

Estudis i activitats sobre problemes clau de la
Història de la Matemàtica. Per a una
aproximació genètica al tractament de les
idees matemàtiques

Memòria

RAMON NOLLA I SANS

2000/2001

Índex

1	Introducció	1
1.1	Tema objecte del treball	1
1.2	Objectius	5
1.3	Marc referencial i justificació	6
1.3.1	Professorat	6
1.3.2	Alumnat	8
2	Treball dut a terme	9
2.1	Disseny del pla de treball	9
2.2	Metodologia	10
2.3	Recursos utilitzats	11
3	Resultats obtinguts	12
4	Conclusions finals	13
5	Relació de materials annexats	14
	Referències	16

1 Introducció

1.1 Tema objecte del treball

Els conceptes i les idees matemàtiques que es tracten en els currículums de Secundària Obligatòria i Batxillerat, són presentats als alumnes, més sovint del que seria desitjable, d'una forma tancada i acabada. S'oblida que han sorgit després d'un llarg procés de gestació, en el que han aparegut plegades les intuïcions més fecundes amb d'altres d'estèrils, les quals han configurat les seves presentacions successives. Al llarg de la Història, aquestes idees han estat generades per diversos tipus de problemes, de caire pràctic o teòric, pertanyents a la pròpia matemàtica o a d'altres disciplines. El coneixement d'aquests problemes, i l'estudi de l'evolució del seu tractament i dels nous problemes que han generat, proporciona els fonaments per a la comprensió de les idees i conceptes que n'han resultat. La reflexió al voltant d'aquest fet, i les característiques del binomi ensenyament/aprenentatge, ha portat a molts professionals de les matemàtiques i de la seva docència, a assumir amb més o menys matisos que:

La immersió en el fer matemàtic i el seu aprenentatge reproduïx, a grans trets, en una sèrie resumida, totes les etapes del desenvolupament general d'aquest fer al llarg de la Història.

Això ha conduït, en les últimes dècades, a la consideració d'una inversió en la metodologia usada pel professorat en la seva tasca. El mètode resultant d'aquesta inversió, el qual rep la denominació de *mètode genètic*, pot ser caracteritzat per:

- La rellevància de l'estudi dels problemes clau de la Història de la Matemàtica que han provocat l'aparició i el desenvolupament de les idees matemàtiques. Aquest estudi comporta el descobriment de la il·lació entre els orígens d'aquestes idees i la seva evolució posterior. Això és essencial de cara a la comprensió de les intuïcions inicials i de les idees que en sorgeixen, les quals queden amagades en els estadis finals de la seva evolució, sota una presentació força més rigorosa i formalitzada.
- La comprensió de les dificultats de l'alumne, a partir de les dificultats aparegudes al llarg de la Història en aquest procés evolutiu.
- L'elaboració d'una guia de treball, des del marc de reflexió originat en els dos primers apartats. Aquesta hauria de permetre a l'alumne, l'adquisició dels conceptes i idees, mitjançant la recreació simplificada de les diferents etapes d'evolució d'un problema inicial, en un procés de recerca personal.¹

¹Aquestes característiques concreten el significat del terme *genètic* en el sentit de generació o gestació de les idees.

Aquestes característiques ens aboquen al tema objecte del treball realitzat:

L'estudi dels tractaments inicials d'una col·lecció de problemes i qüestions implicades en les idees i conceptes matemàtics que són tractats a les aules de Secundària Obligatòria i Batxillerat, i del camp més extens que ha de conèixer el professorat per tenir-ne una perspectiva prou àmplia.

Amb els estudis realitzats i les activitats desenvolupades es pretén fer una aportació que faciliti l'accés del professorat a materials que tractin l'evolució de les idees matemàtiques. D'aquesta manera s'afavoreix la realització d'experiències a l'aula en què s'adopti el mètode genètic, i que es pugui valorar la conveniència d'integrar aquesta metodologia, amb d'altres metodologies innovadores, en el procés d'ensenyament/aprenentatge. Des d'aquesta posició s'ha cregut convenient la inclusió d'activitats que admetessin un tractament amb eines informàtiques del qual parlarem més endavant.

L'interès d'aquest enfoc, en què s'atorga un paper protagonista a l'observació i estudi de la gestació de les idees, troba suport en els escrits i reflexions de molts professionals. N'oferim una mostra prou extensa per aportar més elements de reflexió sobre el tema:

David Hilbert (1899) Tot i que les bases del mètode genètic es troben implícites o enunciades en treballs més antics,² la primera vegada que es troba el terme “genètic” per designar-lo és a Hilbert, en l'apèndix 6 de [Hi]. Allí explica que en l'Aritmètica, el nombre real s'introdueix a partir de successives ampliacions —provocades per exigències de generalització en la pràctica de les operacions—, del concepte de nombres més senzills. Anomena explícitament *mètode genètic* aquesta manera de procedir. El contraposa al *mètode axiomàtic*, el qual presenta en el terreny de la Geometria; finalment expressa la seva opinió sobre la conveniència de cadascun d'ells i, concretament, la del primer en el camp de la pedagogia: «Malgrat el gran valor pedagògic i heurístic del mètode genètic, mereix la preferència el mètode axiomàtic per a la presentació definitiva del nostre coneixement i la seva plena seguretat lògica».

