# EXPERIENCIAS DE ENSEÑANZA CON MOSAICOS, FRACTALES Y LA BANDA DE MOËBIUS

**Pilar Hernando, Margarita Moya,**
**Víctor J. Barrera y Julio Oliva**

**SUMARIO:**

En este artículo los autores exponen una experiencia realizada en la E. U. de Magisterio Cardenal Spínola con la que se pretendía utilizar recursos y materiales no específicos de matemáticas para la enseñanza de la Geometría y la Aritmética. Se utilizaron para ello objetos de la vida cotidiana, como los azulejos de la Alhambra o cualquier tipo de mosaico, las obras de M. C. Escher, que permitieron desarrollar múltiples actividades, y algunos objetos matemáticos de uso poco común, que despertaron la curiosidad de los Alumnos (la banda de Moëbius y los fractales). Los resultados los puede juzgar el lector: los alumnos llegaron a diseñar mosaicos de gran calidad, como el que se incluye en el artículo.

**SUMMARY:**

In this article, the authors write about an experience that took place at "Cardenal Spínola" Teacher Training College. Some resources and material non specific to the area of mathematics were used in this experience for the teaching of Geometry and Arithmetic. Some every day objects such as Alhambra tiles any kind of mosaics, some of M.C. Escher's works which permitted the development of mutiple activities, were used together with less frequently used mathematical objects, thus attracting pupils' attention, (Möebius band and fractals). Results may be judged by the reader: pupils got to design high quality mosaics like the one this article includes.

## Introducción

Esta comunicación presenta las actividades realizadas en la Escuela Universitaria de Formación de Profesorado de E.G.B. "Cardenal Spínola" de la Fundación San Pablo Andalucía-CEU de Sevilla, en 2° de la especialidad de Ciencias.

Se pretendía con ellas utilizar objetos geométricos presentes en la vida cotidiana y otros menos usuales, pero muy curiosos para el alumno, para enseñar ciertos temas de Matemáticas y elaborar nuevas actividades basadas en ellos para la Enseñanza Primaria. En particular se utilizaron los mosaicos, los fractales y la banda de Moëbius. Al mismo tiempo se incluyen las actividades que estos alumnos han propuesto para utilizar los mismos elementos en la enseñanza de alumnos de 2° y 3^er^ ciclo de Primaria.

## Mosaicos

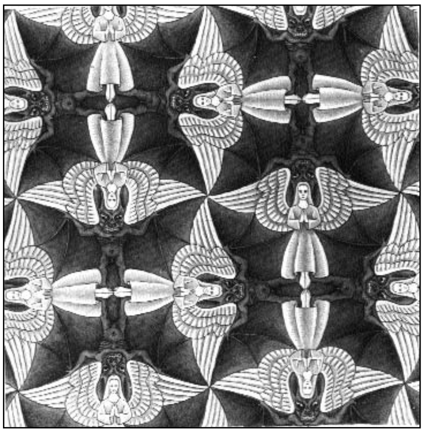
Los mosaicos son los objetos más cotidianos que utilizamos para nuestro estudio. No es nueva su utilización en el estudio de la Geometría, pero es curioso el partido que sacaron los alumnos a este material. Conocíamos las actividades que se realizan en torno a los mosaicos, en particular con los azulejos de La Alhambra de Granada o del Alcázar de Sevilla, y de hecho los utilizamos. Pero ampliamos el concepto de mosaico a cualquier recubrimiento "regular" del plano (que es la propia definición de mosaico), obteniendo los resultados que veremos a continuación. Comenzamos utilizándolos en el bloque de Geometría, pero pronto descubrimos -al mismo tiempo que nuestros alumnos- la posibilidad de abordar con ellos otras disciplinas matemáticas. Seguidamente detallamos los temas tratados.

Nuestra experiencia comenzó con el tratamiento clásico de un mosaico: el estudio de las simetrías, las traslaciones y los giros. Una vez desarrolladas las actividades en torno a estos temas, como el cálculo de los ejes y centros de simetría o la descomposición de los movimientos en productos de simetrías de ejes paralelos (traslaciones) o no paralelos (giros), presentamos los diecisiete grupos de isometrías con los azulejos de La Alhambra.

