CARACTERÍSTICAS DEL DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO PROPORCIONAL EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA Y SECUNDARIA

Fernández Verdú, Ceneida y **Llinares Ciscar, Salvador**
Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante
ceneida.fernandez@ua.es
sllinares@ua.es

Resumen. El objetivo de este estudio es determinar perfiles de comportamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas proporcionales y no proporcionales y su variación a lo largo de la Educación Primaria y ESO. Los participantes del estudio fueron 755 estudiantes de Educación Primaria y ESO. El análisis de las respuestas nos permitió identificar cinco perfiles que muestran la utilización de relaciones aditivas independientemente del tipo de problema por los estudiantes de Educación Primaria y la utilización de relaciones multiplicativas independientemente del tipo de problema por los estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria. Estos resultados indican que el éxito en los problemas proporcionales no implica necesariamente que los estudiantes hayan sido capaces de construir el significado de la idea de razón.

Palabras clave. Razón, razonamiento proporcional, perfiles de comportamiento, transición del pensamiento aditivo al multiplicativo.

Characteristics of the development of proportional reasoning in Primary and Secondary School

Summary. The aim of this study is to determine the variation of students' behavioral profiles along Primary and Secondary School when solving proportional and non-proportional problems. The participants were 755 primary and secondary school students. From the analysis of students' answers we identify five profiles indicating that primary school students use additive relationships regardless of the type of problem and secondary school students use multiplicative relationships regardless of the type of problem. These findings indicate that students' success on proportional problems does not necessarily mean that students were able to construct the meaning of the idea of ratio.

Keywords. Ratio, proportional reasoning, behavioral profiles, transition from additive to multiplicative thinking.

1. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones centradas en el desarrollo del razonamiento multiplicativo y, en particular, en la transición del pensamiento aditivo al pensamiento multiplicativo han mostrado que esta transición no puede generalizarse de manera simple desde el pensamiento aditivo sino que requiere de un cambio cualitativo para manejar las nuevas situaciones (Greer, 1994; Kieren, 1994; Nunes y Bryant, 1996; Vergnaud, 1983). En particular, las estructuras multiplicativas en el dominio de los números naturales que proceden de las expresiones $a \times b = c$ tienen algunos aspectos en común con la estructura aditiva, por ejemplo la multiplicación como «suma repetida», pero también tienen su propia especificidad que no es reducible a aspectos aditivos (Clark y Kamii, 1996). Por ejemplo, el producto cartesiano (problemas del tipo: con 6 pantalones y 4 camisetas, ¿cuántas combinaciones posibles se pueden hacer?) o el significado de razón (Carlos ha recorrido en coche 45 km en 38 minutos, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 27 minutos?) (Greer, 1992).

Una característica de la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo es la dificultad de los estudiantes de diferentes edades en diferenciar situaciones proporcionales de situaciones con estructura aditiva, puesta de manifiesto por el uso abusivo de métodos aditivos erróneos para resolver las situaciones proporcionales (Hart, 1984; Misailidou y Williams, 2003; Tourniaire y Pulos, 1985) y, al mismo tiempo, por el uso abusivo de métodos multiplicativos erróneos para resolver situaciones con estructura aditiva (De Bock, Van Dooren, Janssens y Verschaffel, 2002, 2007; Ebersbach, Van Dooren, Goudriaan y Verscahffel, 2010; Fernández y Llinares, en prensa; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock y Verschaffel, en prensa; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens y Verschaffel, 2005).

Para ejemplificar qué se entiende por situación proporcional y aditiva, analizaremos los siguientes ejemplos y el comportamiento incorrecto seguido por los estudiantes en cada uno de ellos. Una situación proporcional viene modelizada mediante la función $f(x) = ax$. Por ejemplo la siguiente situación ($f(x) = 2x$):

• Marta y Sofía quieren pintar sus habitaciones exactamente del mismo color. Marta mezcla 3 botes de pintura amarilla y 6 botes de pintura roja. Sofía ha usado 7 botes de pintura amarilla. ¿Cuántos botes de pintura roja necesitará*?*

Algunos estudiantes emplean incorrectamente un método aditivo identificando una relación aditiva entre el número de botes de pintura amarilla (3) usados por Marta y el número de botes de pintura roja (6) como $3 + 3 = 6$, y usando esta relación para decidir el número de botes de pintura roja que Sofía necesitará $7 + 3 = 10$.

Por otro lado, las situaciones aditivas (situaciones no proporcionales) en este estudio vienen modelizadas por la función $f(x) = x + b$, $b \neq 0$. Por ejemplo la siguiente situación ($f(x) = x + 10$):

• Víctor y Ana están corriendo a la misma velocidad en una pista de atletismo. Pero Ana empezó a correr más tarde que Víctor. Cuando Ana había recorrido 5 vueltas, Víctor ya había recorrido 15. Si Ana ha recorrido 30 vueltas, ¿cuántas vueltas habrá recorrido Víctor?

En este caso los estudiantes usan incorrectamente métodos multiplicativos identificando en la frase «*Cuando Ana había recorrido 5 vueltas, Víctor ya había recorrido 15*» la relación «5 es a 15» que traducen en $5 \times 3 = 15$ vueltas de Víctor. La relación «× *3*» se usa luego para calcular las vueltas que habrá recorrido Víctor cuando Ana tiene recorridas 30 vueltas.

En este contexto, el razonamiento proporcional ha sido descrito como la consolidación del conocimiento aritmético en la escuela primaria y la cimentación de lo siguiente en la escuela secundaria (Lesh, Post y Behr, 1988). En esta investigación, el razonamiento proporcional se entiende como una forma de razonamiento matemático que no sólo implica un entendimiento de la relación multiplicativa que existe entre las cantidades que representan la situación sino que también implica la habilidad de discriminar situaciones proporcionales de situaciones no proporcionales (Modestou y Gagatsis, 2007, 2010).

La clave del comportamiento erróneo de los estudiantes en las situaciones proporcionales y aditivas está en la dificultad que tienen los estudiantes en coordinar aditiva o multiplicativamente los datos de la situación. En el primer caso, en la relación «cada bote de pintura amarilla de Marta con 2 botes de pintura roja de Sofía»; y en el segundo caso, por el uso de «5 es a 15, visto como $3 \times 5 = 15$» cuando no es pertinente.

Recientemente algunas investigaciones han empezado a mostrar en estudiantes de Educación Primaria la simultaneidad de estos dos comportamientos erróneos (uso de métodos aditivos incorrectos en situaciones proporcionales y uso de métodos multiplicativos incorrectos en situaciones aditivas (Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2010). Estos estudios indican que la tendencia a aplicar métodos aditivos tanto en problemas proporcionales como en no proporcionales decrece con la edad, mientras que la tendencia a aplicar métodos multiplicativos tanto en problemas proporcionales como en no proporcionales crece con la edad. Además, estos estudios indican que el uso de relaciones aditivas o multiplicativas depende fuertemente de si las cantidades de la situación son múltiplos o no.

