

L'AVALUACIÓ DELS APRENENTATGES MATEMÀTICS:

CAP A UNA AVALUACIÓ OBJECTIVA DELS RESULTATS I DIAGNÒSTICA DELS PROCESSOS

Oriol Busquets i Prat

Curs 2001 / 2002

ÍNDEX

Agraïments	4
I. Introducció	5
I.1. Objectius	5
I.2. Presentació del tema	6
I.3. Justificació	8
I.4. Pla de treball	9
I.5. Marc referencial	10
I.6. Metodologia i fases del treball	11
I.7. Recursos emprats	13
I.8. Aplicacions en el sistema educatiu	14
I.9. Producte obtingut	15
I.10. Altres comentaris	16
1. Marc teòric sobre avaluació	17
1.1. Qüestions generals sobre avaluació	17
1.1.1. Què és l'avaluació?	17
1.1.2. Funcions i finalitats de l'avaluació	20
1.1.3. Instruments d'avaluació	22
1.2. Les proves escrites com a instrument d'avaluació	24
1.2.1. Consideracions generals	24
1.2.2. Tipus de proves, tipus d'ítems i les seves característiques	26
1.2.3. Proves estàndard i proves diagnòstiques	28
2. Contextualització en l'àmbit de l'avaluació en matemàtica: l'avaluació dels aprenentatges matemàtics	29
2.1. Sobre l'avaluació matemàtica	29
2.1.1. Característiques específiques	29
2.1.2. Teories sobre l'aprenentatge matemàtic	32
2.1.3. L'informe Cockcroft (1985) i els estàndards d'avaluació del NCTM (1991)	35
2.1.4. Consideracions finals	39
2.2. Experiències generalitzades d'avaluació d'aprenentatges matemàtics	40
2.2.1. Consideracions generals	40
2.2.2. Assessment of Performance Unit (APU) (1978 – 1987)	42
2.2.3. Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) (1993 - 1995)	45
2.2.4. MEC: Evaluación del Sistema Educativo (1997)	49
2.2.5. OCDE: Programme for International Student Assessment (PISA) (2000 – 2006)	53
2.2.6. Comentaris finals	59

3. Acotació de la part pràctica de l'estudi: la proporcionalitat	61
3.1. Consideracions prèvies	61
3.2. Manifestacions de la proporcionalitat en el currículum de l'ESO	63
3.3. Fonaments i construcció de la proporcionalitat	65
4. Proves per a l'avaluació estandaritzada i diagnòstica d'alguns coneixements i competències relacionats amb la proporcionalitat, a l'ESO	71
4.1. Delimitació i finalitats de l'actuació avaluativa	71
4.2. Elaboració i validació de les proves	73
4.3. Resultats de les proves estàndard	77
4.3.1. Consideracions generals	77
4.3.2. Resultats de la prova sobre fonaments de proporcionalitat	78
4.3.3. Resultats de la prova sobre situacions d'aplicació immediata de proporcionalitat	95
4.4. Proves per a l'avaluació diagnòstica	110
4.4.1. Consideracions generals	110
4.4.2. Resultats de les proves sobre situacions d'aplicació no immediata de proporcionalitat	111
4.4.3. Ús diagnòstic de les proves a 2n d'ESO	125
4.4.4. Ús diagnòstic de les proves a 4t d'ESO	135
4.4.5. Comentaris finals	145
5. Conclusions i observacions de l'estudi	147
Bibliografia	151

AGRAÏMENTS

La realització d'aquest estudi no hagués estat possible sense la col·laboració desinteressada de diverses persones i institucions que em facilitaren informació o que posaren al meu abast recursos i em possibilitaren l'accés a alumnes per poder realitzar la part pràctica del treball.

En particular, vull agrair la col·laboració de:

- Els CEIP Baloo, CEIP El Sagrer i CEIP Joan Miró que em permeteren entrevistar alumnes del segon curs del cicle superior d'educació primària, sobre qüestions referides als fonaments de la proporcionalitat.
- L'IES Alt Berguedà de Bagà, els IES Joan Fuster, IES Josep Pla, IES La Sedeta i IES Montserrat de Barcelona, l'IES Joanot Martorell d'Esplugues de Llobregat, l'IES Jaume Vicens Vives de Girona i l'IES Jaume Callís de Vic que em permeteren aplicar les proves dissenyades sobre proporcionalitat, amb finalitats d'estandarització i de diagnosi.
- Les professores de matemàtiques Pilar Alcón, Marta Berini, Mariona Petit, Mercè Potau i Manuela Rodríguez i el professor de matemàtiques Ignasi del Blanco que participaren en el procés de validació de les proves i m'aportaren suggeriments que em foren de gran utilitat.
- El Consell Superior d'Avaluació que, a través de Jordi Saura i Carme Amorós, em facilità informació sobre els programes internacionals d'avaluació TIMSS i PISA, i també sobre el *"Diagnóstico del Sistema Educativo"* dut a terme pel *Ministerio de Educación y Ciencia* l'any 1997.
- La senyora Neus Figueras, del Centre de Recursos de Llengües Estrangeres del Departament d'Ensenyament, que em facilità informació i documentació bibliogràfica sobre el disseny, aplicació i anàlisi de proves i instruments d'avaluació en el terreny de les llengües estrangeres.

Així mateix, vull agrair d'una manera especial al professor del Departament de didàctica de la matemàtica de la Universitat Autònoma de Barcelona, Jordi Deulofeu i Piquet, supervisor del treball que n'ha tutoritzat la realització, el suport i ajut que m'ha donat en tot el procés de desenvolupament de l'estudi.

INTRODUCCIÓ

I.1. OBJECTIUS

L'estudi que presentem està centrat en l'avaluació dels aprenentatges matemàtics dels alumnes de l'etapa d'educació secundària obligatòria i, en el seu projecte, es fixava els objectius següents:

1. Establir criteris per a l'elaboració de proves escrites i altres tipus d'instruments d'avaluació que permetin una avaluació al més objectiva possible dels resultats dels aprenentatges matemàtics.
2. Establir criteris per a l'elaboració de proves escrites i altres instruments de recollida d'informació avaluativa que permetin fer una diagnosi sobre les diferents fases i els diferents processos que intervenen en l'aprenentatge d'un determinat coneixement o habilitat matemàtic.
3. Elaborar models de proves i instruments d'avaluació que proporcionin informació relativa als dos aspectes esmentats en els objectius anteriors:
 - valoració de resultats.
 - diagnosi de processos.

Aquest objectiu es concreta en continguts matemàtics referits a la proporcionalitat.

I.2. PRESENTACIÓ DEL TEMA

Quan es planteja la qüestió de l'elaboració de proves, o altres instruments d'avaluació d'aprenentatges matemàtics, l'atenció se sol limitar a pensar en qüestions o problemes relatius al tema que es vulgui avaluar, que es considerin "interessants" o "prototípics".

Aquest treball es proposa aprofundir en alguns aspectes que, actualment, es poden considerar poc estudiats en el camp de l'avaluació en matemàtiques:

- quines característiques ha de tenir un ítem de recollida d'informació per tenir un grau de validesa suficient en relació a allò que es vol avaluar ?
- com cal validar una prova de manera que es pugui concloure, amb un nivell suficient de certesa, que la informació que proporciona és significativa en relació a allò que es vol avaluar ?
- quines característiques ha de tenir un instrument d'avaluació (prova escrita o no) perquè realment discrimini les diferents situacions en què es troba l'alumnat en relació a l'aprenentatge d'uns determinats continguts ?
- com es poden dissenyar proves o instruments d'avaluació que aportin informació no només sobre els resultats d'aprenentatge, sinó també sobre en quines fases del procés d'aprenentatge o de consolidació de determinats coneixements o habilitats s'ha produït la "desconnexió", o no hi ha hagut suficient èxit en l'evolució de l'aprenentatge ?

Tinc la impressió que en altres àrees del coneixement, com per exemple llengües estrangeres, alguns d'aquests aspectes estan més desenvolupats i es disposa de proves, i criteris per a elaborar-ne, més treballats i verificats que en matemàtiques.

La pròpia fama de disciplina "objectiva" de què frueixen les matemàtiques (on no sembla discutible que una resposta sigui correcta o incorrecta) pot haver provocat que es donés per suposat que qualsevol prova era suficientment pertinent i aportava resultats prou fiables per a l'avaluació dels resultats dels aprenentatges dels alumnes.

D'altra banda, sovint en l'aplicació de proves estàndard ens conformem en tenir un indicador quantitatiu que aporti informació en relació a un determinat nivell considerat de suficiència. Aquesta informació, tot i que per segons quines finalitats serà suficient, no és prou rica si del que es tracta no és només de saber si l'alumnat té prou consolidats determinats aprenentatges, sinó també de conèixer, cas que no els tingui assolits, quina és la baula de la cadena d'aprenentatges, que gairebé sempre té implícit un coneixement matemàtic, en la qual s'ha trencat el procés que havia de portar amb èxit al resultat que s'està avaluant. Aquesta és la informació que pot resultar realment útil en una avaluació, vista com a reguladora del procés d'ensenyament-aprenentatge.

Sembla especialment interessant concretar l'actuació que s'està presentant en els continguts a què fan referència les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic per a l'ensenyament obligatori, recollides a l'annex 2 de la resolució de 18 de maig de 2000, que dóna instruccions per a l'organització i el funcionament dels centres docents d'educació secundària a Catalunya. Aquestes competències bàsiques estan redactades en els termes següents:

Un comú denominador de totes les dimensions en l'àmbit de les matemàtiques és l'aplicabilitat a la vida quotidiana, en especial pel que fa al càlcul i a la geometria.

L'operatòria apareix com a competència bàsica en diverses formes, insistint en el coneixement de les quatre regles, el càlcul de proporcions i la mesura d'àrees i volums, tant si es realitzen mentalment com mitjançant la calculadora.

La resolució de problemes comença amb la interpretació dels enunciats i segueix amb l'actitud general de tenir l'hàbit consolidat de corregir els possibles errors de càlcul.

El pensament matemàtic ha de portar a diferenciar conceptes com atzar, probabilitat, predicció,... com a base d'un pensament lògic i racional.

Les mesures, a banda d'aplicar-se a la vida quotidiana, han de saber-se interpretar i representar gràficament.

Complementàriament a l'aplicabilitat a la vida quotidiana, les matemàtiques també contribueixen a l'educació de valors importants com la capacitat d'anàlisi, la deducció lògica i la percepció dels errors.

És bastant clar que tal com estan redactades aquestes competències bàsiques, és necessari un esforç de concreció, en objectius que siguin més precisos i que les relacionin amb els objectius generals i terminals de l'etapa d'educació secundària obligatòria, per tal de poder-se plantejar qualsevol actuació avaluativa que els faci referència.

És en aquest sentit, que crec que centrant l'atenció en continguts referits a proporcionalitat s'aconsegueix abastar gran part de les intencions que semblen orientar l'establiment d'aquestes competències bàsiques. En efecte, en bona part de l'aplicació de les matemàtiques a la vida quotidiana apareixen qüestions relacionades amb el raonament proporcional (pensem, per exemple, en percentatges, interpretació de plànols a escala, canvis d'unitats de mesura, bona part d'activitats econòmiques com càlcul de preus a partir d'un preu unitari, etc...).

Quedaria com a feina complementària, analitzar quines de les competències bàsiques poden ser desenvolupades a través d'un altre tipus de contingut matemàtic i estudiar també, per a aquests continguts, el tipus d'instruments d'avaluació de què s'ha parlat.

I.3. JUSTIFICACIÓ

El tema que es proposa crec que té, en aquests moments, un especial interès ja que s'està en la fase de generalització de l'avaluació interna dels centres. Aquesta avaluació interna comporta, entre altres actuacions, l'aplicació de proves estàndard.

A part de proveir els centres, com ja s'ha fet, d'exemples d'aquest tipus de proves, crec d'especial importància aportar criteris que ajudin els centres a elaborar-ne de pròpies i també disposar d'exemples d'altres proves que siguin més específiques per a algun àmbit concret del coneixement matemàtic i que puguin ser d'utilitat per afrontar altres objectes d'avaluació.

Així mateix, pel que fa a la funció formativa de l'avaluació, com a reguladora del procés d'ensenyament-aprenentatge, crec que és d'interès capital tenir instruments d'avaluació, i criteris per a crear-ne, que permetin conèixer, no només els resultats del procés, sinó, cas que aquests resultats no siguin els desitjats, què és allò que cal corregir o quins són els aspectes en què més cal incidir per esmenar els déficits que s'han detectat.

Aquest treball estableix, per a uns determinats continguts matemàtics, una anàlisi aprofundida dels coneixements que porten implícits, de la consolidació acumulativa de coneixements per arribar a assolir un determinat objectiu, i també una catalogació sistemàtica de quins són els tipus d'errors més freqüents que es detecten en l'aprenentatge i en l'aplicació d'aquests continguts.

Aquesta anàlisi, a més de ser necessària per a l'elaboració dels instruments d'avaluació que s'han descrit, pot ser útil per a l'establiment de plantejaments didàctics que s'ocupin de l'aprenentatge dels continguts objecte del nostre treball.

I.4. PLA DE TREBALL

El treball realitzat ha comprès les fases següents:

1. Recollida d'informació sobre proves d'avaluació:
 - 1.1. Lectura de bibliografia sobre la qüestió de l'elaboració, pilotatge i aplicació de proves d'avaluació de resultats d'aprenentatge.
 - 1.2. Entrevistes amb persones que han treballat qüestions d'avaluació en matemàtiques i amb persones que han desenvolupat actuacions relatives a elaboració, pilotatge i aplicació de proves estàndard en altres àrees del coneixement.
 - 1.3. Accedir a estudis que s'han realitzat sobre qüestions relacionades amb el tema objecte d'aquest treball, a través del departament de didàctica de les ciències i les matemàtiques de la UAB i a través d'altres estaments, universitaris o no.
 - 1.4. Anàlisi de proves sobre avaluació dels aprenentatges matemàtics realitzades fins ara al nostre país i a l'estranger (projecte PISA, promogut per la OECD, projecte APU ("Assessment of Performance Unit") al Regne Unit, i altres experiències generalitzades).
2. Aprofundiment de les diverses fases que comporta l'aprenentatge dels continguts relacionats amb la proporcionalitat. Així mateix, catalogació sistemàtica dels errors més habituals que es produeixen en el seu procés d'aprenentatge per part dels alumnes i en els resultats que se n'observen.
3. Establiment de criteris per a l'elaboració de proves per a l'avaluació de resultats d'aprenentatges matemàtics per part dels alumnes.
4. Establiment de criteris per a l'elaboració de proves o altres instruments de recollida d'informació avaluativa que permetin fer diagnosi sobre el procés d'aprenentatge dels coneixements matemàtics i no només sobre els resultats d'aprenentatge.
5. Elaboració de proves per a l'avaluació de resultats d'aprenentatges relacionats amb la proporcionalitat. Pilotatge, validació i aplicació d'aquestes proves. Anàlisi dels resultats obtinguts.
6. Elaboració de proves d'avaluació per a la diagnosi de processos d'aprenentatge en qüestions referides a proporcionalitat. Pilotatge, validació i aplicació d'aquestes proves. Anàlisi dels resultats obtinguts.

I.5. MARC REFERENCIAL

El marc en què s'inciu el treball és un marc en què es dóna una importància cabdal a l'avaluació. En el treball s'atén principalment a dues de les seves funcions:

- La funció de valoració de l'assoliment d'uns determinats objectius, com a resultat d'uns aprenentatges.
- La funció reguladora dels processos d'aprenentatge, en el sentit que permeti fer una diagnosi de les diferents fases que cal desenvolupar per part de l'alumne, per tal d'arribar a l'adquisició de determinades competències.

Amb la implantació de l'etapa d'educació secundària obligatòria, en els centres de secundària s'està produint una inquietud per tenir un bon coneixement del nivell de competències amb què els alumnes acaben cada un dels cicles d'aquesta etapa i per tenir referents que permetin refermar-se en les estratègies que s'estan seguint o rectificar alguns dels plantejaments que s'estan duent a terme.

