y el lenguaje formal, elementos todos presentes en este paso. Para realizar dicha demostración, debemos tener la convicción de que la hipótesis formulada en torno a la sucesión con la que estamos trabajando es cierta, manejar desigualdades a la vez que sumamos y restamos términos en el valor absoluto (propiedad triangular del valor absoluto) y superar posibles dificultades menores para ajustar los valores de N obtenidos en el paso 3 y los correspondientes valores obtenidos en este paso, que pueden corresponder a valores diferentes de épsilon. Todos estos elementos son evocados cuando uno tiene ya una imagen de la demostración y quiere afrontarla. La imagen de la demostración es, por lo tanto, la antesala de la demostración, cuyo punto de partida (además de la convicción mencionada) es la definición de sucesión de Cauchy. Estos elementos son evocados cuando uno tiene que afrontar la demostración y acercan a la construcción del concepto definición *sucesión de Cauchy*.

Un esquema de todo lo anterior puede consultarse en el cuadro 2.

Cuadro 2.
Concepto definición de *sucesión de Cauchy*



Tanto la imagen demostración como la demostración se sitúan dentro del pensamiento matemático avanzado. El concepto imagen lo situamos en el pensamiento matemático elemental, pero es un elemento indispensable, primordial, para la construcción del concepto definición de sucesiones de Cauchy. Dentro del pensamiento matemático elemental, ubicamos también el fenómeno de aproximación simple intuitiva de Cauchy (a.s.i.C) mientras que el fenómeno i.v.s.C se sitúa en el pensamiento matemático avanzado. Hay que señalar que todos los elementos indicados anteriormente tienen un papel indispensable en la construcción de las sucesiones de Cauchy.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Al considerar conjuntamente los cuadros 1 y 2, observamos que a cada fenómeno le sigue lo que denominamos un *reposo* o *estado* cognitivo al que se llega mediante ciertas manipulaciones matemáticas más o menos complejas. La secuencia indicada es:

– Fenómeno intuitivo → Concepto imagen
– Fenómeno formal → Imagen de la demostración

Finalmente, la culminación reiterada de diferentes demostraciones (con diversas sucesiones) suscita el concepto definición, donde ya podemos decir que el aprendiz se ha apropiado del concepto matemático propiamente dicho.

En el caso de la sucesión convergente, es muy difícil ofrecer certezas sobre esta secuencia porque los currículos generalmente dedican poco tiempo al dominio de la definición de límite y se dedican, por indudables razones de eficiencia, a presentar teoremas que facilitan la predicción del límite de innumerables sucesiones, o al estudio de ciertos casos indefinidos mediante «criterios de convergencia».

Por ello, entendemos que los nexos que hemos establecido entre fenomenología y pensamiento matemático avanzado necesitan un mayor estudio empírico con secuencias didácticas análogas a las que hemos propuesto.

En las figuras 2 y 3, situamos la imagen de la demostración en el pensamiento matemático avanzado debido al tipo de demostración que realizamos, pero ¿habrá otros tipos de demostraciones en las que la imagen de la demostración forme parte del pensamiento matemático elemental? Elementos como la generalización, que puede dar lugar a demostraciones, pueden ser empleados en enseñanzas anteriores a la ESO, donde el pensamiento matemático podríamos calificarlo de elemental. En estos casos, la imagen de la demostración es algo que puede estar presente cuando los alumnos generalizan fórmulas. Este hecho es más difícil de comprobar en el caso de las sucesiones de Cauchy, ya que generalmente se abordan en el primer año de universidad y, por lo tanto, las demostraciones se situarían en la mayoría de los casos con un cierto nivel garantizado en el pensamiento matemático avanzado.

En los casos estudiados hemos separado el concepto imagen (ubicado en el pensamiento matemático elemental) y el concepto definición (ubicado en el pensamiento matemático avanzado), pero surge una cuestión debido a que tanto el concepto imagen como el pensamiento matemático elemental son imprescindibles en la construcción del concepto definición y el pensamiento matemático avanzado: ¿Forman parte los conceptos imagen del concepto definición? ¿Son los primeros formas imprecisas de expresar el segundo? ¿Está el pensamiento matemático elemental incluido dentro del pensamiento matemático avanzado y usa el primero de ellos elementos menos formales que el segundo?

Esperamos en un futuro abordar estas cuestiones y obtener indicaciones de respuestas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bell, JL. (1998). A primer of Infinitesimal Analysis. Cambridge (UK): Cambridge University Press.

Bergé, A. (2006). Convergence of Numerical Sequences – a commentary on «the Vice: Some Historically Inspired and Proof Generated Steps to Limits of Sequences» by B. Burn. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 395-402. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-8754-9

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME*, 4(3), 219-236.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de analisis matemático en la Universidad. *RELIME*, 9(2), 189-209.

Burn, B. (2005). The vice: some historically inspired and proof-generated steps to limits of sequence. *Educational Educational Studies in Mathematic*, vol. 60, 269-295. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-005-7923-6

Claros (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza*. Granada: UGR.

Claros, Sánchez y Coriat (2013). Sucesión convergente y sucesión de Cauchy: equivalencia matemática y equivalencia fenomenológica. Enseñanza de las ciencias. Barcelona, v. 31, n.2, p. 113-131.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer.