Estos resultados previos han puesto de manifiesto la necesidad de obtener más información sobre las caracterísitisticas de la variación de estos comportamientos a lo largo de la Educación Primaria y la Educación Secundaria Obligatoria. En esta línea, la investigación presentada aquí se centra en el análisis de algunas características del desarrollo del razonamiento proporcional desde la Educación Primaria a la ESO. El objetivo es ir más allá de la identificación de variables de tareas que afectan a los logros de los estudiantes e intentar identificar variables con poder explicativo de este desarrollo. Para ello, analizamos las respuestas de estudiantes de primaria y secundaria a situaciones que reflejan los modelos $f(x) = x + b$ con $b \neq 0$ (situaciones que denominamos aditivas) y $f(x) = ax$ (problemas que denominamos proporcionales) con el objetivo de determinar posibles perfiles de comportamiento de los estudiantes y su variación a lo largo de primaria y secundaria. Las preguntas de investigación que nos planteamos son:

•¿Es posible identificar perfiles de comportamiento de los estudiantes cuando resuelven problemas aditivos y proporcionales?

• Si es posible esta identificación, ¿cómo varían estos perfiles de comportamiento desde la Educación Primaria a la Educación Secundaria Obligatoria?

2. MÉTODO

2.1. Participantes

Los participantes fueron 755 estudiantes de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria distribuidos por cursos tal y como muestra la tabla 1.

Tabla 1
Número de participantes por curso.

	PRIMARIA			SECUNDARIA				
Curso	4.º	5.º	6.º	1.º	2.º	3.º	4.º	Total
Número de estudiantes	65	68	64	124	151	154	129	755

Los estudiantes pertenecían a tres centros públicos de Educación Primaria y dos centros públicos de ESO. Aproximadamente había el mismo número de chicos que de chicas. Los centros están situados en ciudades donde las familias son de clase media y alta. Los principales sectores son la industria y los servicios.

2.2. Instrumento y procedimiento

Los estudiantes de Educación Primaria y ESO resolvieron diferentes problemas proporcionales y aditivos. A continuación se detalla el diseño de los problemas y el procedimiento que se llevó a cabo.

2.2.1. Diseño de los problemas

En primer lugar, consideramos 8 situaciones que implicaran cantidades discretas (por ejemplo, cargar cajas en un camión) y 8 situaciones que implicaran cantidades continuas (por ejemplo, patinar una cierta cantidad de metros). Para cada una de estas situaciones creamos la versión proporcional (problemas que reflejan situaciones del tipo $f(x) = ax$ con $a \neq 0$) y aditiva (problemas que reflejan situaciones del tipo $f(x) = x + b$, con $b \neq 0$) manipulando únicamente una frase. Por ejemplo: «*Plantan a la misma velocidad pero Juan empezó antes*» en los problemas aditivos y «*Empezaron al mismo tiempo pero Juan es más rápido*» en los problemas proporcionales.

Un ejemplo de problema proporcional utilizado es el siguiente:

• Raquel y Juan están plantando flores. Empezaron al mismo tiempo pero Juan es más rápido. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas flores ha plantado Juan?

En este problema la frase «*Empezaron al mismo tiempo pero Juan es más rápido. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores*» describe una relación multiplicativa entre las cantidades (4 flores de Raquel se relaciona con 12 flores de Juan, y esta relación siempre es la misma desde el primer momento). De esta manera, en cada momento, el número de flores que ha plantado Juan es 3 veces el plantado por Raquel ($12 = 4 \times 3$).

Sin embargo, en los problemas aditivos como el siguiente:

• Raquel y Juan están plantando flores. Plantan a la misma velocidad pero Juan empezó antes. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas flores ha plantado Juan?

la frase «*Plantan a la misma velocidad pero Juan empezó antes. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores*» describe una relación aditiva entre las cantidades. Juan ha plantado 8 flores más que Raquel (12 = 4 + 8). La diferencia entre ambas situaciones está en considerar «3 veces», desde la relación multiplicativa entre 4 y 12 y «8 flores más», desde la relación aditiva entre 4 y 12.

De esta manera construimos 32 problemas en los que se variaron el tipo de razón (entera o no entera) entre las cantidades obteniendo un total de 64 problemas. El hecho de manipular las dos variables –el tipo de razón entre las cantidades (entera o no entera) y la naturaleza de las cantidades (discreta o continua)– viene justificado porque las investigaciones sobre el razonamiento proporcional han indicado que estas dos variables influyen en las actuaciones de los estudiantes en los problemas proporcionales (Cramer, Post y Currier, 1993; Fernández y Llinares, 2011; Fernández, Llinares, Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2011; Karplus, Pulos y Stage, 1983; Tourniaire y Pulos, 1985; Van Dooren, De Bock, Evers y Verschaffel, 2009). En nuestro estudio, las razones (interna y externa) en las situaciones proporcionales eran ambas enteras o ambas no enteras, de la misma forma que en las situaciones aditivas los números usados eran múltiplos entre sí o no.

Además, para evitar el efecto de otros factores externos se controlaron algunas variables. Así, se tuvo en cuenta el tamaño de los números (números hasta tres dígitos), la complejidad de cálculo (por ejemplo, el resultado siempre es un número entero), el contexto (siempre son acciones) y la posición de la cantidad desconocida cuando se lee el enunciado del problema (la cantidad desconocida siempre es la segunda magnitud que aparece en el problema).

Con estos 64 problemas formamos 8 cuestionarios con 4 versiones con diferente orden en los problemas y se añadieron 4 problemas «distractores». Los problemas «distractores» fueron incluidos para variar las tareas propuestas y evitar los efectos de aprendizaje y posibles respuestas estereotipadas por parte de los alumnos. Estos problemas fueron formulados de forma que se mantuviesen lo más parecidos posible a los otros problemas pero con una estructura diferente. Un ejemplo de este tipo de problema utilizado es:

• Daniel y Juan están jugando al ordenador. Jugaron el mismo tiempo pero Daniel consiguió menos puntos que Juan. Daniel consiguió 320 puntos menos que Juan. Si Juan consiguió 850 puntos, ¿cuántos puntos consiguió Daniel?

que es un problema de comparación donde la incógnita es la cantidad comparada.

De esta manera los cuestionarios estaban formados por 12 problemas: 4 problemas proporcionales (P), 4 problemas aditivos (A) y los 4 problemas distractores. 2 de los 4 problemas proporcionales (P) y 2 de los 4 problemas aditivos (A) tenían cantidades discretas (D) (uno con razones internas y externas enteras [I], D-I, y otro con razones internas y externas no enteras [N], D-N). Los otros 4 problemas (2 proporcionales y 2 aditivos) tenían cantidades continuas (C) (de nuevo, 2 con razones enteras, C-I, y 2 con razones no enteras, C-N).

La tabla 2 muestra diferentes ejemplos de los problemas usados ejemplificando sus características.