Henri Poincaré (1908) En el capítol II de [Poi], pàg 99 de la traducció espanyola, en què tracta sobre les definicions matemàtiques i l'ensenyament, afirma: «Els zoòlegs pretenen que el desenvolupament embrionari d'un animal resumeix en un temps molt curt tota la història dels seus avantpassats des dels temps geològics. Sembla que passa el mateix amb el desenvolupament dels esperits. L'educador ha de fer passar el nen per on han passat els seus pares; més ràpidament però sense saltar-se cap etapa. D'aquesta manera, la història de la ciència ha de ser la nostra guia primera.»

²Transcrivim una cita de Phillip. S. Jones (vegeu l'article «The role in the History of Mathematics of Algorithms and Analogies», a [Sw], 13) en què atribueix a Pedro Núñez [1502-1578] —matemàtic portuguès conegut per *Nonnius* i que va idear el “nònius”, instrument de mesura de precisió—, les paraules següents: «Oh que bé hagués estat, si aquells autors que han escrit matemàtiques ens haguessin lliurat les seves invencions . . . de la mateixa manera i amb el mateix discurs tal com les van descobrir.»

Felix Klein (1908) (Extret de [Kli], pàg 49). Referint-se al mètode genètic, a la seva obra [Kl] diu: «Un obstacle essencial per a una difusió d'aquest mètode, natural i veritablement científic, és la falta de coneixements històrics que sovint es fa notar. Per combatre això, he intentat que el text inclogui notes històriques. En fer-ho confio haver posat de relleu amb quina lentitud s'han produït totes les idees matemàtiques; com quasi sempre han aparegut primer en esbós i només han cristal·litzat després de llarg temps en la forma definitiva que resulta familiar en l'exposició sistemàtica.»

George Polya (1962) En el seu escrit [Pol], aquest autor es fa la pregunta següent: «fins a quin punt i de quina manera el currículum de les matemàtiques a l'ensenyament secundari és paral·lel a l'evolució històrica de les Matemàtiques?». Tot seguit concreta la seva pregunta en el paper de les demostracions. Arriba a la conclusió que, en establir el currículum, s'hauria de fer un estudi sobre els diferents nivells de demostració i que per això caldria «una combinació ben equilibrada d'almenys tres elements:

- 1) Una experiència autèntica de les recerques matemàtiques.
- 2) L'observació amigable de persones com nosaltres mateixos i de nois d'edats diverses a les classes on pugnen per comprendre les proposicions matemàtiques.
- 3) El coneixement d'almenys certes fases de la història de les Matemàtiques, suficient per fer-nos reconèixer el nivell de la demostració tractada i informar-nos sobre ella.

Seria d'altra banda útil, poder considerar els diversos nivells de demostració com les etapes successives d'una sèrie evolutiva.»

Harold M. Edwards (1977) En el prefaci de [Ed] proporciona una definició del mètode genètic com «l'explicació o avaluació d'una cosa o esdeveniment en termes del seu origen i desenvolupament». Recoltzant-se en Otto Toeplitz, vegeu [To], afirma que «l'essència del mètode genètic consisteix a observar els orígens històrics d'una idea per tal de trobar la millor manera de motivar-la, i estudiar el context en el qual l'introduïdor de la idea treballava per tal de trobar la qüestió essencial que ell s'esforçava a resoldre». Finalment, després de defensar la importància de les preguntes davant les respostes, arriba a dir: «He trobat que la millor manera de superar la dificultat d'aprenentatge d'una teoria matemàtica abstracta és seguir el consell de Toeplitz i ignorar els tractats moderns fins que hagi estudiat la gènesi de cara a conèixer les preguntes».

Joan Girbau (1984) En la conferència [Gi], parlant de la nostra formació matemàtica afirmava —resumeixo—: «Primer apreníem a resoldre problemes de caràcter pràctic sense pretendre cap mena de rigor en la introducció dels conceptes i propietats necessàries per resoldre'ls, i això corresponia al període egipci i babilònic; més endavant, a partir dels criteris de congruència i semblança de triangles, anàvem bastint l'edifici geomètric tot demostrant teoremes cada cop més complicats, i això corresponia

a l'època dels *Elements* d'Euclides; una mica més grans, ens adonàvem de la falta de rigor de molts dels conceptes i demostracions fetes, representant això una situació paral·lela a la que van travessar els matemàtics posteriors. Més endavant se'ns començava a introduir les idees de Descartes, i descobríem com l'àlgebra podia esdevenir una eina preciosa en la resolució de problemes geomètrics. Jo sóc de l'opinió que, sempre que es pugui, s'ha de respectar, en l'ensenyament, l'ordre històric en què les idees s'han desenvolupat.».

Miguel de Guzmán (1992) A l'article [Gu], afirma que: «Normalment la història ens proporciona una guia magnífica per emmarcar els diferents temes, els problemes dels quals han sorgit els conceptes importants de la matèria, i fa llum per entendre la raó que ha portat l'ésser humà a ocupar-se'n amb interès. Si coneixem l'evolució de les idees de què pretenem ocupar-nos, sabrem perfectament el lloc que ocupen en relació a les diferents conseqüències, les diferents aplicacions interessants que n'han pogut sorgir, la situació recent de les teories que se n'han derivat, etc.». Més endavant, a l'apartat “Sobre el paper de la història en el procés de formació del matemàtic”, diu: «El professorat hauria de saber com han passat les coses per:

- Comprendre les dificultats de l'home genèric, de la humanitat, en l'elaboració de les idees matemàtiques, i a través d'això, les dels seus propis alumnes.
- Entendre millor la il·lació de les idees matemàtiques, dels motius i variacions de la simfonia matemàtica.
- Utilitzar aquest saber com una guia sana per a la seva pròpia pedagogia.»