Concluidas estas actividades, los alumnos habían comprobado la posibilidad de recubrir el plano mediante polígonos regulares o figuras

-polígonos o no- con cierta regularidad. A continuación trabajamos la posibilidad de recubrir el plano con figuras no iguales entre sí, lo que nos dio pie a hablar un poco de Topología: ya estábamos definiendo los recubrimientos y las particiones. El siguiente paso fue el estudio de la posibilidad de un recubrimiento con figuras que tenían la misma forma, pero diferente tamaño. Con este problema se introdujo la teoría de las homotecias y las semejanzas. En este punto nos encontramos con que los alumnos ya no tenían el material para trabajar "tan a mano", pues los mosaicos, en general, tienen motivos de tamaño uniforme. Previendo esto, habíamos preparado una sesión de transparencias con los mosaicos de M. C. Escher que, además de fascinar a los alumnos, les facilitó la tarea con las homotecias. Fue entonces cuando ellos tomaron la iniciativa, descomponiendo todos los mosaicos para obtener la trama geométrica y la menor figura que se repetía indefinidamente (a la que llamaron "tesela", en honor a los mosaicos romanos). Además calcularon la razón de las homotecias en los mosaicos que iban disminuyendo continuamente.

Para terminar el bloque de Geometría, una vez visto que cualquier superficie podía ser recubierta regularmente, incluimos tres apéndices: uno que presentaba un recubrimiento del plano mediante figuras iguales, pero cuya disposición nunca se repetía (el recubrimiento de los "pollos Penrose"), uno para el cálculo de áreas por triangularización



Partición regular de la superficie para Ángeles y diablos, lápiz, tinta china, tiza y temple, de M.C. Escher y otro para presentar el "problema de los cuatro colores" (para lo que utilizamos los mosaicos de Escher). El primero y el último les parecieron más pasatiempos que problemas matemáticos.

Al final del bloque de Geometría, solicitamos que propusieran actividades que ellos pudiesen trabajar con los alumnos de Primaria utilizando los mosaicos. Entre otras, obtuvimos las siguientes:

- Reconocer y dibujar rectas paralelas y perpendiculares
- Dibujar y reconocer ángulos e identificar sus elementos
- Clasificar y reconocer las distintas clases de ángulos
- Construir polígonos mediante triangularización
- Identificar lados, vértices, diagonales y ángulos de un polígono
- Reconocer y distinguir polígonos regulares e irregulares
- Reconocimiento de ejes de simetría en figuras planas además de una amplia gama de actividades "interdisciplinares" que no podemos enumerar aquí por falta de espacio (coloreado, proporción, formas repetitivas o geométricas en la Naturaleza, realización de puzzles, etc).

## La Banda de Moëbius

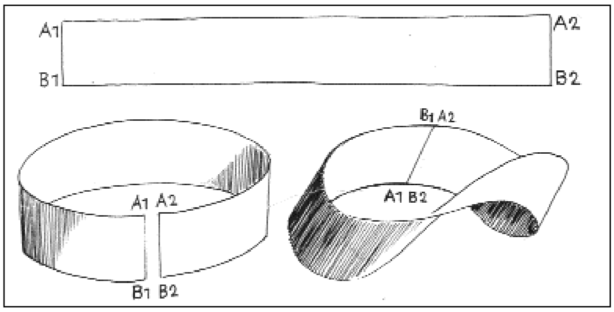
Presentada como una curiosidad de la Geometría espacial, no se utilizó para la enseñanza propiamente dicha de los alumnos de la Escuela. Dada la costumbre de pensar que todas las cosas son como las vemos -o como suponemos que son-, creímos que sería un buen ejercicio de "espíritu científico" plantearles ciertas cuestiones antes de ver los sistemas de referencia y la geometría espacial. Todos los temas tratados estaban en relación con las diferencias entre el espacio de dos dimensiones y el de tres.

En primer lugar se les presentó el relato de Planilandia, de Abbott, ya que no se puede ofrecer como lectura obligatoria, por estar agotado. Una vez conocida la historia[1] y resueltas las cuestiones sobre cómo se reconocen las figuras unas a otras, etc, se plantea qué vemos nosotros de los habitantes de Planilandia que no pueden ver ellos. Al descubrir que con el aumento de una dimensión lo que se pierde es "el interior", comenzamos a trabajar la Banda de Moëbius. ¿Cuántas caras tiene un cuerpo plano? ¿Cuántos bordes? Y si se deforma hasta que ya no es plano, ¿sigue teniendo dos caras? ¿Y cuántos bordes?

Construimos entonces una banda que, sorprendentemente, tiene una sola cara, un sólo borde ¡y está en el espacio! Después se siguen una serie de actividades para descubrir las propiedades de la banda construida: al recorrería una vuelta, la izquierda y la derecha se intercambian; al cortarla por la mitad se obtiene una sola banda, pero con dos caras; al cortarla a un tercio del borde se obtienen dos bandas engarzadas, una de Moëbius y otra con dos caras, etc. Esto aumenta la visión espacial del alumno o, al menos, le da mayor capacidad para aceptar la teoría de cambios de sistema de referencia, la geometría esférica, y todas las cuestiones que requieran el esfuerzo de no ver las cosas desde el punto de vista clásico.