2.2.2. Aplicación del instrumento

Los estudiantes resolvieron los 12 problemas del cuestionario durante el transcurso de su clase habitual de matemáticas. El formato de presentación del cuestionario consistía en un cuaderno compuesto por 7 folios. Cada problema estaba en una página diferente. En un primer cuadro se les presentaba el enunciado del problema, en un segundo cuadro debían realizar los cálculos y en un tercer cuadro debían completar una frase con el resultado obtenido. Podían utilizar calculadoras, pero se indicó que debían escribir las operaciones en el cuadro correspondiente.

2.3. Análisis

Para cada uno de los problemas se analizó el proceso de resolución seguido por cada estudiante, fijándonos en el tipo de relación entre las cantidades que usaba para resolver el problema, con el propósito de caracterizar el tipo de respuesta empleada. Este proceso siguió una aproximación inductiva en la que un grupo de cinco investigadores analizaron una muestra de respuestas a los diferentes problemas, para generar descriptores de las estrategias que parecían estar utilizando los estudiantes en cada tipo de problema. Estos descriptores para cada problema se fueron refinando según se iban analizando nuevas respuestas. Este proceso se repitió para cada uno de los problemas, y finalmente se consideraron las respuestas de todos los problemas en conjunto para ver si había evidencia de solapamiento entre los descriptores considerados.

Las respuestas de los estudiantes a los diferentes problemas fueron clasificadas como:

• «Respuestas proporcionales» (Prop) cuando el estudiante utilizaba un método multiplicativo independientemente del tipo de problema. Dentro de los métodos multiplicativos fueron identificados el enfoque escalar que se centra en la identificación y uso de la razón interna (relaciones multiplicativas entre cantidades de la misma magnitud), el enfoque funcional centrado en la identificación y uso de la razón externa (relaciones multiplicativas entre cantidades de distinta magnitud), las estrategias constructivas que reflejan la propiedad $f(a + b) = f(a) + f(b)$, la estrategia de reducción a la unidad (caso particular del enfoque funcional) y el uso del algoritmo de la regla de tres (el estudiante relaciona los datos multiplicativamente entre los productos cruzados).

• «Respuestas aditivas» (Addit), cuando empleaban relaciones aditivas entre las cantidades independientemente del tipo de problema.

• «Otras respuestas» (Ot) cuando la respuesta era sin sentido o no estaba clara. Los errores de cálculo no fueron considerados como «otras respuestas» siempre y cuando se pudiesen clasificar como respuestas proporcionales o aditivas.

Con esta categorización, en los problemas proporcionales las respuestas proporcionales son correctas y las respuestas aditivas u otras respuestas son incorrectas. Mientras que en los problemas aditivos, las respuestas aditivas son correctas y las respuestas proporcionales y otras respuestas son incorrectas.

Tabla 2

Ejemplo de problemas considerando la naturaleza de las cantidades (versiones D y C) y considerando el tipo de razón y relación entre los números (versiones I y N).

	EJEMPLOS	I	N
P-D	Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Empezaron al mismo tiempo pero Tomás es más rápido. Cuando Pedro ha cargado ● cajas, Tomás ha cargado ● cajas. Si Pedro ha cargado ● cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?	40 160 80 **Prop**: 320 **Addit**: 200	40 100 60 **Prop**: 150 **Addit**: 120
A-D	Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado ● cajas, Tomás ha cargado ● cajas. Si Pedro ha cargado ● cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás?	40 160 80 **Prop**: 320 **Addit**: 200	40 100 60 **Prop**: 150 **Addit**: 120
P-C	Ana y Raquel están patinando. Empezaron al mismo tiempo pero Raquel es más rápida. Cuando Ana ha patinado ● metros, Raquel ha patinado ● metros. Si Ana ha patinado ● metros, ¿cuántos metros ha patinado Raquel?	150 300 600 **Prop**: 1.200 **Addit**: 750	80 120 200 **Prop**: 300 **Addit**: 240
A-C	Ana y Raquel están patinando. Patinan a la misma velocidad pero Raquel empezó antes. Cuando Ana ha patinado ● metros, Raquel ha patinado ● metros. Si Ana ha patinado ● metros, ¿cuántos metros ha patinado Raquel?	150 300 600 **Prop**: 1.200 **Addit**: 750	80 120 200 **Prop**: 300 **Addit**: 240

Las cantidades son esquemáticamente representadas como a b
c x

(**Prop**: Solución estrategia proporcional, **Addit**: Solución estrategia aditiva)

Una vez categorizadas las respuestas, se llevó a cabo un análisis estadístico de regresión logística de medidas repetidas usando el método de estimación de ecuaciones generalizado (GEE). Este análisis se realizó mediante el *software* SPSS 17. Se decidió usar este tipo de análisis puesto que esperábamos diferencias significativas en el tipo de respuesta dada por parte de los estudiantes en los diferentes tipos de problemas y en los diferentes cursos, teniendo en cuenta la estructura numérica del problema (presencia o ausencia de razones enteras) y la naturaleza de las cantidades (discretas o continuas). Este análisis nos permitía determinar si estas diferencias eran o no significativas.

3. RESULTADOS

En esta sección presentamos, en primer lugar, la identificación de los perfiles. En segundo lugar, la variación de los perfiles por curso.

3.1. Determinación de los perfiles

A partir del análisis estadístico de regresión logística de medidas repetidas, se obtuvo que la naturaleza de las cantidades no tenía ninguna influencia significativa, pero el tipo de razón y relación multiplicativa (no entera [N] y entera [I]) sí influía en la respuesta dada por los estudiantes tanto en los problemas aditivos como en los proporcionales.

De esta manera, en los problemas aditivos (A) las relaciones multiplicativas no enteras (N), es decir, cuando los números usados no eran múltiplos entre sí, inducían a los estudiantes a dar respuestas aditivas correctas ($\chi^2(1, N = 755) = 75{,}936$, $p < 0{,}001$), mientras que las relaciones multiplicativas enteras (I), es decir cuando los números usados eran múltiplos entre sí, inducían a dar respuestas proporcionales incorrectas ($\chi^2(1, N = 755) = 57.046$, $p < 0{,}001$). Por otra parte, en los problemas proporcionales (P) las razones enteras (I) inducen a los estudiantes a dar respuestas proporcionales ($\chi^2(1, N = 755) = 75{,}936$, $p < 0{,}001$), mientras que la presencia de razones no enteras (N) induce a los estudiantes a proporcionar respuestas aditivas incorrectas ($\chi^2(1, N = 755) = 69.866$, $p < 0{,}001$).

Como consecuencia de la clasificación de las respuestas y de los resultados del análisis de regresión logística, definimos diferentes *perfiles de comportamiento de los estudiantes:*

• Tipo 1. Perfil correcto. Los estudiantes dan respuestas proporcionales a los 4 problemas proporcionales y dan respuestas aditivas a los 4 problemas aditivos.