En el context de la potenciació que s'està fent, fins i tot des del punt de vista normatiu, de l'avaluació interna dels centres es contempla la necessitat que cada centre apliqui proves estàndard com a eines d'autocontrol i de referència del treball d'ensenyament que s'està duent a terme.

Sembla clar, doncs, que seria útil que els centres disposessin d'unes orientacions i criteris específics per a l'elaboració de proves i altres instruments d'avaluació, tant pel que fa a les proves estàndard de final de cicles, com per a proveir-se d'instruments d'avaluació idonis, si el centre decideix abordar com a objecte d'avaluació l'aprenentatge per part dels alumnes d'algun tipus de coneixement concret de l'àmbit matemàtic. Així mateix, el fet de disposar d'exemples d'instruments d'avaluació que hagin estat validats i pilotats, els pot ser també d'utilitat, ja sigui perquè decideixi aplicar-los o perquè els serveixin com a referència per a elaborar-ne de propis.

I.6. METODOLOGIA I FASES DEL TREBALL

L'elaboració del treball ha constatat de quatre fases, cada una de les quals s'ha desenvolupat mitjançant metodologies diferenciades.

En una primera fase, l'esforç es dedica fonamentalment a la formació teòrica, mitjançant les següents actuacions:

- *Lectura de bibliografia* especialitzada, amb recull sistemàtic de criteris i orientacions útils per a la posterior elaboració d'instruments d'avaluació d'aprenentatges.
- *Entrevistes* amb experts i persones amb experiència en avaluació en matemàtiques per recollir informació sobre experiències fetes i sobre elements a tenir en compte a l'hora d'elaborar proves i instruments d'avaluació d'aprenentatges matemàtics.
- *Entrevistes* amb experts en avaluació en altres àrees curriculars, per tal de recollir suggeriments i conèixer les línies d'actuació més importants en experiències sobre avaluació d'altres àrees que s'hagin dut a terme.
- *Anàlisi* de proves d'avaluació d'aprenentatges matemàtics realitzades fins ara, al nostre país i a l'estranger, per estudiar-ne les característiques i analitzar-ne els criteris principals que han orientat la seva elaboració.
- *Anàlisi* aprofundida dels continguts matemàtics de l'etapa d'educació secundària obligatòria relacionats amb la proporcionalitat, per tal d'establir i catalogar de manera sistemàtica:
 - . *l'encadenament* d'aprenentatges que comporta l'assoliment dels objectius que es considerin pertinents com a concreció dels continguts de l'etapa d'educació secundària obligatòria relacionats amb la proporcionalitat.
 - . *els errors més habituals* que es produeixen en els resultats d'aprenentatges relatius a proporcionalitat.

Una segona fase consisteix en :

- *elaboració* de proves per a l'avaluació dels resultats d'aprenentatges matemàtics (relatius a proporcionalitat) de manera que permetin una valoració al més objectiva possible del grau d'assoliment dels objectius relacionats.
- *elaboració* d'instruments per a l'avaluació dels processos d'aprenentatges matemàtics (relatius a proporcionalitat) de manera que permetin una diagnosi dels punts febles en el desenvolupament de l'aprenentatge en aquells casos en què no s'observi èxit en el resultat final.

En la tercera fase es du a terme :

- *l'aplicació* d'aquests instruments d'avaluació, per tal de pilotar-los i validar-los. Aquesta fase es du a terme bàsicament en centres de secundària, però també comporta l'aplicació d'algunes proves i entrevistes a alumnes de centres de primària, per poder analitzar el desenvolupament dels aprenentatges en etapes prèvies a l'educació secundària.

Finalment, la quarta fase correspon a:

- *Redacció de criteris i orientacions* per a l'elaboració d'instruments per a l'avaluació objectiva de resultats d'aprenentatges matemàtics i per a l'avaluació diagnòstica dels processos d'aprenentatge.
- *Anàlisi i comentari* dels resultats obtinguts en l'aplicació de les proves elaborades referents a la proporcionalitat, destacant-ne el seu caràcter estàndard i la seva utilització diagnòstica.

I.7. RECURSOS EMPRATS

Per dur a terme l'estudi i el treball han estat necessaris, bàsicament, els recursos següents:

- *Recursos bibliogràfics:*
 - . sobre elaboració d'instruments d'avaluació, en general, i sobre avaluació matemàtica, en particular.
 - . sobre plantejaments didàctics dels aprenentatges relacionats amb la proporcionalitat.
- *Proves i instruments d'avaluació* ja elaborats i aplicats, de matemàtiques i d'altres àrees curriculars, del nostre país i de l'estranger, per tal d'analitzar-ne les característiques i els criteris principals que n'han orientat l'elaboració i aplicació.
- *Col·laboració de professionals* en els processos de validació de les proves elaborades.
- *Col·laboració de centres* que han permès l'aplicació d'instruments d'avaluació, per tal de poder-ne fer un pilotatge i validació adequats.
- *Altres tipus de recursos* (informàtics, gràfics, audiovisuals, ...) que han estat necessaris per a l'elaboració dels instruments d'avaluació i l'anàlisi de la informació obtinguda.

I.8. APLICACIONS EN EL SISTEMA EDUCATIU

Al llarg de l'exposició que s'ha fet fins ara, ja s'han anat descrivint les aplicacions que, per al sistema educatiu, pot tenir la realització d'aquest treball, però a continuació resumim aquelles que considerem més rellevants:

- Disposar de reflexions, criteris i orientacions, fonamentades teòricament, sobre l'elaboració de proves per a l'avaluació dels aprenentatges matemàtics.
- Fer veure la importància, i mostrar la factibilitat mitjançant exemples, d'aplicar instruments d'avaluació que, a més d'informar sobre els resultats d'aprenentatge dels alumnes, permetin, quan calgui, detectar i diagnosticar les fases dels processos d'aprenentatge en les quals s'ha interromput aquest procés. Aquesta informació és fonamental per esmenar i posar remei als dèficits que s'hagin produït en els aprenentatges dels alumnes. Aquest aspecte creiem que és d'especial importància si es pretén que l'avaluació no sigui únicament un instrument per valorar l'adquisició final de coneixements, sinó també una eina reguladora del procés d'ensenyament-aprenentatge.
- Mostrar com hi ha uns continguts que fonamenten i vertebreren el conjunt d'aprenentatges matemàtics de l'ensenyament obligatori, i que és precisament en la consolidació d'aquests aprenentatges com es garanteix un desenvolupament posterior de la cultura matemàtica bàsica de què ha de disposar qualsevol ciutadà que hagi cursat l'ensenyament obligatori.
- Fomentar la consciència de l'aplicació de l'avaluació no només com a instrument de valoració de l'alumnat, sinó també com a informació que permet als ensenyants disposar de criteris per al disseny d'estratègies metodològiques i didàctiques més adequades.
- Fer veure la utilitat de l'avaluació i l'autoavaluació permanent, com a única manera de controlar els processos d'ensenyament – aprenentatge i augmentar-ne les possibilitats d'èxit.
- Mostrar que els instruments d'avaluació s'han de fonamentar en un estudi sistemàtic i rigorós de les diferents fases que comporta un aprenentatge i han d'informar sobre les dificultats que els alumnes troben en aquest procés, i conseqüentment també de les estratègies més útils per superar-les.

I.9. PRODUCTE OBTINGUT

També al llarg d'aquesta introducció s'ha anat fent referència al producte final que s'ha obtingut de la realització d'aquest treball. De manera resumida, aquest producte final consisteix en:

- Criteris i orientacions per a l'elaboració d'instruments d'avaluació dels resultats d'aprenentatges matemàtics.
- Criteris i orientacions per a l'elaboració d'instruments d'avaluació diagnòstica dels processos d'aprenentatge, detallant les diferents fases i dificultats que comporten.
- Exemples validats d'instruments d'avaluació estàndard i diagnòstica (de resultats i de processos), per a aprenentatges referits a proporcionalitat, a l'ESO.

I.10. ALTRES COMENTARIS

És molt comú, tant en les reunions d'equips docents, com en les reunions de departaments i en les juntes d'avaluació dels centres de secundària fer comentaris sobre els aprenentatges dels alumnes que porten implícits judicis avaluatius dels seus processos d'aprenentatge. Però crec que molt sovint aquestes apreciacions es queden reduïdes a una simple descripció dels resultats finals dels aprenentatges de l'alumnat, sense aprofundir en quins han estat els obstacles que no s'han pogut salvar, ni intentar sistematitzar estratègies correctores d'aquelles situacions en què no s'ha produït l'èxit desitjat.

Crec que, així com en àmbits més generals (com poden ser les qüestions conductuals, de tècniques d'estudi, d'integració en el grup, ...) s'ha avançat molt en el sentit que ja no ens conformem en descriure la situació sense que immediatament ens plantegem què cal fer per posar-hi remei, cas que sigui necessari, quan ens centrem en àmbits més específics de l'aprenentatge, com pot ser una àrea curricular concreta, aquesta manera de fer encara no s'ha imposat.

En aquest sentit, potser seria bo que la major incidència d'un plantejament d'aquest tipus, si més no inicialment, fos en les àrees instrumentals, ja que els dèficits d'aprenentatge en llengües i matemàtiques condicionen, de fet, un bon nombre d'aprenentatges d'altres àrees. Correspondria, doncs, als departaments de les àrees instrumentals avançar en aquesta línia d'interpretar l'avaluació, no només com una descripció de la situació final dels aprenentatges de l'alumnat, sinó com a una eina que, ben dissenyada i aplicada, ha de permetre conèixer els detalls del desenvolupament de les diverses fases i aspectes del procés d'assoliment dels objectius relacionats amb determinats continguts matemàtics. En el cas de les matemàtiques, a més, el caràcter absolutament acumulatiu que tenen, en la majoria dels casos, els seus continguts encara fa més necessària la possibilitat d'aplicació d'aquest tipus de diagnòstic.

Aquest treball es proposa fer veure que això és possible, mitjançant una sèrie de consideracions generals sobre les característiques que han de tenir els instruments d'avaluació de resultats i de processos i mitjançant, també, l'elaboració d'instruments d'avaluació, degudament validats i pilotats, que serveixin als centres, ja sigui per aplicar-les directament o com a referència per a elaborar-ne de pròpies.

1. MARC TEÒRIC

1.1. Qüestions generals sobre avaluació

1.1.1. Què és l'avaluació?

El substantiu *avaluació* i el verb que s'hi refereix, *avaluar*, es fan servir per designar realitats i accions diverses en dominis igualment diversos. Així, frases com les següents es poden considerar d'ús habitual:

- *Els danys de la tempesta en el sector fruiter s'avaluen en tres milions d'euros.*
- *L'oposició avalua negativament l'acció del govern durant l'any passat.*
- *És fa difícil avaluar quin serà el capteniment de la borsa durant els mesos vinents.*

Observem, doncs, que acabem d'escriure tres frases en què el verb *avaluar* es pot considerar, respectivament, sinònim de *quantificar*, *valorar* i *predir* que, és clar, que són paraules no sinònimes entre elles. No seria gaire difícil trobar altres contextos en què el verb *avaluar*, o el substantiu *avaluació*, s'usés comunament amb la possibilitat de ser substituït per altres sinònims.

Podríem pensar que si ens cenyim al camp educatiu, el significat del terme *avaluació* és més fàcilment delimitable. El sol fet de fixar-se en la diversitat d'objectes a què s'aplica ja ens farà comprendre que, tampoc limitant-nos a aquest camp, serà fàcil precisar què és *avaluar*. En educació es pot parlar, per exemple, de:

Avaluar els alumnes
Avaluar coneixements
Avaluar el sistema educatiu
Avaluar la funció docent del professorat
Avaluar el funcionament d'un centre
Avaluar les competències bàsiques
Avaluar una promoció d'alumnes
....

És clar que caldrà fer un esforç per delimitar el significat que atribuïm a la paraula *avaluació* en aquest treball. Encara més si tenim en compte que tradicionalment, si més no en l'àmbit de l'ensenyament secundari, s'usava la paraula *avaluació* amb un significat diferent al que se li atribueix actualment tant en les teories sobre aprenentatge com en la regulació normativa del sistema educatiu. Tradicionalment, *avaluar* un alumne era atribuir-li una qualificació i si s'arribava a parlar de procés d'avaluació era per referir-se al conjunt d'actuacions que es duïen a terme amb l'objectiu de poder assignar una qualificació a cada alumne de la manera més "justa" possible.

Cal tenir en compte, a més, que els esquemes que s'apliquen i les creences que hi ha subjacents a l'avaluació en la pràctica docent seran molt resistents al canvi ja que estan immersos en l'estructura d'un sistema educatiu que opera en un context social i polític i que està sota el seu control i tutelatge.

Podríem destacar que, dintre del camp educatiu, la llengua anglesa usa fins a quatre paraules per a expressar accions diferents que nosaltres designem únicament amb el mot *avaluació*. Ens referim a *assessment*, *evaluation*, *testing* i *measuring*. Hi ha acord, però, en reservar *assessment* i el verb associat *to assess* per referir-se al que nosaltres en diem *avaluar* les capacitats, accions, assoliments i resultats dels estudiants, ja sigui individualment o en grup, mentre que *evaluation* i *to evaluate* es refereixen a l'avaluació del

sistema educatiu en general o al funcionament d'algun dels seus aspectes globals. *Testing* i *measuring* quedarien reservades a designar accions que formen part d'un procés avaluatiu més general.

Abans d'intentar donar o fer nostra una definició d'*avaluació* que sigui útil per al treball que estem presentant, val la pena que ens entretinguem a comentar algunes característiques que considerem necessari associar a aquest concepte:

- a) L'avaluació té diverses formes, segons les seves finalitats, i tant es pot realitzar com un procés inherent al procés d'aprenentatge que en permeti la seva regulació (seria l'anomenada avaluació formativa) com en forma d'actuacions puntuals que permetin descripcions i diagnòstics dels coneixements i habilitats d'individus i de col·lectius (ho seria, entre altres, les conegudes com a avaluacions inicial i sumativa).
- b) Una avaluació, per ser eficaç, ha de delimitar amb el màxim de claredat i especificitat quina és la seva finalitat, quin és l'objecte de la seva acció i quins són els individus o col·lectius a qui s'adreça la seva actuació. O sigui, en començar una avaluació cal tenir clar "per què" s'avalua, "què" s'avalua i "a qui" s'avalua. Entre altres variables, diferents respostes a aquestes qüestions comportaran quatre possibles contextos diferents on desenvolupar l'actuació avaluativa:
 - individual
 - grup-classe
 - centre escolar
 - sistema educatiu, en general
- c) Qualsevol avaluació implica una recollida d'informació. Aquesta informació es pot obtenir de maneres molt diverses: a través de proves escrites, entrevistes, observació sistemàtica, revisió de produccions (treballs, construccions, projectes, ...) dels alumnes, etc... En dur a terme una avaluació, doncs, cal tenir també clarament especificats quins seran els instruments que s'usaran per a l'obtenció d'informació.
- d) La simple obtenció d'informació i la seva més o menys reeixida ordenació i classificació no constitueixen en si mateixes una avaluació. Per poder parlar d'avaluació, cal fer una interpretació de la informació obtinguda, o sigui, assignar-li un significat que pugui servir de fonament a decisions posteriors sobre allò que és avaluat.

Romberg(1989), citat per J.Giménez (1997), fa notar que el significat de l'avaluació ha evolucionat des d'allò que era un judici valoratiu dels coneixements dels estudiants a un interès per proporcionar informació que fonamenti una política o un programa de presa de decisions. Seguint, en certa manera, Wood (1987) citat per Webb (1993), podríem prendre com a marc referencial del concepte d'avaluació en què es fonamentarà aquest treball, el que considera que

l'avaluació proporciona una descripció comprensiva del funcionament (en sentit ampli: coneixements, aplicació d'aquests, manera de treballar, actitud, ...) individual o col·lectiu, que permet fer una representació (dibuix, mapa, fotografia,...) mitjançant l'obtenció d'una varietat d'evidències, tant qualitatives com quantitatives, que van més enllà de la valoració de procediments i resultats cognitius, i que possibilita la fonamentació de la presa de decisions en referència a l'actuació futura sobre la realitat que és avaluada (individus, cos de coneixements, etc...) .