Camino Cañón (1993) Toeplitz i Edwards, citats anteriorment, coincideixen en que cal no confondre aquest mètode amb fer Història de la Matemàtica. Fer Història exigiria una acurada i exhaustiva descripció i estudi de les persones, les circumstàncies, els intents infructuosos de resolució dels problemes, les conjectures fallides, etc. El mètode genètic està més d'acord amb la setena tesi de Camino Cañón, a [Ca], 404, —compartida en el pròleg de l'obra per l'eminent “mestre” de matemàtics, doctor Albert Dou—,³ en què diu: «La comprensió d'un problema no requereix, necessàriament, recórrer el seu procés històric, ni familiaritzar-se amb els diversos llenguatges en què va ser formulat, així com amb els diferents mètodes de demostració que aquests llenguatges portaven annexos. Però el “llenguatge més perfecte”, per si sol, pot no descobrir la complexitat del problema. Pot requerir el complement de llenguatges menys precisos, que van vehicular el seu procés de gestació».

Així, el mètode genètic fa ús de la història, escollint les maneres de fer, les conjectures, les situacions que li poden ser de profit de cara a la consecució de l'objectiu

³Albert Dou és membre de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales i professor emèrit de la Universitat Autònoma de Barcelona. Sempre ha manifestat gran interès en l'estudi de l'evolució de les idees matemàtiques i dels seus fonaments. Trobem d'interès de cara a la formació dels professors de Secundària, les publicacions [Do1, Do2, Do3, Do4].

perseguit: trobar la pregunta essencial que genera les idees i seguir-ne el fil fins la presentació final més obscura i tancada. Tot això no impedeix que per motius psicològics o pedagògics, aprofiti, quan convé, els desenvolupaments estèrils, l'estudi del context i de les persones, amb la finalitat de donar noves dimensions a la comprensió de les idees estudiades.

Shmuel Avital (1995) A l'article «History of Mathematics Can Help Improve Instruction and Learning», [Sw] , 3–12, defensa que la formació dels futurs professors de Matemàtiques ha de passar pel coneixement del desenvolupament històric de la matemàtica, per tal de contribuir al seu aprenentatge i docència. Diu textualment: «És feina nostra organitzar l'educació de manera que transmeti als nostres estudiants els atributs bàsics de les matemàtiques com a part de la cultura humana. Podem aconseguir-ho relacionant els temes que impartim amb els seus desenvolupaments històrics. Com hem vist:

- 1) El desenvolupament històric pot allisonar-nos sobre les possibles dificultats de l'aprenentatge.
- 2) Ens pot ajudar a perfeccionar la tasca docent del procés de creació en les matemàtiques.
- 3) Pot induir a la creació d'un clima de recerca i investigació i no tan sols de transmissió d'informació.
- 4) Ens conduirà a l'ús d'exercicis en què hi ha una recerca progressiva d'un objectiu, el qual pot ser assolit gràcies a l'acumulació de dades.
- 5) Ens ensenyarà a incloure problemes en què la resposta és "Això no és possible."
- 6) Si exposem els nostres alumnes a problemes oberts, els mostrarem que la matemàtica és un camp obert en què l'esforç per resoldre problemes pot ser una activitat emocionant.
- 7) Ens ajudarà a humanitzar les qüestions mitjançant la presentació als nostres estudiants dels aspectes afectius de l'activitat humana.»

Ernst Hairer i Gerhard Wanner (1996) Emmarquen la seva obra [HW] en tres cites. Una d'elles és de Félix Klein, qui explica que la seva presentació a l'obra [Kl], s'aparta de les presentacions clàssiques dels llibres de text, entre d'altres coses, per l'èmfasi que posa en el desenvolupament històric, advertint als futurs professors que haurien de prendre nota de les seves indicacions al respecte. Seguint el seu consell Hairer i Wanner presenten l'Anàlisi amb l'intent de restaurar l'ordre històric, i remarquen que aquest treball és fruit d'un llarg període de docència.

1.2 Objectius

La realització d'aquest treball d'estudi de la gestació de conceptes i idees matemàtiques s'ha dirigit a assolir els objectius següents:

OB1. Proporcionar una col·lecció de documents en què es presenten els estudis fets. Inicialment, la intenció era que les idees tractades estiguessin relacionades amb els camps de la Geometria, l'Aritmètica i l'Àlgebra. Les dificultats provocades per l'extensió de l'empresa, ha reduït el domini d'estudi al camp de la Geometria, i a una incursió en el camp de l'Aritmètica. Així, s'han deixat de costat les qüestions que s'han considerat més abstractes, les relacionades amb el camp de l'Àlgebra, per a una altra ocasió. Aquests documents inclouen transcripcions i traduccions de parts significatives de les fonts originals utilitzades en l'elaboració dels estudis, i un recull bibliogràfic extens de les fonts consultades, les quals també seran d'interès per a estudis posteriors.

OB2. Proposar i desenvolupar activitats, per als diferents nivells de l'alumnat i per al professorat, relacionades amb els estudis fets, —inserides en els documents resultants d'aquests estudis—, en què es persegueix:

- La revisió i comprensió dels estudis que les acompanyen.
- L'adquisició d'ofici en l'ús de les eines matemàtiques que vagi més enllà del pur automatisme. Això permet aprofundir en la sensibilització envers les condicions que van propiciar el seu naixement, i en la comprensió del seu valor cultural tan en el terreny humanístic com en el tècnic.
- L'adquisició d'ofici en l'ús del programari informàtic adequat per tractar les qüestions algebraïques, aritmètiques i geomètriques, que ha de permetre copsar el seu valor com a eina vehicular d'aprenentatge. Concretament ens referim a l'ús del programa de càlcul numèric, formal i de representació gràfica DERIVE per a Windows i, molt especialment, al del programa de construccions geomètriques i dinàmiques CABRI II per a Windows.