• Tipo 2. Perfil proporcional. Los estudiantes dan respuestas proporcionales tanto a los problemas aditivos como a los proporcionales.

• Tipo 3. Perfil aditivo. Los estudiantes dan respuestas aditivas tanto a los problemas aditivos como a los problemas proporcionales.

• Tipo 4. Perfil que depende del tipo de razón (entera o no entera). Los estudiantes dan respuestas proporcionales en los problemas con razones o relaciones multiplicativas enteras (I) y dan respuestas aditivas en los problemas con razones o relaciones multiplicativas no enteras (N). Esto lo hacen independientemente del tipo de problema proporcional o aditivo (P o A).

• Tipo 5. Perfil otros. Los estudiantes emplean «otras respuestas» (ya se ha mencionado anteriormente que estas respuestas son las respuestas incorrectas sin sentido).

A continuación, cada estudiante fue clasificado en uno de los perfiles considerando las respuestas dadas, de la siguiente manera:

• Un mínimo de 6 respuestas adecuadas (respuesta aditiva a los problemas aditivos y respuesta proporcional a los problemas proporcionales) y hasta 2 respuestas empleando «otras respuestas» fueron clasificados en el perfil correcto (Tipo 1).

• Un mínimo de 6 respuestas proporcionales y hasta 2 respuestas empleando «otras respuestas» fueron clasificados en el perfil proporcional (Tipo 2).

Por ejemplo, el protocolo de la figura 1 muestra el conjunto de respuestas de un estudiante que fue categorizado en el perfil proporcional.

• Un mínimo de 6 respuestas aditivas y hasta 2 respuestas empleando «otras respuestas» fueron clasificados en el perfil aditivo (Tipo 3).

Por ejemplo, el protocolo de la figura 2 muestra el conjunto de respuestas de un estudiante que fue categorizado en el perfil aditivo.

• Un mínimo de 6 respuestas dependiendo del tipo de razón y hasta 2 respuestas empleando «otras respuestas» fueron clasificados en el perfil que depende del tipo de razón (Tipo 4).

Por ejemplo, el protocolo de la figura 3 muestra el conjunto de respuestas de un estudiante que fue categorizado en este perfil.

• Un mínimo de 6 respuestas identificadas como «otras respuestas» y hasta 2 respuestas proporcionales o aditivas fueron clasificados en el perfil otros (Tipo 5).

Para corroborar los perfiles determinados de esta manera, se realizó un análisis Cluster que confirmó la aparición de los perfiles expuestos: perfil correcto (Tipo 1), perfil proporcional (Tipo 2), perfil aditivo (Tipo 3), perfil que depende del tipo de razón (Tipo 4) y perfil otros (Tipo 5). Estos perfiles definidos de esta manera agruparon el 69% de los estudiantes. El 31% restante (según se han considerado las respuestas) no se pudieron clasificar en ninguno de los 5 perfiles. En este 31% están, por ejemplo, los estudiantes que han dado 5 respuestas proporcionales y 3 respuestas identificadas como «otras respuestas» o los estudiantes que han dado 4 respuestas aditivas, 1 respuesta proporcional y 3 respuestas identificadas como «otras respuestas».

Figura 1
Protocolo de un estudiante categorizado en el perfil proporcional.

Ana y Raquel están patinando alrededor de una pista. Patinan a la misma velocidad pero Raquel empezó antes. Cuando Ana ha dado 3 vueltas, Raquel ha dado 12 vueltas. Si Ana ha dado 6 vueltas, ¿cuántas vueltas ha dado Raquel? $3 — 12$ $6 — x$ $x = \frac{12 \cdot 6}{3} = 24$	Juan y Carolina conducen un coche alrededor de un circuito. Conducen a la misma velocidad pero Juan empezó más tarde. Cuando Juan ha dado 40 vueltas, Carolina ha dado 60 vueltas. Si Juan ha dado 100 vueltas, ¿cuántas vueltas ha dado Carolina? $40 — 60$ $100 — x$ $x = \frac{100 \cdot 60}{40} = 150$
Sara y Belén están montando en bicicleta. Montan a la misma velocidad pero Belén empezó antes. Cuando Sara ha recorrido 3 Km, Belén ha recorrido 12 km. Si Sara ha recorrido 9 km, ¿cuántos km. ha recorrido Belén? $3 — 12$ $9 — x$ $x = \frac{9 \cdot 12}{3} = 36$	Julio y Antonio están pintando una valla. Pintan a la misma velocidad pero Julio empezó más tarde. Cuando Julio ha pintado 20 m, Antonio ha pintado 50 m. Si Julio ha pintado 30 m. ¿cuántos metros ha pintado Antonio? $20 — 50$ $30 — x$ $x = \frac{30 \cdot 50}{20} = 75$
Estefanía y Julia están lavando platos. Empezaron al mismo tiempo pero Julia es más rápida. Cuando Estefanía ha lavado 8 platos, Julia ha lavado 24 platos. Si Estefanía ha lavado 16 platos, ¿cuántos platos ha lavado Julia? $8 — 24$ $16 — x$ $x = \frac{24 \cdot 16}{8} = 48$	Carlos y Samuel están escribiendo el mismo texto. Empezaron al mismo tiempo pero Carlos es más lento. Cuando Carlos ha escrito 400 letras, Samuel ha escrito 1800 letras. Si Carlos ha escrito 1000 letras, ¿cuántas letras ha escrito Samuel? $400 — 1800$ $1000 — x$ $x = \frac{1000 \cdot 1800}{400} = 4500$
Ana y Raquel están patinando. Empezaron al mismo tiempo pero Raquel es más rápida. Cuando Ana ha patinado 150 metros, Raquel ha patinado 300 metros. Si Ana ha patinado 600 metros, ¿cuántos metros ha patinado Raquel? $150 — 300$ $600 — x$ $x = \frac{600 \cdot 300}{150} = 1200$	Cristina y Alberto están montando a caballo. Empezaron al mismo tiempo pero Cristina es más lenta. Cuando Ana Cristina recorrido 4 km, Alberto ha recorrido 6 km. Si Cristina ha recorrido 14 km, ¿cuántos km. ha recorrido Alberto? $4 — 6$ $14 — x$ $x = \frac{14 \cdot 6}{4} = 21$

Figura 2
Protocolo de un estudiante categorizado en el perfil aditivo.

Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado 4 cajas, Tomás ha cargado 16 cajas. Si Pedro ha cargado 8 cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás? 16 −4 12 +8 20	Ana y David están fabricando muñecas. Fabrican a la misma velocidad pero David empezó antes. Cuando Ana ha fabricado 12 muñecas, David ha fabricado 18 muñecas. Si Ana ha fabricado 30 muñecas, ¿cuántas muñecas ha fabricado David? 18 −12 06 +30 36
Sofía y Sara están caminando por el campo. Caminan a la misma velocidad pero Sofía empezó más tarde. Cuando Sofía ha caminado 5 metros, Sara ha caminado 10 metros. Si Sofía ha caminado 20 metros, ¿cuántos metros ha caminado Sara? 10 −5 5 +20 25	María y Pablo están nadando. Nadan a la misma velocidad pero Pablo empezó antes. Cuando María ha nadado 20 metros, Pablo ha nadado 30 metros. Si María ha nadado 50 metros, ¿cuántos metros ha nadado Pablo? 30 −20 10 +50 60
Laura y Luís están pegando sellos en postales. Empezaron al mismo tiempo pero Laura es más lenta. Cuando Laura ha pegado 8 sellos, Luís ha pegado 40 sellos. Si Laura ha pegado 16 sellos, ¿cuántos sellos ha pegado Luís? 40 −8 32 +16 48	Raquel y Juan están plantando flores. Empezaron al mismo tiempo pero Juan es más rápido. Cuando Raquel ha plantado 8 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas flores ha plantado Juan? 12 −8 4 +20 24
Susana y Margarita están remando una canoa. Empezaron al mismo tiempo pero Margarita es más rápida. Cuando Susana ha remado 4 metros, Margarita ha remado 12 metros. Si Susana ha remado 8 metros, ¿cuántos metros ha remado Margarita? 12 −4 8 +8 16	Pablo y Tomás están escalando la fachada de un rascacielos. Empezaron a la vez pero Pablo es más lento. Cuando Pablo ha escalado 4 metros, Tomás ha escalado 14 metros. Si Pablo ha escalado 10 metros, ¿cuántos metros ha escalado Tomás? 14 −4 10 +10 20

Figura 3
Protocolo de un estudiante categorizado en el perfil que depende del tipo de razón.

Raquel y Juan están plantando flores. Plantan a la misma velocidad pero Juan empezó antes. Cuando Raquel ha plantado 4 flores, Juan ha plantado 12 flores. Si Raquel ha plantado 20 flores, ¿cuántas flores ha plantado Juan? $12 = 3 \cdot 12$ $20 \cdot 3 = 60$	Pedro y Tomás están cargando cajas en un camión. Cargan a la misma velocidad pero Pedro empezó más tarde. Cuando Pedro ha cargado 40 cajas, Tomás ha cargado 100 cajas. Si Pedro ha cargado 60 cajas, ¿cuántas cajas ha cargado Tomás? $100 - 40 = 60$ $60 + 60 = 120$
Pablo y Tomás están escalando la fachada de un rascacielos. Escalan a la misma velocidad pero Pablo empezó más tarde. Cuando Pablo ha escalado 3 metros, Tomás ha escalado 9 metros. Si Pablo ha escalado 6 metros, ¿cuántos metros ha escalado Tomás? $9 = 3 \cdot 3$ $6 \cdot 3 = 18$	Sofía y Sara están caminando por el campo. Caminan a la misma velocidad pero Sofía empezó más tarde. Cuando Sofía ha caminado 20 metros, Sara ha caminado 50 metros. Si Sofía ha caminado 70 metros, ¿cuántos metros ha caminado Sara? $50 - 20 = 30$ $70 + 30 = 100$
Ana y David están fabricando muñecas. Empezaron al mismo tiempo pero Ana es más lenta. Cuando Ana ha fabricado 12 muñecas, David ha fabricado 24 muñecas. Si Ana ha fabricado 48 muñecas, ¿cuántas muñecas ha fabricado David? $48 \times 2 = 96$	Laura y Luís están pegando sellos en postales. Empezaron al mismo tiempo pero Laura es más lenta. Cuando Laura ha pegado 80 sellos, Luís ha pegado 280 sellos. Si Laura ha pegado 120 sellos, ¿cuántos sellos ha pegado Luís? $280 - 80 = 200$ $120 + 200 = 320$
María y Pablo están nadando. Empezaron al mismo tiempo pero María es más lenta. Cuando María ha nadado 25 metros, Pablo ha nadado 75 metros. Si María ha nadado 125 metros, ¿cuántos metros ha nadado Pablo? $75 = 3 \cdot 25$ $125 \times 3 = 375$	Susana y Margarita están remando una canoa. Empezaron al mismo tiempo pero Margarita es más rápida. Cuando Susana ha remado 4 metros, Margarita ha remado 10 metros. Si Susana ha remado 6 metros, ¿cuántos metros ha remado Margarita? $10 - 6 = 6$ $6 + 6 = 12$ m

3.2. Variación de los perfiles por curso

La figura 4 muestra la variación de los perfiles de los estudiantes a lo largo de primaria y secundaria.

Estos datos indican que un 40% de los estudiantes de 4.º curso de primaria emplearon relaciones aditivas para resolver los problemas proporcionales y aditivos. Sin embargo, un 55% de los estudiantes de 4.º curso de ESO resolvieron tanto los problemas proporcionales como los aditivos dando respuestas proporcionales.

Por otra parte, en relación con las tendencias desde primaria a secundaria podemos observar que el porcentaje de estudiantes clasificados en el perfil proporcional (Tipo 2) aumenta de manera clara (de 0,0% a 55,0%), mientras que el porcentaje de estudiantes clasificados en el perfil aditivo (Tipo 3) decrece (del 40,0% al 13,2%). Estas dos tendencias se «cruzan» entre 2.º y 3.º de la ESO, es decir, hasta 2.º de la ESO el porcentaje de estudiantes que resuelven todos los problemas aditivamente es mayor que el porcentaje de estudiantes que resuelve todos los problemas proporcionalmente (independientemente del tipo de problema), y a partir de 3.º ESO esta tendencia cambia: el porcentaje de estudiantes que resuelven todos los problemas proporcionalmente es mayor que el que resuelve todos los problemas aditivamente.

Con relación al perfil correcto (Tipo 1), ningún estudiante fue clasificado en este perfil hasta 2.º curso de la ESO (2,6%), aumentando este porcentaje ligeramente hasta un 5,4% en 4.º curso de la ESO.

Por último, el porcentaje de estudiantes que dan un tipo de respuesta u otra dependiendo del tipo de razón entera o no entera, se mantiene relativamente bajo. En primaria crece (entre 4.º y 5.º pasa del 1,5% al 10,3%), tomando el valor más alto en 5.º y posteriormente va decreciendo a lo largo de la ESO.

Otro rasgo característico de estos datos es que los porcentajes de estudiantes clasificados en el perfil «otros» (Tipo 5) va decreciendo gradualmente entre los 9 y 16 años de edad (del 26,2% en 4.º de primaria al 0,8% en 4.º de secundaria). Esta tendencia indica que en cierta medida los estudiantes van definiendo más claramente sus aproximaciones a la resolución de los problemas, empleando métodos aditivos o proporcionales, desde primaria a secundaria.