Aquesta concepció és bàsicament coincident amb la d'A.Bodin (1993) quan afirma que:

“Avaluar significa organitzar una situació de tal manera que permeti obtenir una informació que, un cop processada, pugui revelar alguna cosa sobre el coneixement personal (o sobre el coneixement col·lectiu d'un grup)” .

Caldria afegir, en aquest cas, que aquest processament de la informació ha de poder estar en l'origen de la presa de decisions posterior.

Dintre d'aquesta concepció, caldrà tenir molt present que en qualsevol avaluació s'han de considerar quatre components generals, d'acord amb Norman L.Webb (1993):

- . el plantejament d'una *situació d'avaluació*, ja sigui a través d'una entrevista, de qüestions escrites, de problemes a resoldre, de treballs a realitzar, ...
- . la *resposta* que l'avaluat o conjunt d'avaluats dona a aquesta situació
- . l'*anàlisi*, per part de l'avaluador, de la resposta donada
- . la *interpretació* dels resultats obtinguts

1.1.2. Funcions i finalitats de l'avaluació

L'avaluació en general, entesa tal com acabem d'establir, pot tenir diverses funcions que hi seran associades, i la major o menor preponderància de cada una de les quals dependrà de la finalitat amb què es dugui a terme. Algunes d'aquestes possibles funcions de l'avaluació són:

Funció social. L'avaluació compleix amb un requeriment social en tant que permet rendir comptes a la societat sobre què s'aconsegueix mitjançant l'acció educativa. També és un component social de la funció de l'avaluació el fet de permetre informar els pares de quin és el resultat que aconsegueix la institució a qui han confiat l'educació dels seus fills. Igualment és l'avaluació la que donarà elements que permetran fonamentar les decisions de promoció dels alumnes i d'ingrés a determinats estudis.

Funció política. Mitjançant una actuació avaluadora, els administradors poden conèixer quins són els resultats que s'obtenen, en el terreny educatiu, de les disposicions que estableixen per gestionar el funcionament del sistema educatiu del país, del municipi o del centre.

Funció pedagògica. L'avaluació, entesa com a procés inherent al procés d'ensenyament-aprenentatge, és un element bàsic per a la seva regulació. No és concebible el desenvolupament d'un procés tan complex com el d'ensenyament-aprenentatge sense que paral·lelament porti associat un procés d'avaluació que permeti conèixer els resultats que se n'obtenen, els obstacles amb què es troba, les dificultats que cal superar, ... per tal de poder ajustar-ne l'aplicació de manera que s'aconsegueixi una major eficàcia.

Funció professional. L'avaluació és un instrument més en la professionalització dels docents. L'avaluació ha de permetre a cada docent disposar d'indicadors que l'informin del desenvolupament de la seva professió. L'avaluació, en educació, és un element que confereix un ingredient de qualitat en l'exercici de la professionalitat dels docents.

En general, podríem dir que l'avaluació té la funció de proporcionar evidència vàlida sobre l'assoliment o el procés d'assoliment d'un aprenentatge per tal d'informar els estudiants i els professors, facilitar la previsió de nous aprenentatges, o certificar que un determinat nivell requerit ha estat assolit.

És molt difícil que una actuació avaluadora s'adeqüi només a alguna de les funcions descrites. La finalitat amb què es faci una avaluació pot afavorir el predomini d'alguna de les funcions sobre les altres, però en general de manera més o menys explícita en una avaluació coexistiran diverses de les seves possibles funcions.

A continuació, exposem algunes de les finalitats o propòsits que pot tenir una avaluació:

- a) Fer un *seguiment del progrés* de l'estudiant o del procés que segueix
- b) Constatar l'*habilitat del professor* per induir l'aprenentatge dels alumnes
- c) *Diagnosticar les dificultats* que troben els estudiants en el seu aprenentatge
- d) *Comprovar el grau d'assoliment* d'un determinat aprenentatge o dels aprenentatges corresponents a un camp del coneixement
- e) Fer una *selecció* de l'alumnat amb un determinat propòsit

- f) Fer un *informe* sobre l'estat de la qüestió pel que fa a algun aspecte de l'educació en general o a un determinat aprenentatge
- g) *Establir comparacions* entre diverses realitats educatives
- h) *Motivar l'alumnat*, estimulant-lo a prosseguir els seus aprenentatges
- i) *Fer prediccions* sobre l'evolució futura d'uns determinats aprenentatges, d'alguns alumnes en particular, o d'una promoció d'alumnes

Cada una de les possibles finalitats que hem presentat en aquest llistat està descrita d'una manera molt general. A l'hora de dur a terme una avaluació caldrà ser molt més precís en la concreció de la finalitat. Així, per exemple, sota l'enunciat "fer el seguiment del progrés d'un estudiant", hi cap tant l'avaluació de com varia una determinada actitud, com també l'avaluació de com progressa una habilitat general o molt específica d'aquell alumne. De la mateixa manera, "establir comparacions entre diverses realitats educatives" es pot referir tant a una avaluació que pretengui comparar els resultats que obtenen estudiants de diferents països com, per exemple, a una avaluació en què es comparin els resultats dels alumnes d'un centre en referència a un determinat estàndard que s'hagi establert.

També cal ser conscients que, depenent de quin sigui l'usuari, patrocinador o destinatari d'una avaluació, es posarà més èmfasi en una o altra funció i finalitat. Així, per exemple, quan Geoffrey Howson (1993) afirma que "*la societat no està particularment interessada en els aspectes formatius de l'avaluació que, per al professor i l'educador són els més essencials*", està constatant que la societat està atenta sobretot a la funció social de l'avaluació, i segurament també a la política, mentre que els professors haurien de dedicar una major atenció a la seva funció pedagògica i professional.

1.1.3. Instruments d'avaluació

Sigui quina sigui la finalitat i la modalitat d'avaluació que es dugui a terme, sempre tindrà una fase, o una actuació, en la qual es produirà una recollida d'informació. Els instruments que s'usen per a recollir aquesta informació s'anomenen, per extensió, instruments d'avaluació.

L'elecció del tipus d'instruments d'avaluació vindrà condicionada per diverses variables: quina és la seva finalitat, a quants alumnes s'ha d'aplicar, quina és la relació entre l'avaluador i els alumnes a qui s'ha d'avaluar, de quin temps es disposa per a l'avaluació, etc...

A continuació s'exposa una relació de possibles instruments de recollida d'informació en una actuació avaluadora:

. *Observació sistemàtica.* És un instrument idoni quan el que s'ha d'avaluar és el desenvolupament d'un procés d'aprenentatge, més que no pas els resultats que se'n dedueixen. Per ser útil, aquesta observació sistemàtica s'ha de fer d'una manera pautada perquè garanteixi el seguiment individualitzat de cada alumne, i permeti l'observació dels diferents paràmetres significatius que intervenen en el procés. La situació típica d'aplicació d'aquest instrument d'avaluació és la d'un professor a l'aula amb els seus alumnes. En aquest context, qualsevol activitat d'aprenentatge esdevé també una activitat d'avaluació. No es pot descartar, però, com a instrument aplicable en una actuació puntual en què es faci realitzar a un alumne, o grup d'alumnes, una determinada activitat per a l'avaluació de processos. L'observació sistemàtica pot ser reforçada mitjançant l'enregistrament videogràfic de les sessions d'aula o de l'activitat corresponent.

. *Entrevista pautada.* És un instrument idoni quan el que es vol és conèixer el raonament que hi ha al darrere d'una determinada actuació i que, d'altra manera, corre el risc de quedar ocult. Cal tenir molt clar que han d'estar pautats els punts essencials que es vol que afloreixin al llarg de l'entrevista, per tal de provocar-ne la seva aparició, sense que això impedeixi un cert grau de flexibilitat en el contingut i un clima distendit en el desenvolupament de l'entrevista. Per donar una major consistència a l'instrument, si es considera oportú, es pot enregistrar l'entrevista. El gran inconvenient d'aquest instrument d'avaluació és la despesa de temps que suposa si, com cal a vegades, les entrevistes es fan individualment. Aquest condicionament fa que aquest instrument en determinades circumstàncies (elevat nombre d'alumnes, una certa pressa en poder fer ús dels resultats d'avaluació, ...) sigui inviable, tot i ser teòricament el més adequat a algunes finalitats.

. *Proves escrites.* Aquest és l'instrument d'avaluació més generalitzat i més tradicional. Es fa servir per a moltes finalitats avaluatives, tot i que hi ha finalitats per a les quals seria molt més recomanable un altre tipus d'instrument. Té els avantatges de poder-se aplicar de manera simultània a una gran quantitat d'alumnes, en general proporciona un buidat d'informació prou ràpid i té una aparença d'homogeneïtat que, quan hi ha finalitats valoratives o qualificadores, provoca la sensació de contribuir a fer un sistema seleccionador "just". També té inconvenients clars: en general, oculta el raonament i els processos i només posa de manifest els resultats; afavoreix els alumnes que tenen una destresa particular en l'expressió escrita; no permet avaluar una sèrie d'habilitats, com poden ser la manipulació, la capacitat constructiva, ...
En el següent apartat es presentaran amb més deteniment algunes de les característiques de les proves escrites, ja que poden respondre a moltes finalitats i ajustar-se a moltes tipologies.

. *Elaboració de treballs escrits o altres produccions.* A partir de l'elaboració de treballs escrits (dissertacions, dossiers, projectes, ...) o altres produccions (construccions, material informàtic, exposicions orals, ...) es pot obtenir informació dels alumnes, individualment o en grup, que sigui útil per a una actuació avaluativa i que faci, per tant, que l'esmentat treball o producció esdevingui un instrument d'avaluació. També en aquest cas cal tenir present que perquè aquestes produccions facin el paper d'instruments d'avaluació d'una manera efectiva, cal tenir dissenyades una o diverses pautes de buidat en les quals es recullin de manera sistemàtica les informacions que es considerin significatives d'acord amb la finalitat i els objectius de l'avaluació.

1.2. Les proves escrites com a instrument d'avaluació

1.2.1. Consideracions generals

Les proves escrites com a instrument d'avaluació tenen una història molt llarga. Sembla que tenen el seu origen a la Xina, al voltant del 2 200 adC, com a mitjà per seleccionar els “funcionaris” de l'emperador xinès.

Els exàmens escrits a la universitat europea apareixen molt més tard, a començaments del segle XVIII, a causa del descrèdit creixent que anaven tenint les “discussions” o “debats” orals, que era el sistema que s'usava com a avaluació a les universitats i, per imitació, a les escoles. Segons W. Rouse Ball (citada per Morris (1961)), el primer examen escrit registrat per un rector del Trinity College, de Cambridge, data del 1702, i fou precisament un examen de matemàtiques, que es considerava una matèria especialment poc indicada per a ser tractada oralment.

Aquesta llarga tradició de les proves escrites com a instrument d'avaluació i l'àmplia implantació que tenen en diferents àmbits socials en general i de l'aprenentatge en particular, fa que existeixin força estudis teòrics sobre elles. A vegades es tracten qüestions com a específiques de les proves escrites, quan de fet són extensibles a qualsevol instrument d'avaluació. Per exemple, temes com la validesa i la fiabilitat (usarem aquest terme com a traducció de la veu anglesa “*reliability*”) són qüestions que han d'interessar i preocupar en qualsevol actuació avaluativa. Malgrat això, els trobem desenvolupats sobretot en referència a les proves escrites, i encara habitualment d'una manera més restrictiva, només referint-se a un determinat tipus de proves escrites. Abans de continuar, val la pena, però, que ens entenguem una mica en les dues propietats que hem esmentat, perquè cal tenir-ne clar el significat a l'hora de considerar si un determinat instrument o actuació avaluativa es pot qualificar com a vàlida i fiable.

La validesa d'una prova (o, en general, d'un instrument d'avaluació) es refereix a la propietat (o capacitat) que té l'instrument de mesurar (o, en general, avaluar) allò que se suposa que vol mesurar o avaluar. La validesa d'un instrument, doncs, està clarament relacionada amb la finalitat de l'avaluació, amb les característiques de l'instrument d'avaluació i també amb l'ús que se'n faci. Per posar un exemple molt senzill, una mateixa prova escrita pot ser vàlida o no per a una determinada avaluació depenent de la manera com es ponderin i puntuïn els diferents ítems, suposant que es tractés finalment, en aquest cas, de donar un índex numèric avaluatiu d'una determinada qüestió.

Tal com diu Henning (1987):

“... el terme validesa, quan s'utilitza per descriure una prova, haurà d'anar acompanyat de la preposició “per a”. Qualsevol prova pot ser vàlida per a uns objectius i no ser-ho per a uns altres”.

A vegades, es parla de diferents tipus de validesa, però en realitat es tracta de diferents mètodes per estimar la validesa. D'acord amb J. Charles Alderson i altres (1998), es pot parlar de:

- . la *validesa racional* (o de contingut) que dependria de si la prova conté una mostra prou representativa i significativa del tipus de coneixements i destreses que es volen avaluar.
- . la *validesa empírica* que dependria de si els resultats que obtenen els alumnes són homologables als resultats que obtenen en altres instruments d'avaluació similars.
- . la *validesa del constructe* que es refereix a allò que en realitat signifiquen els resultats de la prova.

Els mètodes per provar la validesa d'un instrument d'avaluació són diversos, complementaris i difícilment concloents. Per validar una prova escrita pot ser útil presentar els ítems a experts per tal que donin la seva opinió sobre què és el que ells creuen que

s'avalua amb aquella prova, per tal de veure si coincideix amb les intencions de l'agent avaluador. També cal que, abans d'aplicar la prova com a instrument d'avaluació, alguns experts i subjectes semblants als qui s'ha de fer l'avaluació responguin les qüestions de la prova. Aquesta experiència prèvia de contrast servirà per saber si realment la prova elaborada dóna la informació necessària per aconseguir la finalitat avaluativa.

Com es pot comprendre, tant en proves escrites com en altres instruments d'avaluació, no és possible dir que una prova és rotundament vàlida. Es tracta de garantir un mínim de validesa i sotmetre la prova a un procés de millora que faci augmentar-la tant com sigui possible.

La fiabilitat és la característica d'una prova que garanteix una certa consistència dels seus resultats. És a dir, una prova seria absolutament fiable si poguéssim assegurar que aplicant-la als mateixos alumnes en dos dies consecutius i en les mateixes condicions, s'obtinguerien els mateixos resultats. Contràriament, la fiabilitat d'un instrument seria nul·la si pogués ocórrer que aplicant-lo un dia s'obtinguessin uns resultats i aplicant-la l'endemà als mateixos alumnes en les mateixes condicions s'obtingués una informació totalment diferent, pressuposant que en la capacitat d'aquests alumnes o en la seva instrucció no s'hagin produït canvis radicals en allò a què fa referència la prova.

D'acord amb el que acabem de dir, la fiabilitat és una propietat de l'instrument d'avaluació, però també és un tret relacionat amb els alumnes als quals s'apliqui: un instrument pot ser fiable en una població i deixar-ho de ser en una altra.

La fiabilitat d'una prova és molt difícil d'establir. Es diu que en passar dues vegades la mateixa prova, en moments diferents, a un mateix grup d'alumnes, s'hauran produït dos tipus de variacions: les variacions sistemàtiques (relacionades amb la millora de la formació i bagatge dels alumnes) i les no sistemàtiques (llacunes de concentració, sorolls i altres motius d'alteració a l'aula d'aplicació). Una prova seria totalment fiable si només mesurés o donés informació sobre els canvis sistemàtics. El que cal, doncs, quan es vol confirmar la fiabilitat és reduir al màxim les causes de variacions no sistemàtiques.