1.3 Marc referencial i justificació

L'elaboració del projecte i del treball resultant ha estat emmarcada per l'estat actual dels materials existents relacionats amb l'estudi i comprensió de la gènesi de les idees matemàtiques. Fer una aportació per a la superació d'aquest marc, constitueix la justificació d'aquesta empresa. Esquematitzaré la situació en dos apartats referents, respectivament, al professorat i a l'alumnat:

1.3.1 Professorat

La formació de professors de matemàtiques a l'ensenyament secundari presenta deficiències greus des dels seus primers estadis:

- Els professors formats a les Facultats de Matemàtiques hem rebut una preparació en què ha dominat la línia de la dedicació a la recerca fonamental. Les qüestions relacionades amb la psicologia de l'aprenentatge matemàtic i la Història de les Matemàtiques, entre d'altres, han ocupat en general un lloc secundari.

- En el cas dels professors provinents de l'ensenyament Primari, la situació es pot agreujar per l'ínfim nombre d'hores dedicat a qualsevol tipus de formació matemàtica en els seu estudis.⁴
- Tampoc es pot ser optimista de la formació rebuda per la resta de professors, provinents de les diverses Facultats de Ciències i Escoles Tècniques; en la majoria dels casos es centren en l'adquisició de mètodes i habilitats algorítmics, o bé en la memorització de teories mai relacionades amb els estudis del seu interès.

Això planteja la necessitat d'una formació continuada del professorat en què es treballin les parts deficitàries. En aquest punt, si estem d'acord en la consideració del mètode genètic, com a una eina vàlida en la pràctica del fer matemàtic, ens trobem amb una dificultat essencial: Els textos originals dels moments clau de la Història de les Matemàtiques, els estudis existents i el material elaborat segons la línia genètica abunden en llengua estrangera però no en la nostra llengua.⁵ Aquests textos no sempre són fàcils d'aconseguir i, en cas de poder-ho fer, no és gens senzilla la labor d'ordenar-los, seleccionar-los, traduir-los, fer-ne una reflexió acurada i elaborar un material aprofitable per a la nostra tasca docent. Un dels motius principals d'aquesta dificultat rau en que la magnitud de l'empresa requereix, a part de la vocació, una disponibilitat temporal difícilment compatible amb la total dedicació que requereix la tasca docent i tutorial a l'ensenyament secundari. Des d'aquesta perspectiva, és d'indubtable interès l'elaboració d'un ventall ampli i compacte d'estudis i activitats del camp de les idees relacionades amb el currículum de la Secundària Obligatòria i del Batxillerat, i del camp de les idees, més ampli, sobre el que ha de treballar el professorat per tal de tenir perspectiva sobre aquest currículum.

Amb els treballs realitzats, s'ha pretès facilitar l'accés a materials, en llengua catalana, que permetin apropar el professorat al fer matemàtic i docent, d'acord amb les perspectives presentades, amb un estalvi sensible de temps i esforç. D'altra banda, això estaria en la línia de contribuir a la satisfacció d'algunes de les necessitats del professorat que planteja Alan J. Bishop. Aquest autor defensa, a partir d'una anàlisi dels tipus d'activitats d'aprenentatge que necessiten els alumnes,⁶ que «el que els professors necessiten no són llibres de text [tal com són concebuts actualment] sinó:

- Idees per ensenyar diferents temes matemàtics.
- Un banc d'activitats matemàtiques.
- Materials per copiar o modificar segons l'ús específic que se'n faci.
- Recursos per a l'avaluació.

⁴En relació a aquests dos apartats, vegeu l'informe [AAVV] de la reunió convocada per la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales els dies 5 i 6 de febrer de 1999.

⁵En els últims anys es percep un esforç per trencar aquesta inèrcia per part d'algunes editorials i la Societat Catalana de Matemàtiques.

⁶Vegeu [Bi].

- Pàgines web, ordinadors, calculadores.
- Exemples de models curriculars d'altres escoles.»

1.3.2 Alumnat

Una anàlisi des del punt de vista dels materials amb que tracten els alumnes en la seva tasca d'aprenentatge, permet d'establir les consideracions següents:

Materials amb suport imprès: Els manuals dels cursos regulars, la manera d'utilitzar-los, i el sistema de creences que envolta el món de l'alumne, no es caracteritzen, en general, per creure en la bondat i els avantatges que comporten la presentació o la utilització de situacions inspirades en les que van originar els nous conceptes i les noves idees que l'alumne troba en el camí de l'aprenentatge. Una bona prova ens la proporciona el fet que els nous alumnes que arriben a les nostres classes confonen l'aprenentatge de fer Matemàtiques, amb l'aprenentatge memorístic dels mètodes de resolució de problemes. És difícil fer Matemàtiques sense, primerament, haver esbrinat i entès bé quines són les preguntes i haver-se submergit en l'evolució d'aquestes i les seves respostes.