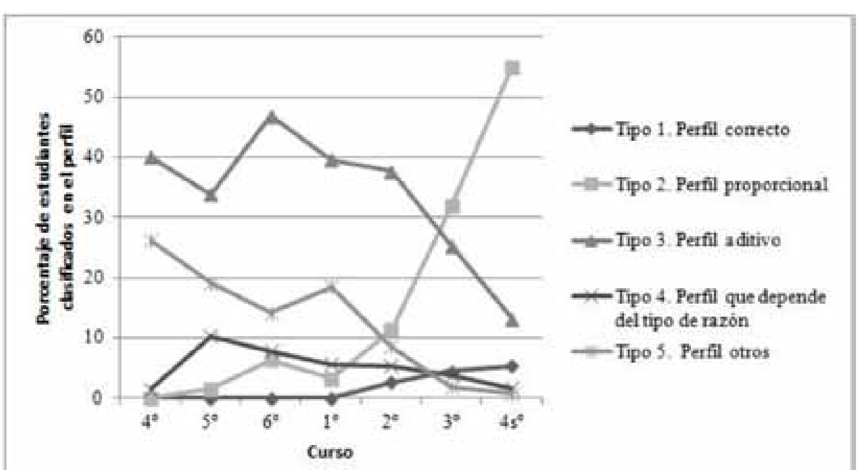
4. CONCLUSIONES Y DISCUSIÓN

La presente investigación aporta información sobre la variación de las respuestas aditivas y proporcionales dadas por estudiantes de 9 a 16 años (desde 4.º de Educación Primaria hasta 4.º de la ESO) a problemas aditivos y proporcionales. Los resultados nos han permitido identificar cinco perfiles de comportamiento de los estudiantes en la resolución de problemas proporcionales y aditivos desde primaria a secundaria aportando información sobre la construcción del significado de la idea de razón.

4.1. La complementariedad de los perfiles aditivo y proporcional desde primaria a secundaria

Una primera idea que aporta nuestro estudio es la aparición tardía y su lento crecimiento posterior del «perfil correcto». En segundo lugar, los perfiles «aditivo» y «proporcional» han mostrado una variación complementaria. Mientras el perfil «aditivo» va disminuyendo, el perfil «proporcional» aumenta, dándose el cambio de mayoría entre 2.º y 3.^{er} curso de ESO. Estos resultados indican que hay una variación desde la utilización de las relaciones aditivas «independientemente del tipo de problema» durante la Educación Primaria y primeros cursos de la ESO hasta la utilización de métodos multiplicativos «independientemente del tipo de problema» al final de la ESO.

Figura 4
Variación de los diferentes perfiles de los estudiantes a lo largo de primaria y secundaria.



Este fenómeno ha sido identificado con alumnos de Educación Primaria (Van Dooren et al., 2010) en otro contexto, lo que indica que esta conducta puede ser una característica del desarrollo del razonamiento proporcional y que el hecho de que se dé antes o después podría venir explicado por el desarrollo del currículo. El hecho de que el cambio de tendencia entre el perfil «proporcional» (Tipo 2) y «aditivo» (Tipo 3) se dé en el paso de 2.º a 3.º de la ESO indica la influencia del currículo al ser éste el momento en el que se introducen de manera más sistemática las magnitudes proporcionales (razón y proporción) y la aproximación algorítmica para resolver los problemas denominados «de regla de tres» que hace que los estudiantes empiecen a dar respuestas proporcionales incluso en problemas en los que no son adecuadas.

Por otra parte, teniendo en cuenta la manera en la que hemos caracterizado los perfiles de comportamiento de los estudiantes, se ha mostrado que un mayor nivel de éxito en los problemas proporcionales no es una evidencia del desarrollo del razonamiento proporcional al incrementarse también las respuestas proporcionales en los problemas aditivos, puesto de manifiesto por el incremento del perfil «proporcional». Por tanto, este resultado aporta apoyo empírico al modelo de desarrollo proporcional propuesto por Modestou y Gagatsis (2010) que incorpora la capacidad de discriminar situaciones no proporcionales de las proporcionales en la caracterización del desarrollo del razonamiento proporcional.

4.2. La construcción del significado del concepto de razón

El resultado anterior traslada nuestra atención al significado de la idea de razón y su relación con el desarrollo del pensamiento multiplicativo (Steffe, 1994). El comportamiento de los estudiantes a lo largo de primaria y secundaria en relación con los problemas proporcionales y no proporcionales y el hecho de que los estudiantes proporcionen respuestas aditivas o proporcionales dependiendo del tipo de razón (entera o no entera) parece indicar que la construcción de la idea de razón es independiente de los esquemas de contar vinculados a los procesos de reiteración. Sólo en aquellos casos en los que la relación entre las cantidades consideradas es entera, es decir, los números usados son múltiplos entre sí, es posible que el estudiante pueda iterar una unidad puesta de manifiesto por la idea de «veces». Sin embargo, cuando la relación entre las cantidades no es entera, es más difícil la identificación e iteración de la unidad para resolver la situación. De ahí que los estudiantes reviertan en métodos de resolución basados en el uso de relaciones aditivas entre los números.

El hecho de que los estudiantes a lo largo de la Educación Primaria den a los problemas proporcionales respuestas aditivas, y a lo largo de la ESO den a los problemas aditivos respuestas proporcionales, indica que no han construido el significado de razón como una relación entre cantidades que debe ser iterada considerando la covariación en dos sucesiones numéricas. Este hecho, por tanto, indica que el desarrollo del currículo no ayuda a la construcción por parte de los estudiantes de la idea de razón como una relación entre cantidades que debe ser conceptualizada como un nuevo tipo de unidad.

Esta interpretación viene apoyada por la aparición del perfil de comportamiento que está influenciado por el tipo de razón entera o no entera (Tipo 4). Este perfil está más presente a lo largo de la Educación Primaria, cuando el estudiante parece estar influenciado por factores superficiales a la estructura numérica del problema. La aparición de este perfil de comportamiento y el hecho de que los estudiantes tengan más éxito con los problemas proporcionales con razones enteras que con razones no enteras puede ser explicado mediante los procesos de Unitizing y Norming (Lamon, 1994), que ponen de manifiesto la necesidad de completar los significados de la relación «uno a muchos» con los significados de la relación «*a* es a *b*» cuando *a* y *b* tienen una relación multiplicativa no entera, generándose además un significado que no debería reducirse a un cociente entre dos números. En los problemas proporcionales el estudiante tiene que construir una unidad de referencia y reinterpretar la situación en términos de esta unidad; sin embargo, los resultados muestran que los estudiantes construyen un significado limitado de la idea de razón a lo largo de la Educación Primaria y la ESO. Los resultados de esta investigación indican que los estudiantes deben complementar el significado de la idea de razón proveniente de la estructura aditiva (significado de «uno a varios») incorporando nuevos significados generados independientemente de las estructuras aditivas (Kieren, 1994) (por ejemplo «dos es a tres» como un índice comparativo).