Hi ha mètodes per estimar la fiabilitat d'una prova. Els més immediats, però que tenen molts problemes per a ser duts a la pràctica de manera efectiva, serien l'anomenat "test-retest" (que consisteix en aplicar l'instrument i tornar-lo a aplicar, al cap de poc, als mateixos alumnes, i observar si els resultats són pràcticament els mateixos) i el de fiabilitat "paral·lela" (que consisteix en comprovar si els resultats de l'aplicació de dues proves molt similars, "paral·leles", en un mateix grup d'alumnes són molt semblants).

El mètode que més s'usa és l'anomenat de consistència interna. Es subdivideix la prova en dues meitats que es puguin considerar paral·leles (de dificultat semblant). Com més alta (més pròxima a +1) sigui la correlació entre les qualificacions de les dues parts, més fiable serà la prova. Un mètode més complex consisteix en calcular les correlacions entre totes les possibles biparticions de la prova, i calcular els anomenats coeficients de Kuder Richardson (KR20 o KR21) que aporten un índex de fiabilitat. Observi's que aquests mètodes només es poden aplicar a instruments d'avaluació que donin resultats quantitatius i, a més, en els estudis en els quals se'n parla sempre s'esmenten exemples en què els ítems són dicotòmics, és a dir que només tenen com a possibles resultats "correcte" o "incorrecte", "cert" o "fals", "sí" o "no", etc ...

Per acabar, observem que tal com s'han definit validesa i fiabilitat, es pot dir que la fiabilitat és una condició necessària però no suficient per a la validesa d'un instrument. És a dir, un instrument d'avaluació que no sigui fiable és impossible que sigui vàlid, ara bé el fet que sigui fiable no implica necessàriament la seva validesa.

1.2.2. Tipus de proves, tipus d'ítems i les seves característiques

Tot i que és clar que hi ha un tipus d'avaluació que difícilment es pot fer a través de proves escrites, o exclusivament a través d'elles, també és cert que les proves escrites són instruments útils en una gran quantitat de situacions. És habitual trobar-les en processos de selecció de personal laboral i d'alumnes, en avaluacions generalitzades a nivell internacional amb finalitats comparatives, en proves per acreditar coneixements d'un determinat àmbit (llengües estrangeres, per exemple), com a proves habituals i periòdiques en processos d'aprenentatge, com a proves per a obtenir un determinat document acreditatiu (el carnet de conduir, per exemple), etc...

Aquesta gran varietat de finalitats que poden tenir les proves escrites comporta que n'existeixin de tipus molt diferents. Les podem classificar d'acord amb dos criteris: atenent a la finalitat amb què s'apliquen i considerant el tipus d'ítems que contenen.

D'acord amb la finalitat amb què són elaborades, i tenint en compte la relació de finalitats que hem donat en l'apartat 1.1.2, podríem parlar, per exemple, de proves de seguiment, de proves diagnòstiques, de proves selectives, de proves predictives, de proves estàndard, etc...

En l'apartat següent ens entretindrem, amb un cert detall, en les proves estàndard i les diagnòstiques, ja que són les tipologies més relacionades amb les proves de què es tractarà en la part pràctica d'aquest estudi.

És interessant tenir clar quins són els diferents tipus d'ítems que poden formar part d'una prova escrita, amb el benentès que no hi ha tipus d'ítems millors i pitjors, sinó que caldrà escollir-los en funció de la finalitat que es persegueixi amb l'avaluació i del tipus de coneixements o habilitats que siguin objecte de la prova.

A grans trets, es pot parlar d'ítems tancats, ítems oberts i ítems semi-oberts. Hi ha qui fa servir la denominació ítems objectius, ítems de tipus "assaig" i ítems semi-objectius, però ens semblen uns apel·latius poc encertats, ja que contenen un judici de valor.

En el cas dels *ítems tancats*, la resposta ha d'ajustar-se a una fórmula fixada. Poden ser dicotòmics, o sigui preguntes de resposta "cert / fals" o "sí / no", etc.. poden ser preguntes de les que s'anomenen de resposta d'elecció múltiple (es donen unes quantes respostes possibles a la qüestió que es planteja i l'avaluat ha d'eleger la que considera correcta), es pot tractar d'associar conceptes a definicions o explicacions, completar frases o paràgrafs,...

En la correcció dels ítems tancats no intervé l'opinió del corrector, fins al punt que la correcció pot ser feta per ordinador. Els avantatges que es poden considerar per als ítems tancats són el fet que aparentment es pot preguntar "molt" en poc temps, no hi tenen tanta influència de contaminants atzarosos (redactat, malinterpretacions,...) i és més fàcil de controlar estadísticament la fiabilitat.

Els inconvenients són que allò que és avaluable mitjançant ítems de resposta tancada és una part molt limitada de tot allò que constitueix el procés i els resultats d'aprenentatge, si més no en determinades àrees del coneixement.

En el cas dels *ítems semi-oberts*, no s'especifica la solució en la mateixa prova, però a *priori* pot ser anticipada en una sèrie de possibles respostes. De totes maneres, aquestes previsions gairebé mai no poden ser exhaustives i sovint es produeixen respostes "no previstes" que no és clar que siguin incorrectes. Per tant, la correcció no pot ser automàtica com en el cas dels ítems tancats, sinó que ha de ser feta per experts i l'opinió del corrector pot influir en el resultat de la prova.

Finalment, en el cas dels *ítems oberts*, la resposta ha de ser construïda per l'avaluat. Es tracta, per tant, d'una resposta que té, o pot tenir, un elevat grau de llibertat i creativitat. És clar que els criteris de correcció seran molt més difícils d'establir en aquest cas que en els dels ítems tancats o semi-oberts i també cal considerar que la fiabilitat d'una prova amb ítems oberts és difícilment estimable. De tota manera, és clar que hi ha determinades habilitats que, per escrit, no es poden avaluar d'altra manera que amb ítems oberts. Pensem, per exemple, en la competència en la redacció de textos, la competència en la resolució de problemes, ...

Sovint passa que, en una prova escrita, cal incloure-hi diversos tipus d'ítems, que s'adeqüin a la diversitat de la tipologia de coneixements que es volen avaluar i permetin complementar la informació que proporcionen uns i altres.

En el que s'anomena l'anàlisi clàssica d'ítems, se n'estudien diverses característiques, entre elles l'anomenat coeficient de dificultat i l'índex de discriminació.

El *coeficient de dificultat d'un ítem* és el percentatge d'alumnes que el responen correctament. Si es vol una distribució àmplia de les qualificacions se sol recomanar incloure ítems amb coeficient de dificultat del 50%. De totes maneres, la conveniència de prioritzar aquest índex de dificultat vindrà condicionada per la finalitat de l'avaluació. Si es vol fer una classificació o selecció dels avaluats sí que serà bo aspirar a una distribució àmplia, però per saber l'estat d'una població en relació a un determinat coneixement o si es vol fer una avaluació diagnòstica, l'amplitud de la distribució dels resultats no té cap interès.

Per definir l'*índex de discriminació d'un ítem*, cal dividir la població d'avaluats en tres parts iguals: el terç dels qui tenen millor qualificació global de la prova, el terç dels qui tenen pitjor qualificació global de la prova, i el terç restant. L'índex de discriminació d'un ítem es defineix com la diferència entre la proporció del millor terç d'avaluats que responen bé l'ítem i la proporció del pitjor terç d'avaluats que responen bé l'ítem. Se sol considerar com a bon índex de discriminació qualsevol que sigui superior a +0,4. De la mateixa manera que hem comentat abans, cal tenir en compte que per segons quin tipus d'avaluació no té cap interès conèixer l'índex de discriminació d'un ítem, ja que la classificació (i, per tant, la discriminació) dels avaluats pot no tenir res a veure amb la finalitat avaluativa.

1.2.3. Proves estàndard i proves diagnòstiques

Entre els diferents tipus de proves, centrarem la nostra atenció ara en les proves estàndard i les diagnòstiques, ja que, com hem dit, corresponen a les tipologies de les proves que elaborarem i usarem en la part pràctica de l'estudi.

Les *proves estàndard*, en general, s'apliquen amb la finalitat de poder comparar els resultats que obtenen els elements d'una població determinada amb un referent extern a aquesta població, o amb els resultats d'una població més àmplia en la qual està inclosa la població inicial.

Per poder dir que es disposa d'una prova estàndard o estandaritzada, cal que s'hagin seguit els procediments d'elaboració que s'atenen als criteris de validesa i fiabilitat i, sobretot, cal que un cop elaborada en el seu redactat definitiu, s'hagi aplicat a una mostra prou nombrosa. D'aquesta manera, les puntuacions o resultats globals i de cada un dels ítems poden ser entesos com una mena de mitjana universal o referent, en relació al qual es poden comparar els resultats que s'obtenen en una determinada població.

Així doncs, una prova estàndard ha de portar associats uns resultats que es considerin de referència, tant en conjunt com per a cada un dels ítems. D'aquí ve la denominació d'estàndard, ja que assenyalen els estàndards en relació als quals es pot situar un determinat conjunt d'alumnes.

Una *prova diagnòstica* ha de permetre no només determinar què sap i què no sap, què sap fer i què no sap fer un alumne, sinó també conèixer, cas d'haver-n'hi, on són les dificultats que s'han produït en el procés d'aprenentatge.

Cal que la prova, un cop aplicada, aportí indicis, símptomes o evidències de quin tipus de dificultats té un alumne, i poder determinar si es tracta d'errors o de malinterpretacions.

Aquest tipus de proves, si estan ben elaborades, poden ser especialment útils en disciplines, com les matemàtiques, que es construeixen acumulativament i lògicament, on cada coneixement nou pressuposa tenir-ne assolits altres de previs. Per poder elaborar una prova diagnòstica sobre un determinat tema, cal analitzar-ne molt bé l'estructura lògica, els fonaments previs i les dificultats i errors més habituals. Per elaborar proves diagnòstiques sobre un tema, cal, doncs, tenir-ne un coneixement molt aprofundit.

2. CONTEXTUALITZACIÓ EN L'ÀMBIT DE L'AVALUACIÓ EN MATEMÀTICA: L'AVALUACIÓ DELS APRENENTATGES MATEMÀTICS

2.1. Sobre l'avaluació matemàtica

2.1.1. Característiques específiques

Tot el que s'ha dit en el capítol anterior té validesa per a qualsevol avaluació, de manera genèrica. En aquest capítol, ens centrarem en aquells aspectes que poden caracteritzar l'avaluació d'aprenentatges matemàtics.

Creiem que, com afirma Webb (1993), cal tenir en compte que “la natura de les matemàtiques és suficientment diferenciada i la pràctica a les aules de matemàtiques és prou particular per suggerir que l'avaluació matemàtica hauria de ser distingible de l'avaluació en altres àrees del coneixement”.

Per poder diferenciar l'avaluació matemàtica, haurem de destacar aquells aspectes propis de les matemàtiques que poden donar a la seva avaluació una caracterització específica. És clar que alguns d'aquests trets són compartits també per altres disciplines, però en tot cas pel que ens interessa aquí els hem de tenir presents com a propis de la matemàtica, i considerar que en el seu conjunt en delimiten el perfil.

La matemàtica és un *saber acumulatiu*. És molt clar que per poder aprendre alguns coneixements matemàtics és necessari dominar-ne de previs. Per exemple, difícilment es pot aprendre el càlcul amb nombres decimals, si prèviament no es domina el càlcul amb nombres enters. Així mateix, per comprendre l'enunciat del teorema de Pitàgores, cal saber prèviament què és un triangle rectangle, què en són els catets i la hipotenusa i saber el significat d'elevat un nombre al quadrat. A més, si ens hi fixem, en la mateixa expressió “triangle rectangle”, hi ha implícits els conceptes de triangle (i, per tant, de polígon) i d'angle recte. I com aquests es podrien esmentar nombrosos exemples.

Cal tenir molt clar, però, que com demostren les investigacions didàctiques, l'aprenentatge no es produeix d'una manera sistemàticament lineal de coneixements inclosos un en l'altre, sinó que hi ha un “*feed back*” permanent, de manera que el treball amb conceptes més complexos ajuda a la comprensió més profunda dels més simples que li serveixen de fonament.

De totes maneres, això no treu, repetim, que la matemàtica d'una manera especial, com a disciplina, té una lògica interna en què l'adquisició d'uns coneixements en pressuposa el domini d'altres de previs. Aquesta característica fa que la finalitat diagnòstica d'una avaluació en matemàtiques prengui una rellevància especial. En efecte, el fet que quan en una avaluació es detecta que un alumne no té suficient domini de determinats coneixements matemàtics, la mateixa avaluació sigui capaç de determinar les possibles causes d'aquests punts febles pot tenir, en aquest cas, un interès particular,

En matemàtica és molt clara la *distinció entre “saber” i “saber fer”*, així com la manca de sentit de posseir aparentment coneixements matemàtics sense saber-los aplicar. Els aprenentatges matemàtics tenen interès no només amb l'objectiu que l'alumne sàpiga coses, sinó sobretot que en sàpiga fer ús. Només fent matemàtiques, i fent-ne ús, s'aprenen matemàtiques. Aquesta característica tindrà també una importància cabdal en l'avaluació, ja que comportarà que caldrà avaluar, sobretot, com usa les matemàtiques l'alumne, i mai només si l'alumne coneix determinats conceptes matemàtics. Això voldrà dir que els instruments d'avaluació hauran de situar l'alumne en contextos en què hagi d'aplicar i fer ús dels seus aprenentatges matemàtics.

Un altre aspecte que caracteritza les matemàtiques és que sovint *la resposta* que dona un alumne a una situació que se li planteja, *oculta el raonament* que fa possible aquesta resposta. Una prova escrita pot estar dissenyada de manera que intenti, al màxim possible, posar de manifest aquest raonament, però a vegades només és a través d'una entrevista que es pot arribar a conèixer el procés mental que ha seguit l'alumne.

Si es fa una actuació avaluativa amb finalitats de seguiment o diagnòstiques, és bàsic poder conèixer, quan es produeix un error, què és, en el procés de raonament o en els coneixements previs, allò que impedeix l'èxit. I, encara que no es produeixi error, quan una avaluació va més enllà d'un recompte de resultats positius, és altament interessant posar en evidència el procés amb què s'ha trobat la resposta, ja que aquest sovint pot seguir diferents itineraris, i ajuda molt a conèixer l'alumne saber quines són les seves estratègies de raonament.

Si no es pretén avaluar només resultats de l'aprenentatge matemàtic, cal tenir present com actua el *pensament matemàtic*, i en concret quines *fases* hi ha en el desenvolupament d'un aprenentatge en matemàtiques.

D'acord amb De Lange (1992) (citada per Giménez (1997)), cal distingir quatre fases en el desenvolupament del pensament matemàtic:

- la matematització de situacions a partir del món real
- la reflexió sobre les situacions presentades
- l'assoliment d'abstraccions i l'actuació d'acord amb processos deductius
- el desenvolupament d'aplicacions que permetin tornar a la realitat

També en relació a la natura del pensament matemàtic, Romberg, Zarinnia i Collins (1990) (citats a Romberg (1993)) resumeixen alguns dels trets que el caracteritzen i que corresponen al que ells anomenen un pensament d'alt nivell ("high order"). Entre aquests trets, destaquen el fet que:

- no es tracta d'un aprenentatge algorítmic
- tendeix a ser complex
- aporta solucions múltiples
- implica l'aparició de judicis inesperats
- implica l'aplicació de diversos criteris
- implica un cert grau d'incertesa
- implica la imposició de significats (als símbols i relacions que s'usen)
- en general, comporta molt esforç

Així doncs, quan es plantegin activitats d'avaluació matemàtica, s'haurà de ser conscient que es proposa als alumnes una actuació que implica fer, o haver fet, un recorregut que de manera més o menys lineal comporta l'execució de les quatre fases que descriu De Lange i que porta implícit un tipus de raonament caracteritzat pels trets relacionats per Romberg.