En aquest treball s'han elaborat materials que pretenen afavorir aquesta recerca i reflexió sobre les preguntes clau de cara a la comprensió dels problemes i les idees que contenen. També s'ha pretès que part dels materials, en alguns casos puguin ser directament utilitzats pels alumnes, i en d'altres se'n pugui fer una adaptació per part del professorat. Finalment, també poden servir d'inspiració a la creació de nous materials amb aquesta orientació *genètica*, i d'estímul en la recerca per part del professorat. Tot això reverteix directament sobre l'alumnat, amb actuacions i propostes metodològiques que estaran més d'acord amb la línia exposada.

Materials amb suport electrònic Existeix abundància de programari informàtic per a la realització de tasques relacionades amb les matemàtiques. Concretament, CABRI II per a Windows és un programa que la Generalitat ha proporcionat als centres de secundària, i DERIVE per a Windows és un programa d'un cost econòmic acceptable per a l'economia dels centres d'Ensenyament Secundari i d'un ús amable per als usuaris. La creu de la moneda es que, tot i existir aplicacions desenvolupades amb aquest programari en què es pot percebre el seu valor com a eina vehicular en la tasca d'ensenyament/aprenentatge, no són massa nombroses, i moltes vegades es mouen al voltant dels mateixos tòpics.

D'altra banda, en un context més general, el ràpid desenvolupament de les noves tecnologies, i la indiscriminada i abundant informació a la que donen accés de manera simple i immediata, oculten les possibilitats reals de la seva integració en el procés d'ensenyament/aprenentatge. Cal redescobrir el valor d'aquesta eina en aquest procés, i trencar amb les concepcions ingènues basades en l'opinió que “les màquines ho solucionen tot, només cal prémer un parell de tecles”, les quals condueixen a fer-ne un ús superficial

i no creatiu. Això moltes vegades reverteix en una desmotivació en l'aprenentatge del seu ús, sigui perquè es pensa que és un afer trivial o, molt al contrari, que la "màgia" que permet el "miracle" d'aquest funcionament, que es creu tan simple, és incomprendible. Així el tractament amb eines informàtiques és convenient perquè els alumnes s'enfrontin a aquestes creences i:

- 1) Abandonin els prejudicis irracionals envers aquestes eines.
- 2) Diferencin i identifiquin els diferents tipus de programes que possibiliten els tractaments numèrics, formals, de representació gràfica i dinàmica, dels problemes matemàtics.
- 3) Reflexionin sobre el paper de la informàtica com a eina que pot ser utilitzada en la tasca de captar les idees essencials de la matemàtica, gràcies al tractament que fa dels seus problemes, i de l'estalvi que proporciona en l'execució de tasques rutinàries que només requereixen l'aplicació repetida d'automatismes, els quals, un cop apresos i adquirits, no aporten res a l'augment de la comprensió.
- 4) Copsin els avantatges de fer tractaments interactius i dinàmics i siguin capaços d'incloure'ls en activitats de recerca i de resolució de problemes.

Amb la creació i desenvolupament d'activitats susceptibles de ser tractades amb el programari indicat s'ha pretès incidir en cadascun d'aquests aspectes.

2 Treball dut a terme

2.1 Disseny del pla de treball

El pla de treball ha estat dividit en dues fases:

Fase 1 Recull, estudi, planificació i crítica de materials.

Fase 2 Elaboració definitiva de documents.

En el projecte inicial aquestes fases s'havien d'aplicar a cadascun dels nou apartats que allí es proposaven. Finalment s'ha aplicat a cadascun dels set apartats següents:

- 1) Orígens del mètode axiomàtic deductiu. El llibre I dels *Elements* d'Euclides.
- 2) Els llibres II, III i IV dels *Elements*.
- 3) L'anàlisi geomètrica grega.
- 4) Aritmètica.
- 5) Semblança i Trigonometria.

- 6) Els problemes clàssics
- 7) La perspectiva lineal i els orígens de la Geometria Projectiva.

El temps dedicat a cada apartat ha oscil·lat al voltant de les 6 setmanes, les quals s'han repartit a parts iguals entre les dues fases. Finalment, s'ha incorporat una última fase de revisió de tots els documents definitius elaborats a la fase 2.

2.2 Metodologia

Cadascun dels apartats temàtics del treball s'ha tractat, —tal com es proposava en el projecte inicial—, d'acord amb l'esquema d'actuació següent, el qual s'ha integrat en l'esquema de fases presentat a la secció anterior. Concretament, les tasques dels apartats M1 i M2 s'han realitzen durant la fase 1 de treball amb cada tema, i les dels apartats M3, M4 i M5 durant la fase 2:

M1) Recerca i recollida d'articles i bibliografia en què s'ha seguit el procediment:

- Consulta del Catàleg Col·lectiu de les Universitats de Catalunya i del catàleg de la Biblioteca Pública de Tarragona. (www.cbuc.es/virtua/catalan i www.biblio.fut.es).
- Desplaçaments amb periodicitat quinzenal a les diferents Universitats Catalanes i a la Biblioteca Pública de Tarragona per accedir als materials consultats utilitzant els serveis de reprografia i préstec.
- Recerca, per Internet, de les obres no disponibles i d'interès de cara a formar part de l'arxiu de treball personal.
- Ús del fons bibliogràfic i de l'arxiu de treball personals.

M2) Treball amb el material recollit:

- Selecció i estudi del material.
- Traducció o transcripció dels punts essencials de les fonts consultades, les quals s'han destinat, segons el context i extensió, a ser introduïdes en els documents a elaborar, intercalades en el text, en notes a peu de pàgina i en apèndixos al text.
- Creació d'esquemes dels documents d'estudi i d'activitats previs als documents que s'han elaborat.
- Elaboració d'esborranys dels estudis i activitats, a partir de les línies de l'esquema.
- Revisió dels esborranys, (una per tema, set en total), amb el professor supervisor d'aquest treball, doctor Josep Pla,⁷ de cara a l'elaboració definitiva dels documents de treball.