Por otra parte, los resultados obtenidos muestran la necesidad de realizar estudios longitudinales con el objetivo de proporcionar información sobre el desarrollo individual de cada estudiante. Este tipo de estudios permitiría investigar la complementariedad del pensamiento aditivo y multiplicativo, proporcionando información acerca de si todos los estudiantes pasan por una fase intermedia donde las estrategias se ven influenciadas por el tipo de razón o no o si hay estudiantes que en una fase intermedia emplean correctamente la estrategia aditiva y la estrategia proporcional antes de comenzar a usar de forma abusiva las estrategias proporcionales.

Además, el hecho de que estas características del desarrollo del razonamiento proporcional hayan sido identificadas también en otros contextos y con otro tipo de estudiantes con el mismo formato de los problemas (valor perdido) sugiere la necesidad de ampliar este tipo de estudios empleando otros tipos de problemas; por ejemplo problemas de comparación numérica donde, dadas dos razones, éstas tienen que ser comparadas o problemas cualitativos que requieren una comparación pero no dependiente de valores numéricos específicos.

5. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA

Nuestros resultados tienen implicaciones en la enseñanza. En primer lugar, el que los estudiantes a lo largo de primaria y secundaria den respuestas proporcionales de manera correcta en los problemas proporcionales pero de manera incorrecta en los problemas aditivos y que las respuestas aditivas correctas usadas en los problemas aditivos disminuyan en secundaria plantea la necesidad de centrar la atención en la enseñanza sobre el análisis de las relaciones entre las cantidades de las situaciones como un objetivo explícito. En este sentido, Kaput y West (1994) sugieren que el currículo necesita presentar tanto situaciones proporcionales como no proporcionales (por ejemplo, situaciones aditivas) y proporcionar a los estudiantes la oportunidad de discriminar ambos tipos de situaciones. Esto implica la necesidad de desarrollar la capacidad de discriminar este tipo de situaciones trabajando a través de situaciones en las que se tengan que realizar comparaciones multiplicativas de cantidades del mismo espacio de medida y de diferente espacio de medida seguido de una inferencia analógica entre las comparaciones obtenidas (Gómez, 1999).

En este sentido, el uso desde la Educación Primaria de «tablas de números proporcionales» y no proporcionales en contextos reales puede ayudar a los estudiantes a identificar las relaciones entre los números (Lamon, 1999; Singer, Kohn y Resnick, 1997). Una implicación de estas reflexiones es que la idea de razón como un índice comparativo debería ser introducida en el currículo de primaria no vinculada a la idea de fracción, ni a la idea de cociente. Es posible que si el currículo vincula inicialmente la idea de fracción a la idea de razón, y teniendo en cuenta que en los últimos años de primaria se introduce la aritmética de fracciones, puede inducir a los estudiantes a enfatizar el aspecto procedimental frente a la identificación de la idea de razón como índice comparativo.

En segundo lugar, estas implicaciones muestran también la necesidad de usar diferentes tipos de razones (enteras y no enteras) al introducir la idea de razón como un índice comparativo. Posiblemente, las relaciones doble/mitad, triple/tercio, etc. puedan ser usadas inicialmente para que los estudiantes de Educación Primaria empiecen a manejar contextos en los que se diferencie entre fracción y razón. Pero deben ser complementadas con otro tipo de relaciones no enteras (por ejemplo «2 es a 3») y su uso en procesos iterativos en el análisis de tablas de números proporcionales.

En tercer lugar, la necesidad de utilizar diferentes tipos de problemas y en contexto aritmético y geométrico caracterizados por mostrar relaciones proporcionales y no proporcionales y desarrollar en los estudiantes la capacidad de diferenciarlos a través de actividades de clasificación, sin necesidad de resolverlos. Con actividades de clasificación de problemas, el objetivo es centrar la atención de los estudiantes en las diferentes relaciones entre las cantidades y no en la realización de operaciones (Van Dooren et al., 2010).

Finalmente, los resultados obtenidos deberían ser considerados en la formación de los profesores. Entrevistas clínicas con estudiantes de Educación Primaria y ESO resolviendo problemas de estructura aditiva y multiplicativa pueden ser usadas como material en los programas de formación de profesores. Este tipo de material puede ayudar a los estudiantes para profesor a reconocer las dificultades que tienen los estudiantes en identificar diferentes situaciones en la transición del pensamiento aditivo al multiplicativo y de qué manera los estudiantes tienen dificultades en ampliar el significado de la idea de razón incorporando significados que no proceden de la estructura aditiva. Que los profesores reconozcan que los estudiantes disminuyen las respuestas aditivas correctas en los problemas aditivos y que sustituyen éstas por respuestas proporcionales incorrectas en la Educación Secundaria Obligatoria puede ser un paso necesario para identificar y subrayar la relevancia de este fenómeno didáctico. En este sentido, un mayor número de investigaciones son necesarias para determinar cómo los estudiantes para profesor y los profesores pueden empezar a considerar esta información a la hora de pensar en la enseñanza de las relaciones entre las estructuras aditivas y las multiplicativas en la Educación Primaria y la Educación Secundaria Obligatoria.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CLARK, F.B. y KAMII, C. (1996). Identification of multiplicative thinking in children in grades 1-5. *Journal for Research in Mathematics Education,* 27, pp. 41-51.

CRAMER, K., POST, T. y CURRIER, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications, en D. Owens (ed.). *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics*, pp. 159-178. Nueva York: Macmillan Publishing Company.

DE BOCK, D., VAN DOOREN, W., JANSSENS, D. y VERSCHAFFEL, L. (2002). Improper use of linear reasoning: An in-depth study of the nature and the irresistibility of secondary school students' errors. *Educational Studies in Mathematics,* 50, pp. 311-334.

DE BOCK, D., VAN DOOREN, W., JANSSENS, D. y VERSCHAFFEL, L. (2007). *The illusion of linearity: From analysis to improvement.* Nueva York: Springer.

EBERSBACH, M., VAN DOOREN, W., GOUDRIAAN, M. N. y VERSCHAFFEL, L. (2010). Discriminating non-linearity from linearity: Its cognitive foundations in five-year-olds. *Mathematical Thinking and Learning,* 12, pp. 4-19.

FERNÁNDEZ, C. y LLINARES, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: Efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje,* 34(1).

FERNÁNDEZ, C. y LLINARES, S. (en prensa). Relaciones implicativas entre las estrategias empleadas en la resolución de situaciones lineales y no lineales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.*

FERNÁNDEZ, C., LLINARES, S., VAN DOOREN, W., DE BOCK, D. y VERSCHAFFEL, L. (2011). Effect of number structure and nature of quantities on secondary school students' proportional reasoning. *Studia Psychologica,* 53(1), pp. 69-81.

FERNÁNDEZ, C., LLINARES, S., VAN DOOREN, W., DE BOCK, D. y VERSCHAFFEL, L. (en prensa). The development of students' use of additive and proportional methods along primary and secondary school. *European Journal of Psychology of Education*, DOI: 10.1007/s10212-011-0087-0.