Els processos d'avaluació en matemàtiques comportaran per tant, per ser útils, anar més enllà d'un recompte del nombre de respostes correctes que pugui donar un alumne i aprofundir en el procés de pensament que ha generat aquestes respostes.

A l'hora d'avaluar matemàtiques, cal superar el tòpic que afirma que les matemàtiques són *fàcils d'avaluar*. Aquest tòpic es fonamenta, sovint, en la creença que un determinat coneixement matemàtic "se sap" o "no se sap" i que qualsevol resposta que es doni a una situació avaluativa és "correcta" o "errònia". Aquest tòpic alimenta també la convicció que per avaluar matemàtiques només cal proposar unes quantes qüestions "interessants" i fer el recompte d'encerts. D'acord amb aquesta visió, el caràcter pretesament "objectiu" de la matemàtica ja dona certificació de garantia a una prova plantejada des d'aquesta perspectiva.

Tal com s'ha fet notar en el paràgraf anterior, aquest plantejament de l'avaluació és clarament insuficient. D'acord amb Wheeler (1993), una actuació avaluadora en matemàtiques s'ha de plantejar els reptes següents:

- Avaluar els diferents registres i formes del coneixement matemàtic
- Estructurar l'avaluació de manera que tingui en compte els diferents graus de significació del coneixement matemàtic
- Proveir diferents formes d'obtenció d'informació per a l'avaluació

El mateix autor admet que, plantejada d'aquesta manera, una actuació avaluativa es caracteritzarà per una certa redundància i pluralitat de la informació obtinguda, però conclou que probablement aquests seran dos trets necessaris, encara que no suficients, per poder assegurar que un sistema avaluatiu ha estat ben dissenyat.

El *tipus de coneixements i habilitats* matemàtiques que l'alumne usa en una situació avaluativa són *molt variats* i es poden classificar d'acord amb diverses categoritzacions. En la majoria de casos, quan es duen a terme aquest tipus de classificacions en una actuació avaluativa se solen graduar el tipus de coneixements que es posen en joc anant d'aquells més concrets i operatius a aquells més generals i que impliquen un nivell de raonament més elevat. Presentem, com a exemple, dues d'aquestes possibles classificacions. Broome (1993), explicant una experiència avaluativa duta a terme a Barbados, classifica els ítems avaluatius atenent a una doble caracterització. D'una banda, si requereixen posar en joc:

- . Coneixement conceptual
- . Coneixement procedimental
- . Coneixement estratègic
- . Resolució de problemes més oberts

I, d'altra banda, si el tipus d'activitat que s'exigeix a l'alumne respon a un perfil de:

- . Computació (aplicació de model)
- . Comprensió (posar en acció un tipus de pensament algorítmic)
- . Raonament (plantejar una recerca més oberta)

De manera semblant, Gjone (1993), presentant una experiència avaluativa noruega, explica que en la classificació que es féu en analitzar els diferents tipus de processos que es volia que apliquessin els alumnes, es consideraren les categories següents:

- . Comunicació
- . Computació i estimació
- . Raonament
- . Exploració de models
- . Establiment de connexions i modelització
- . Resolució de problemes

Valguin aquests dos casos que s'han exposat, entre molts altres exemples que es podrien presentar, com a exponents de la necessitat de considerar i catalogar la variada gamma de tipus de coneixements que intervenen i que s'observen en els alumnes quan se'ls planteja una situació avaluativa.

2.1.2. Teories sobre l'aprenentatge matemàtic

Qualsevol actuació avaluativa pressuposa o porta implícita una certa concepció de com arriba a saber matemàtiques un alumne. O sigui, darrera d'un determinat model avaluatiu hi ha, en coherència, una determinada teoria de l'aprenentatge matemàtic.

Romberg (1993) fa una presentació molt esquemàtica de les teories de l'aprenentatge que s'han anat produint al llarg del segle XX que, si bé és necessàriament reduccionista, ajuda molt a entendre les diferents perspectives a partir de les quals s'ha teoritzat sobre l'aprenentatge en general, i de l'aprenentatge de les matemàtiques en particular. L'autor cataloga fins a set teories de l'aprenentatge, que són les que a continuació exposem.

- *Conductivisme ("Behaviorism")* . Prioritza l'atenció en els resultats de l'aprenentatge (conductes) més que no pas en el procés que té lloc quan es produeix l'aprenentatge. Assumeix que l'aprenentatge es produeix de manera racional, però passivament, reaccionant als estímuls de l'entorn. Pel que fa a l'avaluació, un augment en el nombre de respostes correctes que es donen a qüestions específiques se sol considerar com a evidència que s'ha produït aprenentatge.
- *Conductivisme diferencial*. Sense renunciar als principis bàsics del conductivisme, es postula que hi ha diferències biològiques o neurològiques, determinades genèticament, que influeixen en com s'absorbeix la informació. Les diferències individuals en l'aprenentatge s'expliquen a causa de predeterminades aptituds, habilitats, capacitats o estils que condicionen la manera com es processa la informació. La formació de grups, a les escoles, en funció de les habilitats dels alumnes es basa en aquesta concepció. No té implicacions en noves formes d'avaluació i es continuen considerant com a idonis els tests a base de qüestions.
- *Constructivisme "gestalt"* (podríem traduir "gestalt", paraula alemanya, per organització o configuració). L'aprenentatge implica construcció activa més que no pas absorció passiva de l'entorn. En aquest cas, l'evidència de l'aprenentatge es detecta i registra a través dels canvis en la manera com les persones expliquen els seus pensaments durant la resolució d'un problema. En matemàtiques, destaquen en aquesta línia els treballs de Polya (1945), Hadamard (1945) i Wertheimer (1959).
- *Constructivisme desenvolupatiu* . L'aprenentatge humà difereix i canvia en diverses etapes evolutives, que Piaget anomena preoperacional, operacional concreta i operacional formal. Té una forta influència en la visió sobre l'aprenentatge dels nens i nenes més petits. L'aprenentatge implica una reestructuració del coneixement a través d'un procés que va d'un equilibri inicial a un equilibri final, a través d'un element desestabilitzador. L'evidència d'aprenentatge es detecta a través del que s'anomena el mètode clínic: entrevistes a alumnes mentre resolen problemes.
- *Constructivisme dialèctic*. El canvi es produeix per síntesis dialèctiques en contextos, accions o activitats, en les quals el subjecte hi és implicat. És una teoria preconitzada per psicòlegs soviètics, com Vygotsky (1962), Luria (1979) i Leont'ev (1981). La idea de síntesi substitueix la del procés equilibri1 – desequilibri – equilibri2 , en l'estructura del coneixement. L'evidència d'aprenentatge es continua obtenint a través d'entrevistes.
- *Constructivisme psicoanalític*. L'aprenentatge es fonamenta, o és molt influït, per desitjos irracionals, pors i altres emocions humanes. Aquesta teoria ha tingut importància en l'estudi de fòbies, bloqueigs i fenòmens similars que es produeixen en l'aprenentatge de les matemàtiques. L'evidència d'aprenentatge s'obté a partir d'una psicoanàlisi clínic.

Com es veu, les sis teories exposades fins ara es podrien agrupar en dues grans categories, les que quedarien emmarcades en un referent conductivista i les que s'emmarcarien en un referent constructivista.

Sempre segons Romberg (1993), actualment predomina, si més no en determinats àmbits, una teoria o una visió de l'aprenentatge matemàtic que es podria anomenar "*constructivisme social*", ja que es considera l'aprenent com un constructor actiu de coneixement en interacció amb un entorn social. És una visió que incorpora idees dels models anteriors i que es podria intentar delimitar a partir de les vuit afirmacions següents:

1. Hi ha components clau de la funció mental que es relacionen de la manera que s'exposa a continuació. El procés s'inicia amb una experiència que aporta informació sensorial. Aquesta informació és filtrada per un mecanisme de control executiu que decideix què fer-ne. La informació resultant és organitzada i emmagatzemada a la memòria. Es distingeixen tres tipus de memòria: la memòria treballadora ("working") que implica la quantitat limitada d'informació que un pot processar en un moment determinat, la memòria a curt termini que emmagatzema la informació que s'haurà d'usar al cap d'un període relativament curt de temps, i la memòria a llarg termini on s'emmagatzema la informació que no es perd ni es desa a les altres memòries.
2. Els humans són capaços de recordar una gran quantitat d'informació, però tenen una capacitat extremament limitada de pensar sobre diferents coses simultàniament. Això comporta que la memòria a llarg termini ha d'estar molt ben organitzada, en el que els psicòlegs anomenen esquemes. En matemàtiques, aquests esquemes correspondrien als anomenats camps conceptuals.
3. La informació que proporcionen les noves experiències s'incorpora a un esquema ja existent (assimilació) o força un canvi en un esquema particular ja existent (acomodació).
4. Els esquemes de coneixement són, de manera natural, idiosincràtics de cada individu, i, a més, aquest individu normalment no és conscient de l'organització dels seus esquemes. Rarament es reflexiona i es tenen en compte les conseqüències derivades del fet que les persones tinguin diferents esquemes relacionats amb un mateix esquema general.
5. Encara que la majoria d'aprenentatge es produeix a través d'assimilació i acomodació natural d'experiències, també es pot produir aprenentatge a través d'experiències preorganitzades i estructurades. La majoria d'experiències instruccionals, de l'escola, tenen aquest caràcter i pretenen connectar les experiències naturals i informals amb els aspectes formals de la disciplina.
6. Les activitats instructives coherents que s'han dissenyat per promoure una reorganització conceptual en un esquema individual tenen, en general, una seqüència de tres fases: esdeveniment d'exposició (presentació), esdeveniment de discrepància (produeix conflicte cognitiu) i període de resolució. Tot el procés s'ha de veure com una negociació entre alumne i professor. Els coneixements han de ser adquirits pels estudiants a través d'una construcció activa i social.
7. Els esquemes mai no són fixos, canvien contínuament a través del temps a mesura que l'individu creix i té experiències addicionals. Cal tenir en compte que hi ha tres elements clau en l'asoliment de la comprensió i la competència durant els anys escolars:
 - a) El mode de funcionament o nivell d'abstracció i la complexitat de l'estructura.

- b) Pel cap baix, hi ha quatre modes de funcionament: el mode sensòrio-motor (objectes), el mode icònic (significants), el mode concret-simbòlic (conceptes) i el mode formal (conceptes abstractes)
 - c) Els modes progressen des d'accions concretes a conceptes i principis abstractes i, a més, l'emergència d'un mode nou no substitueix l'anterior.
8. Els alumnes que tenen un esquema inicial no prou ben organitzat busquen activament experiències que els permetin proveir d'una estructura el seu esquema. De totes maneres, hi ha una forta resistència a canviar un esquema ben desenvolupat, perquè té un gran poder assimilador. És difícil, a vegades, distingir entre assimilació i acomodació.

Tot i que pugui semblar una frivolidat presentar en unes poques línies, com s'ha fet aquí, diferents teories existents sobre l'aprenentatge, creiem que és útil tenir-les com a referent per tal de poder emmarcar mínimament dintre de quina concepció se situa una experiència avaluativa, o si més no quines característiques de l'aprenentatge es tenen en compte quan es planteja una activitat d'avaluació.

2.1.3. L'informe Cockcroft (1985) i els estàndards d'avaluació del NCTM (1991)

Convé tenir present què es diu sobre l'avaluació en matemàtiques en dos dels estudis més seriosos i sistemàtics que s'han realitzat sobre el seu ensenyament i aprenentatge. Ens referim a *l'informe Cockcroft (1985)* dut a terme a la Gran Bretanya per encàrrec del Parlament britànic i l'establiment dels *estàndards curriculars i d'avaluació* que ha fet, a USA, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991) (l'any 2001, s'han actualitzat els estàndards curriculars). Els dos documents són referents obligats a l'hora de plantejar-se qualsevol qüestió referent a l'ensenyament, i per tant a l'avaluació, de les matemàtiques.

De *l'informe Cockcroft* en destacarem alguns paràgrafs que fan referència a l'avaluació i que tenen una incidència molt directa amb l'estudi que estem presentant.

Així, en el paràgraf 414, s'afirma:

“L'avaluació constitueix un aspecte essencial de la tasca dels professors; s'ha de portar a terme de diverses formes i ha de ser útil per a diverses finalitats. Gran part de les activitats d'avaluació es basen en la correcció de treballs escrits i en les dades que obté el professor dels comentaris realitzats i les preguntes formulades durant la discussió amb els alumnes, individualment o en grup. En part, es poden realitzar també de forma més ràpida i informal. Es pot fer mitjançant una breu conversa que posi de manifest si s'ha comprès un punt o mitjançant un cop d'ull a un treball que s'estigui fent per esbrinar si s'han superat les dificultats. Quan els alumnes han d'efectuar activitats pràctiques, cal que el professor observi el seu treball per descobrir si es dominen determinades habilitats, com ara comptar, mesurar o fer ús dels instruments de dibuix. Totes aquestes activitats d'avaluació són imprescindibles per permetre al professor supervisar el desenvolupament i progrés dels seus alumnes”.

En aquest paràgraf, com veiem, es posa de manifest la insuficiència de les proves escrites i de les avaluacions externes per poder realitzar una avaluació completa dels alumnes.

En el paràgraf 420, s'afirma:

“Els exàmens, ja siguin orals, escrits o pràctics, mai no han de constituir un fi en si mateixos, sinó un mitjà per disposar d'informació que serveixi de base per a una acció posterior. El professor ha de ser conscient de la diferència entre “aprendre quelcom per a un examen” i aprendre-ho de manera que s'assimili i es pugui retenir per a la seva aplicació en el futur. Aquest darrer tipus d'aprenentatge no sempre es posa de manifest en el resultat d'una única prova”.

Tornem a trobar la insistència en la insuficiència de les proves escrites i apareix ara, a més, la necessitat del caràcter diagnòstic de les proves d'avaluació.

Finalment, en el paràgraf 423 s'incideix en el fet que:

“És important comprendre que les proves estandaritzades només mesuren alguns aspectes del rendiment en matemàtiques. No diuen res d'altres aspectes com la perseverància i l'actitud, ni de la capacitat per a aplicar les matemàtiques a situacions que no resulten familiars”.

Sense negar, doncs, la importància que poden tenir les proves estandaritzades, s'insisteix en el fet de no donar-los un valor absolut, ni complet. Les proves estandaritzades aportaran un tipus d'informació que pot ser de gran utilitat, però que ha de ser complementada amb altres informacions, de les quals només pot disposar el professor que fa el seguiment quotidià del seu alumnat.

Els *estàndards per a l'avaluació*, establerts pel NCTM (1991), es defineixen com a afirmacions-declaracions que poden ser utilitzades per jutjar la qualitat d'un mètode d'avaluació. Són declaracions de principis sobre allò que té valor i allò que no en té en una avaluació matemàtica.

Es presenten catorze estàndards agrupats en tres categories: un primer grup de tres en els quals es tracten estratègies generals d'avaluació relacionades amb els estàndards curriculars, un segon grup de set estàndards que fan referència directament a l'avaluació dels alumnes i un darrer grup, on hi ha quatre estàndards que es refereixen a l'avaluació de la qualitat del programa de matemàtiques.

A continuació, farem una breu descripció dels deu primers estàndards, o sigui aquells que corresponen a les dues primeres categories, que són els que tenen un major interès per a l'estudi que estem presentant.

Estàndards d'avaluació general

Estàndard 1: Coherència.

Els mètodes i tasques que s'usen per a avaluar l'aprenentatge dels alumnes han de ser coherents amb el currículum, pel que fa a:

- fites, objectius i continguts matemàtics
- la importància relativa que es dona als diversos temes i processos, i a les seves interrelacions
- l'enfocament de l'activitat docent, i les opcions que s'hi hagin fet en referència, per exemple, a l'ús de la calculadora, dels ordinadors i de materials manipulatius

Estàndard 2. Fonts múltiples d'informació.