Pero lo más curioso de esta experiencia fue la cantidad de propuestas didácticas que ofrecieron para sus futuros alumnos de Primaria:

- Desarrollo de los conceptos topológicos contrarios:
- Dentro-Fuera
- Detrás-Delante
- Arriba-Abajo
- Izquierda-Derecha
- Desarrollo del pensamiento lógico-matemático
- Reconocimiento del número de caras de un objeto
- Reconocimiento del número de aristas
- Reconocimiento de figuras simétricas especularmente además de actividades de tipo motor: pegar la banda, cortarla, manejarla en general, y relacionadas con las manualidades (posibilidad de coloreado).




Cómo se construye una cinta de Moëbius

## Fractales

Una nueva curiosidad matemática que utilizamos en diversas partes del temario. Vistas anteriormente las diferencias sustanciales entre la dimensión dos y la dimensión tres, convencidos del abismo que se podía abrir entre ambas, les presentamos un nuevo objeto geométrico: una curva (que, por ser una línea, era unidimensional) que tenía la capacidad de rellenar el plano. Su primera reacción fue de incredulidad, hasta que desarrollaron a mano el algoritmo de la curva de Koch. Esto nos dio pie a utilizarlos en los temas que a continuación enumeramos.

En principio se utilizó para la definición de iteración como proceso repetitivo. Al ver que los segmentos utilizados tenían una longitud que iba decreciendo de forma similar siempre, pudimos estudiar la proporción, la razón y la escala (aunque para estos conceptos nos fue más útil el fractal de Sierpinski, pues se obtenían triángulos semejantes). Aprovechando que ya se habían estudiado los mosaicos, se hizo un estudio de las regularidades y simetrías que podían aparecer en este tipo de procesos, así como de la posibilidad de rellenar el plano con una curva (la de Koch) o de vaciarlo hasta disminuir su dimensión (mediante los triángulos de Sierpinski).

Con esto llegamos a la definición de dimensión pero no como la conocían (como el número de vectores linealmente independientes de una base del espacio), sino a la dimensión de homotecia del fractal: $D= (\lg a) / \lg (1/r)$. Fue así como conocieron las dimensiones fraccionarias o fractales.

En cuanto a otras actividades geométricas, se hizo el intento de calcular la longitud de la curva de Koch (es una curva de longitud infinita encerrada en un área finita) o el área del fractal de Sierpinski. Ello nos ayudó a introducir las sucesiones, el término general y el cálculo de límites, pues el cálculo de dicha longitud pasa por conocer el término general de los lados de la curva y el límite de su suma.

También se realizó alguna actividad en la asignatura de Didáctica de las Matemáticas, pues el triángulo de Sierpinski mantiene la estructura de los números poligonales, que constituyen un tema de dicha asignatura. Una última actividad consistió en tratar los dibujos de Escher que tienden al infinito como "fractales artísticos", lo que nos permitió realizar las actividades relativas a los cálculos de proporciones, regulari-

Trabajo final de José María Bando Núñez, alumno de 3º Curso
de la Especialidad Ciencias de la E.U. de Magisterio Cardenal Spínola CEU

dades y simetrías sobre un material menos abstracto que las curvas o los triángulos. Para terminar se expusieron algunos casos de desarrollo de formas fractales en la Naturaleza.

En cuanto a las aportaciones de los alumnos para la Enseñanza Primaria, en algunos casos fueron unánimes, mientras que en otros no llegaron a perfilar sus propias ideas. Todos estaban de acuerdo en la posibilidad de trabajar los siguientes objetivos:

- Introducción del concepto de infinito (lo infinitamente grande o pequeño)
- Manipulación y reconocimiento de formas que se presentan en la Naturaleza
- Inclusión de conjuntos

pero no llegaron a desarrollar actividades para otros objetivos que proponían, como son la suma, el producto (ambos creemos que son necesarios para poder manejar operaciones con fractales), el concepto de número irracional y la Propiedad Arquimediana (nos pareció que escapaba del ámbito de Primaria, pero aun así no pudieron desarrollar ninguna actividad sobre los irracionales), y otras del mismo estilo.

## Conclusión

No tenemos mucho que añadir. Nuestra conclusión es clara: estos objetos geométricos nos han facilitado el desarrollo de unos temarios que, a veces, el mismo profesor convierte en áridos o incomprensibles. Para nosotros ha sido una experiencia maravillosa, pues hemos ido descubriendo al mismo tiempo que nuestros alumnos, además de que hemos comprobado su capacidad de usar este material (como cualquier otro que se les ocurra en el futuro) para comenzar a desterrar el fantasma de las Matemáticas desde la Enseñanza Primaria y ayudar a que los niños (y los no tan niños) puedan, por fin, disfrutar de nuestra materia.

## *Nota*

1.Planilandia es el relato de una esfera que visita un mundo plano, de sólo dos dimensiones.