GÓMEZ, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de libros antiguos. El caso de los problemas de compañías. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 2(2), pp. 19-29.

GREER, B. (1992). Multiplication and division as models of situations, en Grouws, D. (ed.). *Handbook of research on Learning and Teaching Mathematics,* pp 276-295. Reston VA- New York: NCTM- Macmillan.

GREER, B. (1994). Extending the meaning of multiplication and division, en Harel, G. y Confrey, J. (eds.). *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, pp. 61-85. Nueva York: State University press.

HART, K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors.* Windsor, UK: NFER Nelson.

KAPUT, J. y WEST, M. M. (1994). Missing-value proportional reasoning problems: Factors affecting informal reasoning patterns, en Harel, G. y Confrey, J. (eds.). *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, pp. 235-287. Nueva York: State University of New York Press.

KARPLUS, R., PULOS, S. y STAGE, E.K. (1983). Early adolescents' proportional reasoning on «rate». *Educational Studies in Mathematics,* 14(3), pp. 219-233.

KIEREN, T. (1994). Multiple views of multiplicative structure, en Harel, G. y Confrey, J. (eds.). *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 387-397). Nueva York: State University of New York Press.

LAMON, S. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming, en Harel, G. y Confrey, J. (eds.). *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, pp. 89-121. Nueva York: SUNNY Press.

LAMON, S. (1999). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teacher*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.

LESH, R., POST, T. y BEHR, M. (1988). Proportional reasoning, en Hiebert, J. y Behr, M. (eds.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, pp. 93-118. Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates & National Council of Teachers of Mathematics.

MISAILIDOU, C. y WILLIAMS, J. (2003). Diagnostic assessment of children's proportional reasoning. *Journal of Mathematical Behavior,* 22, pp. 335-368.

MODESTOU, M. y GAGATSIS, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of «linearity». *Educational Psychology,* 27(1), pp. 75-92.

MODESTOU, M. y GAGATSIS, A. (2010). Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Teaching and Learning*, 12(1), pp. 36-53.

NUNES, T. y BRYANT, P. (1996). *Children doing mathematics.* Oxford: Wiley.

SINGER, J., KOHN, A. y RESNICK, L. (1997). Knowing about proportions in different contexts, en Nunes, T. y Bryant, P. (eds.). *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective*, pp.115-132. Londres: Psychology Press Ltd. Publishers.

STEFFE, L.P. (1994). Children's multiplying scheme, en Harel, G. y Confrey, J. (eds.). *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics*, pp. 3-39. State University of New York Press.

TOURNIAIRE, F. y PULOS, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics,* 16, pp. 181-204.

VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., EVERS, M. y VER-

SCHAFFEL, L. (2009). Pupils' overuse of proportionality on missing-value problems: How numbers may change solutions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 40(2), pp. 187-211.

VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., HESSELS, A., JANSSENS, D. y VERSCHAFFEL, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction,* 23(1), pp. 57-86.

VAN DOOREN, W., DE BOCK, D. y VERSCHAFFEL, L. (2010). From addition to multiplication… and back. The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction,* 28(3), pp. 360-381.

VERGNAUD, G. (1983). Multiplicative structures, en Lesh, R. y Landau, M. (eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, pp. 127-174. Nueva York: Academic Press.

[Artículo recibido en diciembre de 2010 y aceptado en junio de 2011]

Characteristics of the development of proportional reasoning in Primary and Secondary School

Fernández Verdú, Ceneida y Llinares Ciscar, Salvador
Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante
ceneida.fernandez@ua.es
sllinares@ua.es

Summary

Research focused on the transition from additive to multiplicative thinking has shown that this transition could not be generalized easily from additive thinking. Multiplicative structures in the domain of natural numbers that come from the expressions $a \times b = c$ have some aspects in common with the additive structure, such as the multiplication as a repeated addition, but also have their own specificity that is not reducible to additive aspects: the Cartesian product or the meaning of ratio. A characteristic of this transition is the difficulty of students of different ages to differentiate multiplicative from additive situations. This difficulty is manifested in students who over-use incorrect additive methods on multiplicative situations (Hart, 1988; Tourniaire, & Pulos, 1985), and who over-use incorrect multiplicative methods on additive situations (Fernández & Llinares, in press; Van Dooren, De Bock, Hessels, Janssens, & Verschaffel, 2005).

Recently, research has shown a simultaneous development of these two phenomena: the use of additive methods in proportional situations (multiplicative situations) and the use of proportional methods in additive situations in primary school students (Van Dooren, De Bock & Verschaffel, 2010). Their findings indicate a development from applying additive methods (almost) anywhere in the early years of primary school to (almost) always applying proportional methods anywhere in the later years of primary school. They also show that the type of ratio strongly influence on students' behavior. However, the development of these phenomena along primary and secondary school has not yet been investigated. The aim of this study is to determine students' behavioral profiles along primary and secondary school when solving proportional and non-proportional problems.

The participants were 755 primary and secondary school students from three different primary schools and two different secondary schools. Students solved a test consisting of eight experimental word problems (four proportional problems and four additive ones), and four buffer problems, all of them formulated in a missing-value format. Buffer problems were included to vary the given tasks and to avoid effects of learning and stereotyped replies. In the test, two proportional problems and two additive problems referred to discrete quantities (for each problem type, one with integer ratios between given numbers and the other with non-integer ratios). The other two proportional problems and the other two additive problems referred to continuous quantities (again two problems had integer ratios and two problems had non-integer ratios). Students had the duration of a regular math lesson to complete the test. There were no further test instructions except that students were told that it was allowed to use calculators and were asked to write down their calculations, also if they had done them by means of a calculator.

Students' answers were classified as proportional (when the answer was achieved by relying on a proportional method), additive (when an additive method was applied to find the answer) and other answer (when another wrong solution procedure was followed). For proportional problems, proportional methods lead to a correct solution, while for additive problems, additive methods lead to a correct solution. Then we carried out a statistical analysis by means of a repeated measures logistic regression analysis because we expected that the type of ratio (integer or non-integer) and the nature of quantities (discrete or continuous) influence significantly on students' behavior.

From the analysis of students' answers we identified five students' behavior profiles: students who solved all problems correctly, students who solved all problems additively (regardless of the type of problem), students who solved all problems proportionality (regardless of the type of problem), students who solved problems with integer ratios proportionality and problems with non-integer ratios additively and, finally, students who solved all problems using methods without sense. Furthermore, results show that these profiles change along primary and secondary school. Primary school students use additive methods regardless of the type of problem and secondary school students use proportional methods regardless of the type of problem. So, the use of correct additive methods for additive problems decreases along secondary school, while the use of correct proportional methods for proportional problems increases. Therefore students' performance on proportional problems gets considerably better, but this is not because they become better proportional reasoners in the sense that they would become better able to distinguish proportional from non-proportional situations. On the other hand, these findings indicate that students' success on proportional problems does not necessarily mean that students were able to construct the meaning of the idea of ratio.