Les decisions que es prenen sobre l'aprenentatge dels alumnes han de basar-se en la convergència d'informació obtinguda a partir de diverses fonts. Aquestes fonts han d'abraçar tasques que:

- requereixin diferents tipus de pensament matemàtic
- presentin el mateix concepte o procediment matemàtic en contextos, formats i situacions problemàtiques diferents

Estàndard 3. Mètodes i formes adequats d'avaluació.

Els mètodes i els instruments d'avaluació han de seleccionar-se en base a:

- el tipus d'informació que es vol obtenir
- l'ús que es pensa fer de la informació
- el nivell de desenvolupament i la maduresa dels alumnes

No és adequat que les dades obtingudes a partir d'una actuació avaluativa s'usin per a altres finalitats que no siguin les previstes inicialment. Entre els possibles propòsits d'una actuació avaluativa s'esmenten: la diagnosi, el “*feedback*” docent, la qualificació, els assoliments matemàtics en general, i la valoració del programa.

Estàndards d'avaluació dels alumnes

Estàndard 4. Potència matemàtica.

L'avaluació del coneixement matemàtic dels alumnes ha de donar informació sobre:

- la seva capacitat per aplicar el que saben a la resolució de problemes, tant de l'àmbit matemàtic com d'altres matèries
- la seva capacitat d'emprar el llenguatge matemàtic per a comunicar idees
- la seva capacitat de raonament i anàlisi
- el seu coneixement i les seves estructures conceptuals i processuals
- la seva actitud envers les matemàtiques
- la seva comprensió de la natura de les matemàtiques
- la integració d'aquests diferents aspectes del coneixement matemàtic

Estàndard 5. Resolució de problemes.

L'avaluació de la capacitat que té l'alumne d'utilitzar les matemàtiques per a la resolució de problemes ha de posar en evidència que és capaç de:

- formular problemes
- aplicar diverses estratègies per a resoldre problemes
- resoldre problemes
- comprovar i interpretar resultats
- generalitzar solucions

Estàndard 6. Comunicació.

L'avaluació de la capacitat dels alumnes per a comunicar matemàtiques ha de posar en evidència que són capaços de:

- expressar idees matemàtiques parlant, escrivint, demostrant-les i representant-les visualment
- entendre, interpretar i valorar idees matemàtiques presentades de forma escrita, oral o visual
- utilitzar vocabulari matemàtic, notacions i estructures per a representar idees, descriure relacions i modelitzar situacions

Estàndard 7. Raonament.

L'avaluació de la capacitat dels alumnes per a raonar matemàticament ha de posar en evidència que són capaços de:

- utilitzar el raonament inductiu per a reconèixer patrons o models i formular hipòtesis o conjectures
- utilitzar el raonament per a desenvolupar argumentacions plausibles d'enunciats matemàtics
- utilitzar el raonament proporcional i espacial per a resoldre problemes
- utilitzar el raonament deductiu per a verificar una conclusió, valorar la validesa d'una argumentació i construir argumentacions sòlides
- analitzar situacions per a trobar propietats i estructures comunes
- reconèixer l'estructura axiomàtica de les matemàtiques

Estàndard 8. Conceptes matemàtics.

L'avaluació del coneixement de les estructures conceptuals dels alumnes referents a conceptes matemàtics ha de posar en evidència que són capaços de:

- anomenar, verbalitzar i definir conceptes
- identificar i generar exemples vàlids i no vàlids
- utilitzar models, diagrames i símbols per a representar conceptes
- passar d'un model de representació a un altre
- reconèixer els diversos significats i interpretacions dels conceptes
- identificar propietats d'un concepte determinat i reconèixer les condicions que determinen un concepte en particular
- comparar i contrastar conceptes

A més, l'avaluació ha de posar de manifest fins a quin grau els alumnes han establert connexions entre el coneixement de diversos conceptes.

Estàndard 9. Procediments matemàtics.

L'avaluació del coneixement procedimental dels alumnes ha de posar en evidència que són capaços de:

- reconèixer quan és adequat un procediment
- explicar els motius o raons per als diversos passos d'un procediment
- explicar o portar a terme un procediment de manera fiable i eficaç
- verificar empíricament (per exemple, usant models) o analíticament el resultat obtingut per l'aplicació d'un procediment
- reconèixer procediments correctes i incorrectes
- generar procediments nous i ampliar o modificar els coneguts

- reconèixer la naturalesa que tenen i el paper que aconsegueixen els procediments en les matemàtiques

Estàndard 10. Actitud matemàtica.

L'avaluació de l'actitud matemàtica dels alumnes ha d'obtenir informació sobre:

- la confiança que tenen en l'ús de les matemàtiques per a resoldre problemes, comunicar idees i raonar
- la flexibilitat que demostren quan exploren idees matemàtiques i assagen mètodes alternatius per a la resolució de problemes
- el desig de continuar fins al final, o la constància, en l'execució d'una tasca matemàtica
- l'interès, curiositat i inventiva quan fan matemàtiques
- la inclinació que mostren a revisar i reflexionar sobre el seu propi pensament i la seva actuació
- com valoren l'aplicació de les matemàtiques a situacions que sorgeixen en l'estudi d'altres matèries i en l'experiència quotidiana
- el reconeixement que fan del paper que tenen les matemàtiques en la nostra cultura, i el valor que tenen com a instrument i com a llenguatge

2.1.4. Consideracions finals

Ressaltem, d'acord amb Niss (1993), l'enorme *complexitat* que té el plantejament de l'avaluació matemàtica en general, ja que se li exigeixen simultàniament l'acompliment dels quatre propòsits següents:

- a) Que permeti obtenir informació, de manera vàlida i fiable, sobre els coneixements, les actituds, les habilitats i el domini dels procediments en relació a les matemàtiques i els seus aspectes essencials.
- b) Que proveeixi assistència, ajut i orientació a l'aprenent, de manera individual.
- c) Que ajudi al professor a monitoritzar de manera adequada el seu ensenyament i el seu guiatge dels alumnes.
- d) Que assisteixi les autoritats i els dissenyadors i executors de currículums per poder conformar el marc adequat per a la instrucció matemàtica.

Fem notar que aquesta observació de Niss està totalment relacionada amb les quatre funcions que, tal com s'ha descrit en el capítol 1, té associades l'avaluació: pedagògica, professional, social i política.

Finalment, destaquem que Webb (1993) afirma que qualsevol teoria sobre l'avaluació matemàtica, teoria que val a dir que actualment no es pot considerar com a consolidada, s'hauria de plantejar les quatre qüestions següents:

- a) Com es pot relacionar el coneixement dels continguts matemàtics dels alumnes amb les respostes obtingudes a la situació d'avaluació plantejada?
- b) Quina prioritat es dona a la validesa i a la fiabilitat d'una actuació avaluativa ?
- c) Com s'agreguen les informacions obtingudes ? És vàlid i significatiu sumar el nombre de respostes correctes obtingudes com a indicador de coneixement matemàtic ? Com s'hi adjunten les observacions diàries del professor i els projectes i treballs dels alumnes ?
- d) Com s'integra o quina relació cal establir entre l'avaluació dels coneixements matemàtics i l'avaluació dels coneixements d'altres àrees i dels procediments cognitius generals ?

Com es veu, doncs, l'avaluació matemàtica, com a entitat teòrica, és un corpus en construcció, els elements constitutius de la qual cal anar perfilant, actualment, a través de la creació i aplicació d'actuacions avaluatives sotmeses, tant com sigui possible, als criteris de rigor en la seva elaboració i de funcionalitat en els seus resultats.

2.2. Experiències generalitzades d'avaluació d'aprenentatges matemàtics

2.2.1. Consideracions generals

Hi ha finalitats d'actuacions avaluatives que comporten que aquestes s'apliquin a un nombre molt elevat d'alumnes, o a mostres d'alumnes de localitzacions geogràfiques diverses. Si, per exemple, es pretén descriure quina és la situació, en un país, dels coneixements dels alumnes d'una determinada edat en relació a uns continguts matemàtics, caldrà prendre una mostra prou gran perquè els resultats es puguin considerar representatius. De la mateixa manera, si es volen elaborar proves estàndard d'avaluació, com ja s'ha explicat, caldrà aplicar-les a mostres molt nombroses d'alumnes per tal que el valor estàndard que porti associat cada ítem sigui, realment, un referent estàndard dels resultats que són esperables. Igualment, si es pretén fer un estudi comparatiu de l'estat dels resultats dels aprenentatges matemàtics dels alumnes de diversos països, forçosament s'haurà d'aplicar algun instrument d'avaluació a un nombre suficientment gran d'alumnes de cada país per tal que els valors indicadors que s'obtinguin siguin realment significatius.

A aquest tipus d'actuacions avaluatives ens referim quan parlem d'experiències generalitzades d'avaluació. Experiències que s'han dut a terme prenent com a població a avaluar tot l'alumnat (o una mostra molt àmplia) d'una determinada categoria (d'edat o curs acadèmic) d'un país o conjunt de països amb la finalitat de conèixer l'estat de la qüestió en relació a alguns aprenentatges matemàtics o amb la finalitat de comparar els resultats que s'obtenen en diversos països.

Com veurem, hi ha experiències avaluatives d'aquest tipus molt diverses i el que ens proposem a continuació és presentar-ne algunes de les més significatives, i descriure'n els trets principals. Això pot servir per veure diferents maneres de plantejar actuacions avaluatives d'aquesta mena i també per veure si s'observa algun tipus de tendència en l'evolució de les característiques dels instruments d'avaluació que s'usen.

Cal tenir present que quan es fan estudis comparatius dels resultats de diversos països, hi ha un problema molt important i no negligible que és el de la traducció dels textos de l'instrument o instruments d'avaluació. Hanna (1993) mostra fins a quin punt els factors lingüístics, la variabilitat semàntica i la complexitat sintàctica fan pràcticament impossible l'assoliment del que ell anomena l'equivalència transcultural ("*cross-cultural*") d'un mateix instrument d'avaluació. Esmenta, com a exemple, l'experiència de les traduccions dels ítems en el SIMS ("*Second International Mathematics Study*"). Cada traducció de l'anglès al francès era contra-traduïda del francès a l'anglès i, a més, era examinada per sis professors de matemàtiques bilingües, que treballaven per separat de manera independent. Una traducció no era considerada equivalent si dos, pel cap baix, d'aquests sis experts consideraven que contenia diferències en una o més de les categories següents: en el nivell de dificultat del llenguatge, en la presència de termes matemàtics diferents dels usats en els llibres de text més habituals en les dues llengües, en el nivell d'abstracció, en el significat implícit o desitjat, en l'èmfasi o claredat de la notació i en la presència d'errors menors de traducció. Malgrat que els ítems passaren aquest control, cridaren l'atenció fortes diferències que s'observaren en els resultats d'alguns ítems. Per exemple, un dels ítems fou contestat correctament pel 79% d'alumnes de llengua anglesa i només pel 25% dels de llengua francesa. L'ítem presentava cinc parells de figures i tenia l'enunciat següent:

Anglès: "*In which diagram below is the second figure the image of the first figure under a reflection (flip) in a line ?*"

Francès: “ *Parmi les figures suivantes, quelles sont celles qui sont symétriques par rapport à une droite ?* ”

Si ens hi fixem, s’observa que en els enunciats hi ha diferències importants, que no fan referència tant al contingut com a la manera de presentar-lo:

- a la versió francesa no es fa referència a parells de figures, en canvi a la versió anglesa hi ha una referència implícita a parells ja que es parla de primera figura i de segona figura .
- a la versió anglesa queda clar que hi ha una resposta correcta, la versió francesa no ho precisa.
- la versió anglesa usa els termes “*reflection*” i “*flip*” , mentre que la versió francesa només es refereix a “*symétriques*”.

Aquest ítem, i d’altres exemples que exposa el mateix autor, mostren que, malgrat l’acurada traducció, malgrat el fet de fer un procés de traducció i contra-traducció i malgrat el control que s’ha explicat que s’aplicà, no es va aconseguir una equivalència plena entre els enunciats dels ítems en les diverses llengües.

A continuació, en els apartats següents, presentem algunes experiències avaluatives generalitzades dutes a terme en països determinats o a nivell internacional.

2.2.2. Assessment of Performance Unit (APU) (1978 – 1987)

L'any 1975, la *National Foundation for Educational Research* estableix, dintre del *Department of Education and Science (DES)*, per a Anglaterra i el País de Gal·les, l'*Assessment of Performance Unit (APU)* per tal de promoure i desenvolupar l'avaluació, el monitoratge i el control dels alumnes a l'escola i identificar la incidència real del baix rendiment ("*underachievement*") dels alumnes.

Per dur a terme aquest objectiu, es concretaren quatre finalitats:

- Identificar i posar de manifest els instruments i mètodes d'avaluació existents que podien ser rellevants per aquest propòsit
- Promoure la creació de nous instruments i mètodes d'avaluació, contrastats per estudis estadístics i de mostreig
- Promoure la cultura d'avaluació en cooperació amb els professors i les autoritats locals d'educació
- Identificar diferències significatives en els aprenentatges, relacionades amb les circumstàncies en què aprenen els alumnes.

El treball es dugué a terme, de manera sistemàtica, en cinc àrees del coneixement: llengua anglesa, matemàtiques, ciències, llengües estrangeres i tecnologia. Tot plegat va concloure en l'*Education Reform Act (1988)* que incloïa la construcció d'un *National Curriculum and Associated Assessment (NCA)*.

Pel que fa al camp de l'avaluació matemàtica, es distingiren tres dimensions:

- *Contingut*. Els continguts es classificaren en cinc categories segons la temàtica a què feien referència (nombre, mesura, geometria, àlgebra i probabilitat-estadística), subdividida cada una d'elles en aproximadament dotze subcategories.
- *Context*. En referència al context en què se situaven les activitats proposades: vida quotidiana, altres àrees escolars, etc...
- *Resultat d'aprenentatge*. En aquesta dimensió es consideraren tres categories: comprensió de conceptes i aplicació de rutines; ús d'estratègies de resolució de problemes; i actituds envers les matemàtiques.

Al llarg del període de nou anys que durà l'actuació, es feren sis aplicacions generalitzades d'instruments d'avaluació a alumnes de 11 i 15 anys (per tant, en total dotze supervisions) d'escoles d'Anglaterra, País de Gal·les i, també d'Irlanda del Nord, que s'incorporà al projecte.

Els instruments d'avaluació que s'usaren foren tests escrits i proves orals.

Els tests escrits contenien 50 ítems de resposta curta (alguns d'ells eren qüestions tancades de resposta d'elecció múltiple), per avaluar conceptes i aplicació de rutines, 5 o 6 problemes amb un conjunt graduat de qüestions (per avaluar estratègies de resolució de problemes) i qüestionaris d'actitud, a base d'escales de Lickert relacionades amb l'interès i la utilitat de la matemàtica, i seccions d'opció lliure (per avaluar l'actitud envers les matemàtiques).

L'any 1987 s'hi incorporaren el que s'anomenaven tests temàtics, que estaven tots ells construïts entorn d'un mateix context: un viatge a l'estranger, el clima, etc... Aquests tests escrits eren aplicats pels professors habituals dels alumnes.

Les proves orals, aplicades per professors experts, tenien modalitats molt diferents.

Algunes eren d'aplicació individual i estaven molt centrades en el treball amb materials manipulatiu. D'altres, sobre resolució de problemes, s'aplicaven a grups de tres alumnes de nivell similar en matemàtiques. Finalment, sobre mostres d'alumnes no escollides a l'atzar, es tractaren qüestions de matemàtiques treballades amb ordinador.

També es recollia, mitjançant un qüestionari, informació sobre característiques del centre: temes del currículum que es tractaven, temps dedicat a les matemàtiques, grandària i organització dels grups d'alumnes, ...