⁷Josep Pla és professor del Departament de Lògica, Història i Filosofia de la Ciència de la Universitat de Barcelona i ha accedit a col·laborar d'una manera totalment desinteressada en la supervisió d'aquest

M3) Elaboració definitiva de documents d'estudi en què s'han inclòs:

- Els desenvolupaments resultants dels estudis fets.
- Les transcripcions i traduccions de les fonts d'interès.
- Les propostes d'activitats relacionades amb els estudis fets, amb indicació expressa dels nivells als quals van dirigides.
- Una referència bibliogràfica extensa.

M4) Desenvolupament de les activitats proposades, amb indicacions per als nivells als quals van dirigides.

M5) Elaboració definitiva de versions de les activitats susceptibles de ser tractades amb les eines informàtiques citades, la resolució de les quals es proporciona amagatzemada en suport magnètic per tal de poder ser executades amb el programari esmentat.

2.3 Recursos utilitzats

- Fons bibliogràfic personal constituït per obres dels protagonistes de la Història de la Matemàtica, obres generals i articles de revistes.
- Catàlegs de les Universitats Catalanes i de la Biblioteca Pública de Tarragona, mitjançant consulta via Internet.
- Serveis de reprografia i préstec bibliogràfic de les Universitats Catalanes i de la Biblioteca Pública de Tarragona.
- Recerca per Internet dirigida a:
 - La consulta de textos clàssics. Una plana de gran interès ha sigut `gallica.bnf.fr`.
 - L'adquisició de textos clàssics i estudis en editorials i llibreries de fora del país.
- Treball previ, en forma d'apunts i aplicacions informàtiques, efectuat l'any 1995 en el curs 70247, de l'ICE de la Universitat Rovira i Virgili, *Història de la Matemàtica: de la Geometria a l'Àlgebra*.
- Programari associat al sistema $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ d'edició científica, per a la redacció i edició de tots els documents. Les versions d'aquests, en format PDF i Postscript, —extensió PS—, s'han dut a terme, respectivament, amb les utilitats `Dvipdfm.EXE` i `Dvips.EXE` d'aquest sistema.

treball. La seva realització s'ha vist enriquida per aquesta col·laboració, i per les lliçons rebudes en trobades mantingudes amb ell des de fa molts anys. Pla investiga la Matemàtica, esbrinant en els seus orígens i intuïcions per tal d'aprofundir en els continguts de les seves idees. Aquestes ultrapassen l'àmbit estricte d'aquesta matèria, característica que la converteix, com ell defensa, en un dels elements essencials de la nostra cultura. Exerceix una enorme tasca de divulgació en conferències i publicacions, de la qual trobem una mostra interessant per a la nostra formació a [P11, P12, P13, P14, P15, P16, P17], i a l'extensa introducció de [PV].

- Programa Corel-Draw per a l'elaboració de tots els gràfics dels documents creats.
- Programari informàtic CABRI II per a Windows i DERIVE per a Windows, per a la presentació d'activitats en context interactiu o dinàmic.
- Activitats desenvolupades en l'antiga EATP de 2n de BUP *Taller de Matemàtiques* a l'IES Pons d'Icart —dissenyada pels professors Ramon Masip i l'autor d'aquest treball, i aplicacions informàtiques elaborades amb el programari esmentat a l'apartat anterior, per a l'assignatura optativa de Batxillerat *Matemàtiques amb eines informàtiques*, dissenyada, desenvolupada i impartida pel professor Ramon Masip i l'autor d'aquest treball.

3 Resultats obtinguts

Els objectius que s'havien establert a la secció 1.2 s'han assolit amb la realització dels materials següents, els quals s'annexen a la memòria:

- Llibre imprès de 537 pàgines i 491 imatges, el qual inclou:
 - Set capítols que sumen un total de 365 pàgines que contenen el desenvolupament dels estudis fets al voltant dels set apartats de la secció 2.1, i la proposta de 183 activitats que s'hi relacionen. Aquestes es presenten amb una icona que suggereix els diferents nivells a qui van dirigides:
 - \overline{E}_1 : Alumnes de 1r. cycle d'ESO.
 - \overline{E}_2 : Alumnes de 2n. cycle d'ESO.
 - \overline{B} : Alumnes de Batxillerat.
 - \overline{P} : Professorat
 - Un capítol de 18 pàgines que conté transcripcions i traduccions d'una mostra de les fonts utilitzades.
 - Un capítol de 140 pàgines amb indicacions i desenvolupaments de les activitats proposades.
 - Un recull bibliogràfic de 15 pàgines amb 198 entrades.
- Col·lecció de 14 fitxers informàtics d'extensió MTH, en què es desenvolupen activitats interactives proposades en el llibre, amb l'ús del programa DERIVE.
- Col·lecció de 136 fitxers informàtics d'extensió FIG, en què es desenvolupen activitats interactives i dinàmiques proposades en el llibre, amb l'ús del programa CABRI.
- Col·lecció de 50 fitxers informàtics d'extensió MAC, en què es proporcionen macros per a les construccions amb el programa CABRI, de les activitats proposades en el llibre.