Davis, R. y Vinner, S. (1986). The notion of Limit: some semingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematicasl Behavior*, 5, 281-303.

Earles, J. (1995). *University calculus students' conceptual understanding of the limit of a function.* Madison: University of Wisconsin.

Espinoza, L. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto «límite de función»: una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), 355-368.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Garbin, S. y Azcárate, C. (2001). El concepto de infinito actual. Una investigación acerca de las incoherencias que se evidencian en alumnos de bachillerato. Suma, 38, 53-67.

Gatward, R. (2011). Is there a need for proof in secondary mathematics education? *Mathematics Teaching*, 225.

Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy (Ed.). *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 91-111). México DF: Fondo de Cultura Económica.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kidron, I. y Dreyfus, T. (2014). Proof image. *Educational Studies in Mathematics*, vol. 87, 297-321. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-014-9566-y

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical aproach for the understanding of the limit of a sequense. *Educational Studies in Mathematics*, 48(2-3), 259-288. http://dx.doi.org/10.1023/A:1016004822476

Penalva, M. (2001). Implicaciones didácticas de las dificultades en el aprendizaje de conjuntos infinitos: Reunión científica de Pensamiento Numérico y Algebraico (SEIEM), Universidad de Valladolid-Palencia.

Plaza, J.; Ruiz Hidalgo, J. y Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finite de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias*, 33.2, 211-229. http://dx.doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1575

Przenioslo, M. (2005). Introducing the concept of convergence of a sequence in secundary school. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 71-93. http://dx.doi.org/10.1007/s10649-005-5325-4

Robinson, A (1966). *Non-standard Analysis*. Amsterdam: North-Holland.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de límite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Math*, vol. 18, 371-397. http://dx.doi.org/10.1007/BF00240986

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics* 10(3), 24-36.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press.

Spivak, M. (1991). *Calculus. Cálculo Infinitesimal.* Barcelona: Reverté.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169. http://dx.doi.org/10.1007/BF00305619

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the theaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Weber, K., y Alcock, L. (2009). Proof in advanced mathematics classes: Semantic and syntactic reasoning in the representation system of proof. En D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.). *Teaching and learning proof across the grades* (pp. 323-338). New York, NY: Routledge, Studies in Mathematical Thinking and Learning.

Cognitive structure and phenomenology: the case of the convergent sequence

Javier Claros Mellado
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad Complutense de Madrid
fclaros@ucm.es

Moisés Coriat Benarroch
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Granada
mcoriat@ugr.es

Teresa Sánchez Compaña
Departamento de Didáctica de las Matemáticas, Universidad de Málaga
teresasanchez@uma.es

This research shows connections or links between some «cells» of the cognitive structure (concept image, concept definition, and image proof) (Vinner, 1991, and Kidron and Dreyfus, 2014) and the phenomena of intuitive approach (a.s.i) and feedback (i.v.s), in the sense of Freudenthal (1983), organized by a definition of a sequence of finite limit. The relationship between these cells of the cognitive structure and the phenomena organized by a Cauchy sequence (intuitive approach phenomena and Cauchy feedback, called a.s.i.C and i.v.s.C respectively) is also assessed. These connections arose during the development of two teaching sequences: one to address the teaching of the finite limit of a sequence and the other one to address the teaching of Cauchy sequences.

The steps suggested in the document for the teaching and learning of the finite limit of a sequence are: 1) We calculate some values of the sequence and observe how these are close to «1» (a.s.i phenomenon); we do this by using the tabular and graphical system of representation. 2) We use the feedback phenomenon (i.v.s) and find that for some values of ε we are able to find an N such that if n > N then $| a_n -1 | < \varepsilon$. 3) We generate an image proof from the previous steps; this image is not a drawing, but a conviction that we are able to generalize to any value of epsilon. 4) We prove that the limit of an is 1; to do this we use inequalities and the Archimedean property. 5) We overcome possible difficulties arising from the discrepancies between particular case studies and the application of the overall result obtained to such cases. 6) We treasure experiences that bring us to the concept definition of finite limit of a sequence.

Regarding the Cauchy sequences the following steps for teaching and learning are suggested: 1) We calculate some values of the sequence and observe how the differences between consecutive terms are becoming smaller and smaller (a.s.i.C); we do this using the tabular representation system. 2) We use the Cauchy feedback phenomenon for some values of ε and we find an N such that if n, m > N then $| a_n - a_m | < \varepsilon$. 3) We generate an image proof from the previous steps; this image is not a drawing, but a conviction that we are able to generalize to any value of epsilon. 4) We show that the given sequence is a Cauchy sequence; for this we rely on the use of inequalities. 5) We overcome possible difficulties arising from discrepancies between particular case studies and the application of the overall result obtained to such cases. 6) We treasure experiences that bring us to the definition concept of Cauchy sequence.

These teaching sequences appeal to the use of the phenomena of intuitive approach and feedback described by Claros (2010) and place them as essential elements in building a concept image of a convergent sequence or an image proof (Kidron and Dreyfus, 2014). These two «cells» of the cognitive structure help developing the concept definition of a convergent sequence.

In addition, this document classifies the concept image within the elementary mathematical thinking and the image proof and the concept definition in advanced mathematical thinking, also describing the steps to achieve the latter.