En total, s'aplicaren aproximadament 150 000 proves escrites, 14 000 proves orals individuals, 12 000 proves orals per grups i 17 000 qüestionaris d'actituds. En el buidatge es registrà el percentatge d'èxit de cada ítem, la proporció d'alumnes que feien un determinat error i que triaven un mètode determinat. S'analitzaren, també, les influències, en el resultat, del canvi de les quantitats i del context en un determinat ítem i es compararen les respostes dels alumnes de 11 i 15 anys a un mateix ítem. Vegem, per exemple, els resultats obtinguts en dues qüestions tancades de les d'opció de resposta múltiple. S'hi indica el percentatge de respostes de cada opció i es qualifica, quan escau, el tipus d'error.

Qüestió 1 (15 anys)

Which of the numbers below has the smallest value ?

(Quin dels següents nombres té el valor més petit ?)

A	0,625	34% (LS)
B	0,25	3%
C	0,375	2%
D	0,125	37% (Resposta correcta)
E	0,5	20% (DPI)
Altres / Blanc		2%

Qüestió 4 (11 anys)

Sarah measured the lengths of some sticks in meters. Which stick is the smallest ?

(La Sara va mesurar les longituds de diversos bastons, en metres. Quin és el bastó més curt ?)

A	0,625 m	12% (LS)
B	0,25 m	4%
C	0,375 m	2%
D	0,125 m	14% (Resposta correcta)
E	0,5 m	67% (DPI)
Altres / Blanc		3%

L'error conegut com a "*Decimal Point Ignored*" (DPI) (que consisteix en comparar el valor numèric dels nombres prescindint de la coma decimal), s'observa que és molt més alt a l'edat de 11 anys que no pas als 15 anys, en canvi l'error conegut com a "*Largest is Smallest*" (LS) (que consisteix en creure que com més gran és el nombre que hi ha després de la coma, menor és el valor del decimal) és més freqüent als 15 anys que no als 11 anys. Amb aquest exemple, es pot veure el tipus de qüestió que es plantejava a la part de la prova de qüestions tancades de múltiple opció, la catalogació d'errors i la comparació dels resultats dels alumnes de 11 anys amb els de 15 anys, en dos ítems pràcticament equivalents.

Entre els resultats que s'obtingueren es pot destacar, de manera general, que s'observà que petits canvis (en les quantitats o contextos) en els enunciats provocaven modificacions significatives en el percentatge de respostes correctes i, també, que un mateix problema obtenia el millor percentatge de bona resolució quan es presentava en grup reduït (tres persones), deprés en resolució oral individualment en entrevista i, finalment, el pitjor resultat s'obtenia quan els alumnes l'havien de resoldre individualment per escrit.

Com es pot veure, l'experiència avaluativa de l'APU fou molt àmplia i ambiciosa. En això rau, potser, algun dels seus problemes. Fou una actuació amb molts i diversos propòsits que no sempre eren compatibles, i, en allargar-se tant en el temps, convisqué amb canvis en els currículums i amb una evolució i modificació del que teòricament es consideraven tècniques avaluatives més idònies.

De totes maneres, aportà molta informació sobre quin era l'estat dels coneixements matemàtics i de l'actitud dels alumnes en el domini geogràfic on s'aplicà i, com s'ha dit, fou un element clau per a fonamentar el National Curriculum and Associated Assessment d'Anglaterra i País de Gal·les, ja que es dugué a terme amb un rigor i sistematitzat exemplars.

2.2.3. Third International Mathematics and Science Study (TIMSS) (1993-1995)

Aquesta fou una actuació d'avaluació a nivell internacional, en la qual participaren uns cinquanta països, patrocinada i organitzada per la International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA). El centre que coordinà tota la actuació fou la University of British Columbia de Vancouver, al Canadà.

Fa més de quaranta anys que la IEA duu a terme estudis internacionals comparatius. La IEA és una organització que no depèn de cap govern, que es creà a Bèlgica i que té el seu secretariat permanent a L'Haia (Holanda). Hi són representats uns quaranta sistemes educatius de 35 països de tot el món. Aproximadament cada dècada fa un estudi avaluatiu basat en el currículum i centrat en els resultats que obtenen els alumnes en unes determinades proves.

L'any 1960 s'inicià el FIMS (First International Mathematics Study) en el qual hi participaren dotze països bàsicament europeus i altament industrialitzats. L'actuació avaluativa s'aplicà als alumnes de tretze anys i als de final de secundària. Cap al 1980 es dugué a terme el SIMS (Second International Mathematics Study). Aquests dos estudis es poden considerar els precedents del TIMSS (Third International Mathematics and Science Study), que realitzà la recollida d'informació al llarg del curs 1993/94 i publicà el seu primer informe l'any 1995.

En el TIMSS, per primer cop la IEA feu un estudi en què avaluava conjuntament els coneixements de l'alumnat en ciències i matemàtiques. Els objectius de l'estudi són:

- conèixer el rendiment dels alumnes
- comparar els resultats dels diferents països
- intentar explicar les diferències que s'observen en funció de les característiques dels sistemes educatius respectius.

Per dur a terme l'estudi es té en compte la distinció entre el currículum intencional (allò que es fixa oficialment com a currículum prescriptiu), el currículum impartit (allò que es treballa a les aules) i el currículum assolit (allò que realment aprenen els alumnes).

En el TIMSS, s'aplicaren proves a tres poblacions ben diferenciades: l'alumnat de 9 anys, l'alumnat de 13 anys i l'alumnat que acaba la secundària (distingint en aquesta última població dues categories no disjunctes: la totalitat de la promoció i la de l'alumnat que cursava opcions especialitzades en ciències i matemàtiques).

A partir de la informació recollida, les investigacions de l'estudi s'orienten en quatre línies d'actuació:

1. ¿Quines diferències hi ha, entre els diferents països, en els objectius d'aprenentatge dels respectius currículums de ciències i matemàtiques i quines característiques dels sistemes educatius tenen influència en el desenvolupament d'aquests objectius?
2. ¿Com varia l'aplicació pràctica d'aquests objectius d'un país a l'altre i què motiva aquestes diferències?
3. ¿Quins conceptes, procediments i actituds aprenen els alumnes?
4. ¿Quines relacions hi ha entre el currículum i el context social i educatiu?

Espanya va participar només en la part de l'estudi corresponent als alumnes de 13 anys, que aleshores corresponia a l'alumnat que cursava 7è o 8è d'EGB.

Les proves que aplicà el TIMSS per a aquests alumnes contenien tres tipus d'ítems: ítems tancats de resposta d'elecció múltiple (amb 4 o 5 opcions de resposta), ítems oberts de resposta curta (semi-oberts) i ítems oberts de resposta extensa. A més d'aquestes proves, s'aplicaren qüestionaris de context amb preguntes sobre la situació personal, professional i acadèmica d'alumnes, professors i equips directius.

Els continguts dels currículums de matemàtiques s'agruparen en els sis blocs que s'exposen a continuació. En cada bloc s'explicita el percentatge del total de preguntes de les proves que corresponien al bloc i els continguts que s'hi consideraven:

Nombres i sentit numèric (34%) : operacions, relacions i problemes amb nombres naturals, fraccions i nombres decimals; càlculs i problemes amb percentatges; estimació d'operacions i arrodoniment de nombres.

Geometria (15%) : visualització i propietats de les figures geomètriques en el pla i l'espai; transformacions geomètriques, simetria, congruència i semblança.

Àlgebra (18%) : expressions algèbriques: fórmules i monomis; substitucions rutinàries; resolució de problemes que impliquen patrons, relacions, expressions i equacions lineals.

Representació i anàlisi de dades. Probabilitat (14%) : representació, lectura, interpretació i anàlisi de dades en quadres, taules i gràfics; coneixement i comprensió dels conceptes bàsics d'atzar i probabilitat.

Mesura (12%) : concepte de mesura; interpretació d'escala de mesura; unitats de longitud, àrea, volum, massa, temps; estimació i errors de mesura, precisió; problemes de mesura.

Proporcionalitat (7%) : concepte i problemes de raó i proporcionalitat.

S'aclareix que el bloc de proporcionalitat està constituït per continguts que encaixen en algun dels anteriors, especialment en el de "*nombres i sentit numèric*" i en el de "*geometria*" (semblança), i que es considera com a bloc a part a causa de l'especial rellevància que va adquirint en els currículums de molts països.

A continuació, presentem tres exemples de qüestions que es plantejaren per tal d'il·lustrar el tipus d'ítems amb què es treballà. Hem triat ítems corresponents al bloc de la proporcionalitat tenint en compte que l'estudi pràctic que drem a terme en el nostre treball es basa en aquest tema. Els percentatges de respostes que es donen corresponen als alumnes espanyols.

Exemple 1. Tres cinquens dels alumnes d'una classe són noies. Si afegim 5 noies i 5 nois, ¿quina de les afirmacions següents és certa?

- A. *Hi ha més noies que nois*
- B. *Hi ha el mateix nombre de noies que de nois*
- C. *Hi ha més nois que noies*
- D. *Amb la informació de què es disposa no es pot saber si hi ha més noies o nois*

El 62% respongueren la resposta correcta (A) i el 17% optà per la resposta D.

Exemple 2. El Pere va comprar 70 articles i l'Anna 90. Si tots els articles valien el mateix i tots plegats costaren 800 pta. ¿Quant va pagar l'Anna?

Resposta correcta: 450 pta.

El percentatge de respostes correctes va ser del 42%.

Exemple 3. La taula següent mostra els valors de x i y , essent x proporcional a y :

x	3	6	P
y	7	Q	35

Quins són els valors de P i Q ?

- | | | | |
|----|----------|-----|----------|
| A. | $P = 14$ | i | $Q = 31$ |
| B. | $P = 10$ | i | $Q = 14$ |
| C. | $P = 10$ | i | $Q = 31$ |
| D. | $P = 14$ | i | $Q = 15$ |
| E. | $P = 15$ | i | $Q = 14$ |

Un 10% d'alumnes donaren com a resposta la correcta, E.

Aquests tipus d'estudis internacionals presenten algunes dificultats. A banda del que ja s'ha comentat sobre la gran dificultat que representa el fet de voler aconseguir l'equivalència entre enunciats redactats en diferents llengües, els coordinadors del TIMSS destaquen també la gran despesa que representen tant de temps, com d'energia i de recursos diversos.

Malgrat les objeccions que s'hi puguin fer, des del TIMSS es destaca que aquest tipus d'estudis internacionals permeten avaluar la importància de variables que internament no poden ser observades. Concretament, l'estudi del TIMSS, a través dels resultats que obtingué, es proposà:

- Facilitar informació que pogués ser útil als diferents països per comparar i contrastar els seus currículums, les seves pràctiques educatives, i els resultats que obtenen els seus alumnes.
- Avaluar l'impacte potencial que els diferents currículums, estratègies d'ensenyament i disposicions administratives tenen en l'aprenentatge.
- Identificar allò que és possible aconseguir en l'ensenyament de les matemàtiques.
- Aconseguir una millor comprensió de la manera com canvia l'actitud de l'estudiant i de les causes que motiven aquest canvi, i també el coneixement de què és el que provoca el desenvolupament d'actituds positives.

En definitiva, segons els promotors del TIMSS, el seu estudi representa una oportunitat per aconseguir informació adreçada als agents de la política educativa per tal d'orientar futures reformes educatives.

A partir dels resultats obtinguts en el TIMSS, la OCDE va elaborar un informe, conegut com a "*Indicateurs OCDE 2000*", en el qual es consideren tres indicadors d'avaluació:

- L'indicador F1 que presenta la classificació dels països en funció dels resultats obtinguts pels alumnes de 9 i 13 anys i que permet, també, comparar el progrés realitzat pels alumnes d'un mateix país entre aquestes dues edats.
- L'indicador F2 que relaciona les actituds dels alumnes envers les ciències amb els resultats d'aquests mateixos alumnes en aquesta matèria.
- L'indicador F3 que examina les opinions dels alumnes pel que fa als factors d'èxit en matemàtiques i estudia la correlació entre les seves opinions i els resultats que obtenen en matemàtiques. En aquest últim indicador, s'obtenen els resultats següents pel que fa

a percentatges d'alumnes que estan d'acord o molt d'acord que els factors que s'esmenten són importants per tenir èxit en matemàtiques:

	9 anys	13 anys
Aptituds naturals	79%	64%
Sort	57%	32%
Treball assidu	88%	88%
Memorització de manuals o apunts	72%	62%

Cal fer dos comentaris que no queden recollits a la taula. En primer lloc, fer notar que el treball assidu és més destacat com a factor d'èxit per part de les noies que per part dels nois. I, d'altra banda, que la majoria d'alumnes que destaquen les aptituds naturals com a factor important d'èxit en matemàtiques tenen resultats mediocres en els aprenentatges matemàtics.

2.2.4.MEC: Evaluación del Sistema Educativo (1997)

L'any 1997, el *Ministerio de Educación y Cultura* (MEC) espanyol, a través de l'*Instituto Nacional de Calidad y Evaluación* (INCE) va portar a terme el que s'anomenà un projecte d'"avaluació del rendiment escolar dels alumnes de 14 i 16 anys".

Es va encarregar a una comissió integrada per especialistes designats per diferents administracions educatives (MEC i conselleries dels governs autònoms amb competències en educació) que garantís la validesa i veracitat dels resultats de l'estudi.

L'any 1998 es va publicar l'informe resultant, d'on es poden deduir els objectius de l'actuació avaluativa, encara que no s'exposen de manera explícita. Es diu, per exemple, que:

- *"En el informe se identifica lo que los alumnos de 14 y 16 años saben y saben hacer, lo que permitirá determinar su posición respecto a lo que se considera deseable que sepan y sepan hacer".*
- *"Una de las formas de llevar a cabo el diagnóstico del sistema educativo es la evaluación de los resultados de aprendizaje y la enseñanza a través de pruebas estandarizadas que, sin duda alguna, constituyen los instrumentos de medida de mayor objetividad, fiabilidad y eficacia en este campo".*

L'objecte de l'estudi foren quatre matèries: llengua castellana, matemàtiques, ciències de la naturalesa, i geografia i història.

Els instruments d'avaluació foren proves escrites, formades per ítems tancats de resposta d'elecció múltiple.

En el cas de les matemàtiques, els continguts es classificaren en cinc blocs:

- *Nombres i operacions*: utilització de nombres, operacions, ús de la proporcionalitat, estimació i arrodoniment (el 35% d'ítems a la prova per a alumnes de 14 anys i el 25% a l'adreçada a alumnes de 16 anys)
- *Mesura*: mesura i estimació de longituds, superfícies i volums (14 anys: 20% d'ítems; 16 anys: 15% d'ítems)
- *Geometria*: grau de desenvolupament de la capacitat espacial i la seva aplicació a la resolució de problemes quotidians (14 anys: 20% d'ítems; 16 anys: 20% d'ítems)
- *Anàlisi de dades, estadística i probabilitat*: situacions relacionades amb la vida quotidiana (14 anys: 15% d'ítems; 16 anys: 25% d'ítems)
- *Àlgebra i funcions*: capacitat per comprendre i utilitzar llenguatge algebràic i interpretar i construir funcions (14 anys: 10% d'ítems; 16 anys: 15% d'ítems)

Així mateix, es consideraren quatre operacions cognitives:

- *Conèixer* (14 anys: 15% d'ítems; 16 anys: 15% d'ítems)
- *Utilització d'algorismes i destreses bàsiques* (14 anys: 30% d'ítems; 16 anys: 20% d'ítems)
- *Utilització de procediments complexos* (14 anys: 35% d'ítems; 16 anys: 35% d'ítems)

- *Resolució de problemes* (14 anys: 20% d'ítems; 16 anys: 30% d'ítems)

Els ítems se sotmeteren a l'anàlisi clàssica per determinar-ne la fiabilitat, la dificultat i la discriminació.

Les mostres a què s'aplicaren les proves estaven constituïdes per 20 642 alumnes de 14 anys, pertanyents a 761 centres diferents, i 25 893 alumnes de 16 anys, pertanyents a 913 centres diferents.