4 Conclusions finals

- Els materials elaborats constitueixen una aportació significativa per a la formació del professorat en el terreny de l'estudi de la gènesi de les idees matemàtiques, en el camp de la geometria i en alguns apartats del domini de l'aritmètica, i de la incorporació del programari CABRI i DERIVE a les tasques d'ensenyament/aprenentatge. Per aquest motiu, seria d'interès l'elaboració d'un curs de formació basat en aquests materials, de cara a optimitzar-ne el rendiment i a una futura ampliació en els camps no tractats. Un dels projectes de l'autor per al curs proper, és el de preparar una proposta de cara a la realització d'un curs d'aquestes característiques a l'any 2003. La idea de partida consistiria en la tria de cinc de les activitats desenvolupades en el treball, de dificultat creixent, per fer-ne un estudi i discutir-ne noves presentacions i ampliacions, en un curs de 10 sessions de 3 hores repartides de la manera següent:

Sessions senars Dues hores per situar el tema de l'activitat en el context històric i fer-ne un tractament sota la guia dels estudis realitzats en el present treball. Una hora per presentar el tractament fet de l'activitat i el procés de creació dels fitxers informàtics elaborats amb CABRI i DERIVE que la il·lustren.

Sessions parelles Tres hores dedicades, en parts iguals, a:

- L'estudi d'activitats del present treball relacionades amb la presentada a les sessions senars.
 - El disseny de noves presentacions de les activitats, i de noves activitats suggerides per les presentacions anteriors.
- Una part important dels materials es pot incorporar com a materials generadors de recursos didàctics, en els currículums que utilitzin estratègies metodològiques basades en el mètode genètic. Tenim un exemple d'aquesta incorporació, en un crèdit variable de Geometria dissenyat per l'autor per al segon any del primer cicle d'ESO o el primer any del segon cicle. Aquest es va elaborar a partir d'un treball previ de l'autor, citat en el projecte del present treball i a l'apartat de recursos d'aquesta memòria, concretat l'any 1995 en un curs de títol *Història de la Matemàtica: de la Geometria a l'Àlgebra*.
 - El professorat pot fer ús directe a les aules de les activitats proposades i desenvolupades, independentment de les estratègies metodològiques emprades. Dos exemples en poden ser, l'utilització de:
 - Les representacions pas a pas fetes amb el CABRI, amb l'ajut d'interruptors, per a la presentació de teoremes com el de Pitàgores, o construccions com la del pentàgon regular i la quadratura del cercle.⁸
 - Les funcions de càlcul aproximat d'arrels numèriques, creades amb el DERIVE, per a la visualització gràfica dels algorismes utilitzats.⁹

⁸Vegeu els fitxers `Eui47tr.FIG` del capítol 1, `Pentapto.FIG` del capítol 2 i `Quadc.FIG` del capítol 6.

⁹Vegeu el fitxer `Codiarre.MTH` del capítol 2.

- Una part important dels estudis fets poden ser consultats per l'alumnat de Batxillerat de manera directa. La seva utilitat consisteix en què proporciona una visió alternativa dels continguts curriculars. D'altra banda, constitueixen una referència important en la proposta i elaboració de treballs de recerca centrats en el terreny del tractament dels problemes i les idees matemàtiques, i en el de les direccions transversals que citem a l'apartat següent.
- Els estudis aporten relacions entre disciplines diferents, les quals poden contribuir al treball interdisciplinar entre departaments interessats en una visió integradora del fet cultural. En el desenvolupament dels temes s'hi troben les direccions transversals següents:
 - Història i gènesi de les idees matemàtiques, que enllaça la Matemàtica, la Filosofia i la Història. Tot el treball està immers en aquesta relació d'una manera implícita, essent els capítols 1, 3 i 6, on trobem més explícit aquest triple enllaç.
 - Construccions geomètriques planes i perspectives, que enllacen la Matemàtica, el Dibuix lineal i el Disseny Artístic i Gràfic. A tots els capítols, excepte el quart, hi trobem exemples. Mereixen consideració especial els capítols 6 i 7, en els quals es pot copsar un camp immens de possibilitats de relació entre aquestes disciplines.
 - En el projecte inicial es contemplava la direcció transversal que relacionava la Matemàtica amb les Ciències Experimentals. Amb motiu de no haver tractat els temes d'Àlgebra i Complexos, aquesta relació ha tingut un desenvolupament escàs, el qual s'ha centrat en algunes relacions amb l'Astronomia. Podrem trobar aquests camps relacionats en el capítol 5, i en una qüestió del capítol 4.
- Potencien l'ús del programari informàtic i fan palesa la seva rellevància com a eina vehicular de l'aprenentatge, mitjançant les aplicacions informàtiques proporcionades en el desenvolupament de les activitats. Aquestes constitueixen una mostra exhaustiva d'utilització del programari com a eina de presentació de les qüestions més diverses, i com a eina de recerca.

5 Relació de materials annexats

Els materials resultants del treball que s'annexen a la memòria són:

- Llibre imprès amb el sistema d'edició $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}_{\text{E}}$, de 537 pàgines i 491 imatges. Conté el desenvolupament dels estudis fets, la proposta i desenvolupament d'activitats que s'hi relacionen, i un recull bibliogràfic de 198 entrades.
- Un CD-Rom que conté:
 - La versió electrònica del llibre imprès en format PDF, en el fitxer `Prclau.PDF`, la qual s'aconsella per a una visualització en pantalla.

- La versió electrònica del llibre imprès en format Postcript, en el fitxer `Prclau.PS`. Aquesta pot resultar aconsellable en el moment d'imprimir, amb el visualitzador GSVIEW de l'interpret Ghostscript de llenguatge Postcript.¹⁰
- La carpeta `Activitats` amb set subcarpetes `Actx` —una per a cadascun dels set primers capítols del llibre, $1 \leq x \leq 7$ —, i dues subcarpetes `Altres` i `Traçar` en què hi ha 200 fitxers amb les versions de les activitats que havien de ser tractades amb el programari CABRI i DERIVE. Els fitxers CABRI tenen les extensions `FIG` i `MAC`, i els fitxers DERIVE l'extensió `MTH`. Les referències als fitxers continguts a `Actx`, es troben en el capítol 9 del llibre, el qual està dedicat a la resolució de les activitats proposades en els capítols anteriors. Les altres dues subcarpetes contenen alguns fitxers auxiliars tal com s'explica a l'inici del capítol 9.

¹⁰Aquest visualitzador és de lliure circulació i ús, i es pot obtenir de manera gratuïta a l'adreça www.cs.wisc.edu/~ghost/.

Referències

- [AAVV] AUTORS VARIS [1999]: «Problemas actuales de nuestra educación matemática primaria y secundaria», *Suma*, 31, 15–18.
- [Bi] A. J. BISHOP [2000]: «Quines matemàtiques ha de dominar una persona en el tercer mil·lenni?», *BIAIX*, 16, 32–34.
- [Ca] C. CAÑÓN [1993]: *La Matemàtica creació y descubrimiento*. UPCO, Madrid.
- [Do1] A. DOU [1967]: «Los paralogismos de Euclides y Saccheri en la teoría de las paralelas», *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, LXI, 2º, 155–174.
- [Do2] A. DOU [1970]: *Fundamentos de la matemática*. Labor, Barcelona.
- [Do3] A. DOU [1986]: «Euclides», *Historia de la Matemática Hasta el Siglo XVII*, 61–78. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [Do4] A. DOU [1992]: «Orígenes de la Geometría no Euclidiana: Saccheri, Lambert y Taurinus.», *Historia de la Matemática en el siglo XIX, (1ª parte)*, 44–63. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid.
- [Ed] H.M. EDWARDS [1977]: *Fermat's Last Theorem*. Springer, New York.
- [Gi] J. GIRBAU [1984]: «La geometria grega a l'ensenyament mitjà» en el curs *Noves tendències en l'educació matemàtica* de la UIMP a Barcelona.
- [Gu] M. DE GUZMÁN [1992]: «Tendències innovadores en educació matemàtica». *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, núm 7, 7–33. Barcelona.
- [HW] E. HAIRER, G.WANNER [1996]: *Analysis by Its History*. Springer, New York.
- [Hi] D. HILBERT [1899]: *Grundlagen der Geometrie*, 7a. ed. Berlin 1930. Traducció espanyola: *Fundamentos de la Geometria*. CSIC. Madrid, 1991.
- [KI] F. KLEIN [1908]: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Traducció anglesa, *Elementary Mathematics from an advanced Standpoint*, Dover, New York, 1945.
- [Kli] M. KLINE [1973]: *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math*. St. Martin's Press, New York. Traducció espanyola a càrrec de Santiago Garma, *El fracaso de la matemática moderna*, Siglo XXI, Madrid, 1984.
- [Pl1] J. PLA [1984]: *Las Matemáticas*. Montesinos, Barcelona.
- [Pl2] J. PLA [1995]: «Sherlock Holmes y Pitágoras en Mesopotamia», *Mundo Científico*, num. 161, vol. 15 836–845.

- [Pl3] J. PLA [1997–1998]: «Llibres». *SCM/Notícies* núm 7,8. Societat Catalana de Matemàtiques, Barcelona.
- [Pl4] J. PLA [1998]: *Damunt les espatlles dels gegants*. Edicions La Magrana, Barcelona, 1998. Premi de Literatura Científica.
- [Pl5] J. PLA [1998]: «El mètode com un canvi de llenguatge», *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, 13, 2, 35–84.
- [Pl6] J. PLA [1998]: «Panoràmica del sistema decimal posicional des dels orígens indis a l'Arismètica de Santcliment», *Calligraphia et Tipographia, Arithmetica et Numerica, chronologia*, Rubrica 7, de *Paleographica et Diplomatica Studia*, 102–256.
- [Pl7] J. PLA [2001]: «El infinito y la lógica de primer orden», *Investigación y Ciencia*, Temas 23.
- [PV] J. PLA, i P. VIADER [1999]: *René Descartes. La Geometria*. IEC - Pòrtic - Eumo, Barcelona.
- [Poi] H. POINCARÉ [1908]: *Science et méthode*. Flammarion, Paris. Traducció espanyola *Ciencia y método*, Espasa Calpe, Madrid, 1963.
- [Pol] G. POLYA [1962]: “L'enseignement des mathématiques et la loi biogénétique”, *Quand les savants laissent libre cours a leur imagination*; rassemblée et rédigé sous la direction de I. J. Good. Dunod, Paris, 1967. És una traducció de l'obra *The Scientists speculates: an anthology of partly baked ideas*. Basic Books, New York, 1962.
- [Sw] F. SWETZ i altres [1995]: *Learn from de Masters*. Mathematical Association of America, Washington.
- [To] O. TOEPLITZ [1949]: *The Calculus. A Genetic Approach*. The University of Chicago Press, Chicago, 1963. És una traducció de l'obra *Die Entwicklung der Infinitesimal Rechnung*, Springer, Berlin, 1949.