Els resultats no es presentaren per percentatges o índexs d'encerts, sinó que es classificaren en una escala de 0 a 500, prenent com a mitjana 250 i desviació 50. Es catalogaren sis nivells diferents d'alumnes (definitos pels valors 150, 200, 250, 300, 350 i 400 en els seus resultats) i es feu una descripció dels coneixements que corresponien a cada un dels nivells.

En l'informe que es publicà es presentaren tres exemples d'ítems que pertanyien a les proves per a alumnes de 14 anys i tres més que pertanyien a les proves per a alumnes de 16 anys. En cada cas, un dels exemples era dels que s'anomenaven de dificultat alta, un altre de dificultat mitjana i el tercer de dificultat baixa. Els ítems que es feren públics són els que exposem a continuació:

- ÍTEM 6 Edat: 14 anys Resposta correcta: d)
Percentatge de respostes correctes: 19%

Un angle d'un paral·lelogram mesura 40° . Quant mesuren els altres tres angles ?

- a) Tots 40°
- b) Un 40° , i cada un dels altres dos 150°
- c) Un 40° , un altre 100° i el tercer 220°
- d) Un 40° , i cada un dels altres dos 140°
- e) Un 40° , un altre 120° i el tercer 200°

- ÍTEM 26 Edat: 14 anys Resposta correcta: a)
Percentatge de respostes correctes: 50%

La publicitat d'un diari es paga en proporció a l'àrea que ocupa. Si un anunci de 5cm per 8cm costa 2000 pts. Quant costarà un altre de 6cm per 10cm ?

- a) 3000 pts
- b) 2500 pts
- c) 2400 pts
- d) 2000 pts
- e) 4000 pts

- ÍTEM 23 Edat: 14 anys Resposta correcta: e)
Percentatge de respostes correctes: 77%

El pot de 3 pilotes de tenis costa 540 pts. Quants pots comprarem amb 2000 pts ?

- a) 5
- b) 7
- c) 12
- d) 9
- e) 3

- ÍTEM 4 Edat: 16 anys Resposta correcta: d)
Percentatge de respostes correctes: 22%

Quants cm^2 de cartró es necessiten per a construir una caixa, amb tapa, de dimensions 5cm, 6cm i 10cm ? (s'inclou dibuix esquemàtic de la caixa)

- a) 140
- b) 220
- c) 250
- d) 280
- e) 300

- ÍTEM 11 Edat: 16 anys Resposta correcta: b)
Percentatge de respostes correctes: 51%

Quant ens costaran uns pantalons que marquen, a la seva etiqueta, un preu de 5880 pts si, pel fet d'estar de rebaixes, ens descomptaran 1/12 del seu cost ?

- a) 705 pts
- b) 5390 pts
- c) 490 pts
- d) 5392 pts
- e) 6370 pts

- ÍTEM 10 Edat: 16 anys Resposta correcta: c)
Percentatge de respostes correctes: 72%

Al Lluís li han posat una multa de 5000 pts per no portar el casc; si paga a l'acte li descompten el 20% i si no, té un recàrrec del 30%. Com que no porta suficients diners a sobre, ¿quant ha de pagar?

- a) 4000 pts
- b) 6000 pts
- c) 6500
- d) 3500 pts
- e) 7500 pts

A partir dels resultats obtinguts, l'informe fa un perfil dels coneixements i habilitats matemàtics que tenen els alumnes espanyols de 14 i de 16 anys. També val la pena destacar que en un altre apartat de l'estudi es fa una enquesta sobre els procediments amb què són avaluats els alumnes de manera habitual en els centres educatius. Aquest aspecte de l'estudi no es fa diferenciat per a les diverses matèries, sinó de manera general i referit a totes elles. Les opcions possibles que es presentaven eren: correcció del treball/activitats de classe; correcció del treball/activitats a casa; proves periòdiques; intervencions orals; autoavaluació; altres. Per a cada una d'aquestes opcions s'havia de ponderar si es practicava: mai; quasi mai; a vegades; quasi sempre; sempre. En les taules següents es presenten els resultats que s'obtingueren, expressats en percentatges:

14 anys	Mai	Quasi mai	A vegades	Quasi sempre	Sempre
Correcció treball/activitats classe	2,9	6,2	21,5	29,6	39,7
Correcció treball/activitats casa	3,1	8,1	20,4	27,9	40,5
Proves periòdiques	7,4	7,9	20,5	22,3	41,9
Intervencions orals	9,3	20,6	34,2	19,8	16,1
Autoavaluació	23,9	25,4	24	11,8	14,9
Altres	23,3	19,5	31,6	12,2	13,3

16 anys	Mai	Quasi mai	A vegades	Quasi sempre	Sempre
Correcció treball/activitats classe	3	11,1	33,3	30,1	22,6
Correcció treball/activitats casa	3,7	13,8	31,8	29,8	20,9
Proves periòdiques	5	9,4	21,1	22,9	41,7
Intervencions orals	14,7	30,6	33,8	13,6	7,3
Autoavaluació	40,1	27,9	16,3	7	8,8
Altres	30,2	21,5	30,2	9,2	9

Tant als 14 com als 16 anys, les proves periòdiques és l'instrument d'avaluació més usat. Als 14 anys, la correcció dels treballs/activitats tant de casa com de l'aula gairebé tenen la mateixa freqüència d'ús que les proves periòdiques, però en canvi a l'edat de 16 anys aquest tipus d'instruments d'avaluació baixa molt en el seu ús. Igualment les intervencions orals i l'autoavaluació s'usen menys als 16 anys que als 14. L'ús d'instruments d'avaluació que no siguin proves periòdiques o correcció de treballs/activitats fets a casa o a classe s'observa que és molt minoritari.

2.2.5. OCDE: Programme for International Student Assessment (PISA) (2000 - 2006)

L'Organització per a la Cooperació i Desenvolupament Econòmic (OCDE) va endegar el *Programme for International Student Assessment* (PISA) per avaluar, de manera regular, en els alumnes de 15 anys, diversos aspectes de la seva preparació per a la vida adulta. La primera actuació es va dur a terme l'any 2000, a 32 països, de manera que a cada un d'ells s'avaluaren entre 4 500 i 10 000 alumnes.

En l'estudi es posa l'èmfasi en avaluar els resultats dels alumnes en allò que anomenen *literacy*, literalment "alfabetisme", i que es podria traduir per formació, capacitat o competència, i que en un sentit ampli es refereix al que en el camp de la lectura i escriptura s'entén per "alfabetisme funcional", o sigui "saber", "saber fer" i "saber aplicar". Aquesta *literacy* s'avalua en tres dominis del coneixement, la lectura, les matemàtiques i les ciències, posant l'èmfasi en l'habilitat per posar en funcionament processos fonamentals en situacions variades, més que no pas en la possessió d'uns coneixements específics. Com s'ha dit, el concepte de *literacy* que s'usa a PISA és molt més ampli del que es podria entendre com l'habilitat per a llegir i escriure. L'ús comú actual de *literacy* accepta que una persona *literate* (o sigui, que té *literacy*) en un domini concret posseeix un conjunt de competències en aquell domini. D'aquesta manera, no hi ha un punt de tall que permeti distingir una persona *literate* d'una que sigui *no literate*. La *literacy* es mesura en un continu, no com quelcom que hom posseeix o no posseeix. En el projecte PISA, la *literacy* és contemplada com a coneixements i habilitats per a la vida adulta, de manera que la seva adquisició és un procés que dura tota la vida i no es produeix només a les escoles, ni només mitjançant instrucció formal, sinó també a través de la interacció amb les persones i comunitats pròximes.

Una de les innovacions més rellevants de PISA és el fet que no es pretén definir cada un dels camps a què s'aplica només en termes de domini del currículum escolar, sinó en termes dels coneixements i procediments més importants que són necessaris en la vida adulta. Així, l'èmfasi es posa més en el fet de tenir o no unes determinades competències que no pas en dominar uns determinats continguts curriculars. A la paraula "competència" se li dona un significat no absolutament delimitat. Es refereix a l'habilitat de, donada una determinada situació en un context real, saber seleccionar, integrar i aplicar-hi els continguts necessaris per poder-la afrontar. La noció de competència estaria relacionada, doncs, amb la capacitat de seleccionar i integrar continguts, i en saber desenvolupar la seva funcionalitat en situacions de context real.

L'avaluació en el projecte PISA es du a terme mitjançant l'aplicació de proves escrites que contenen ítems tancats de resposta d'elecció múltiple i qüestions que obliguen els alumnes a construir la seva pròpia resposta. Els ítems s'organitzen en unitats basades en nuclis que reflecteixen una situació de la vida real. Els alumnes també responen un qüestionari que permet obtenir informació sobre ells, i els directors contesten un qüestionari per aportar dades sobre els seus centres.

El projecte PISA preveu aplicar-se cíclicament cada tres anys. L'any 2000 va realitzar-se la primera avaluació, de la qual se'n feren públics els resultats l'any 2001. En cada una de les avaluacions es dedica una especial atenció a un dels tres dominis, o sigui, es pren un domini com a "principal" d'aquella actuació, i se li dediquen dues tercers parts del temps total. L'any 2000, el domini "principal" fou la *literacy* en lectura, el 2003 serà la *literacy* en matemàtiques i l'any 2006 serà la *literacy* en ciències.

Les informacions que es pretén obtenir d'aquest programa són:

- un perfil bàsic dels coneixements i habilitats dels alumnes que acaben l'ensenyament obligatori.
- indicadors contextuals que relacionin els resultats amb les característiques de l'alumne i de l'escola.
- indicadors de tendència que mostrin com varien els resultats al llarg del temps
- una base de coneixement per a l'anàlisi política i per a la recerca.

Pel que fa a les matemàtiques, PISA defineix la *literacy* matemàtica com a:

“la capacitat per a identificar, entendre i implicar-se () en les matemàtiques i emetre judicis ben fonamentats sobre el paper que juguen les matemàtiques com a element necessari per a la vida social, laboral, privada, actual i futura, d'un individu, i per a la vida com a ciutadà constructiu, compromès i reflexiu”*

(() implicar-se en matemàtiques inclou comunicar, prendre posició cap a, en relació a, avaluar i, fins i tot, apreciar les matemàtiques)*

La *literacy* inclou una habilitat per a usar el coneixement, la comprensió i les destreses en contextos variats i per a una diversitat de propòsits. Com diu Cumming (1997): “La *literacy* matemàtica implica usar les matemàtiques per donar sentit al món; per a ajudar a sortir-se'n en situacions reals que sorgeixen en els entorns laborals, personals i comunitaris. Si això necessàriament implica entendre les idees, notacions i tècniques matemàtiques, també implica basar-se en el coneixement de contextos i circumstàncies particulars per decidir quan usar matemàtiques, escollir les matemàtiques que cal usar i avaluar críticament el seu ús”.

La *literacy* matemàtica inclou una habilitat per a aplicar el coneixement, la comprensió i les destreses matemàtiques en contextos “autèntics”. Es considera que un context és autèntic si apareix en les experiències i pràctiques actuals dels participants en situacions del món real. Significa també usar matemàtiques en situacions diferents que afecten individus, comunitats o el món en la seva globalitat.

En cada domini, en particular a les matemàtiques, l'avaluació s'organitza en tres dimensions que corresponen a:

- habilitats de procediment
- coneixement i comprensió
- context d'aplicació

Per avaluar la *literacy* matemàtica en el PISA es consideren els següents procediments com a rellevants i pertinents en tots els nivells educatius:

1. El pensament matemàtic, que inclou: plantejar preguntes característiques de les matemàtiques (“Com podem trobar...?”, “Existeix algun...?”, ...), conèixer el tipus de respostes que les matemàtiques ofereixen a aquestes preguntes, distingir entre diferents tipus d'afirmacions (definicions, teoremes, conjectures, hipòtesis, exemples, afirmacions condicionades) i comprendre i manejar l'extensió i els límits dels conceptes matemàtics.
2. Argumentació matemàtica, que inclou: conèixer què és una demostració matemàtica, seguir i avaluar cadenes d'argumentacions matemàtiques, posseir un cert sentit per a l'heurística i crear argumentacions matemàtiques.
3. Modelització, que inclou: estructurar la situació que ha de ser modelitzada; matematitzar; desmatematitzar; treballar en el model; validar el model; reflexionar, analitzar, criticar el model i els seus resultats; comunicar sobre el model i els seus resultats; monitorar i controlar el procés de modelització.

4. Plantejament i resolució de problemes, que inclou: plantejar i formular problemes matemàtics, i resoldre diferents tipus de problemes matemàtics.
5. Representació, que inclou: decodificar, interpretar i distingir entre diferents formes de representació d'objectes i situacions matemàtiques, i les interrelacions entre les diverses representacions; escollir i intercanviar entre diferents formes de representació d'acord amb la situació i el propòsit.
6. Símbols i formalisme, que inclou: decodificar i interpretar llenguatge simbòlic i formal i entendre les seves relacions amb el llenguatge natural; traduir del llenguatge natural al llenguatge simbòlic-formal; manejar expressions que continguin símbols i fórmules; usar variables, resoldre equacions i entendre els càlculs.
7. Comunicació, que inclou: expressar-se amb component matemàtic tant oralment com per escrit; entendre les afirmacions orals o escrites d'altri que tinguin component matemàtic.
8. Suports i eines, que inclou: conèixer i ser capaç d'usar diversos suports i eines que assisteixen l'activitat matemàtica; ser conscient de les limitacions d'aquests suports i eines.

El projecte PISA no usa, però, ítems que avaluin per separat les habilitats que s'acaben de relacionar. Quan es fan "matemàtiques reals" és necessari usar simultàniament moltes d'aquestes destreses.

Per tal de descriure els nivells de competència matemàtica, el projecte PISA classifica els procediments en tres categories:

1. Competències de tipus 1: Reproducció, definicions i càlculs. Té a veure amb coneixement de fets, representació, reconeixement d'equivalents, memorització d'objectes i propietats matemàtiques, utilització de procediments rutinaris, aplicar algorismes estàndard i desenvolupar destreses tècniques.
2. Competències de tipus 2: Connexions i integració per a la resolució de problemes. Comencen amb l'establiment de connexions entre diferents camps i dominis matemàtics, i amb la integració d'informació per tal de resoldre problemes simples.
3. Competències de tipus 3: Matematització, pensament matemàtic, generalització i intuïció ("*insight*"). Es tracta no només de ser capaços de resoldre problemes, sinó també de plantejar problemes, comunicar de manera adequada solucions i tenir la intuïció de la naturalesa de les matemàtiques com a ciència. Aquest nivell de competències és difícil d'avaluar.

Els currículums de matemàtiques escolars solen estar organitzats per temes, camps o disciplines dintre de les matemàtiques. Això tendeix a compartimentar les matemàtiques i sovint afavoreix una sobrevaloració de les fórmules i el càlcul. PISA fa una aproximació diferent i organitza el contingut a l'entorn de temes matemàtics transversals que anomena "grans idees", i que es podrien entendre com a continguts transversals i vertebradors. Les "grans idees" que es consideren són:

- canvi i creixement
- espai i forma

- raonament quantitatiu
- incertesa
- dependència i relacions

En l'aplicació de PISA de l'any 2000, es consideraren només les dues primeres “grans idees”, o sigui “canvi i creixement” i “espai i forma”.

A continuació, presentem alguns exemples d'ítems de les proves. Són exemples de les proves que es feren servir per al pilotatge i la validació i que no apareixeren a les proves definitives, ja que avaluaven aspectes redundants amb altres ítems. Serveixen, però, com a exemples del tipus de situacions que es plantegen a les proves del projecte PISA.

UNITAT 1: Les pizzes

Una pizzeria serveix dues pizzes rodones del mateix gruix i de diferent grandària. La més petita té un diàmetre de 30 cm i costa 30 €. La major té un diàmetre de 40 cm i costa 40 €.
(Proposat per l'Institut d'Educació d'Estocolm)

Pregunta (de resposta oberta): Quina pizza és proporcionalment més barata ? Mostra el teu raonament

Competència de tipus 2: Connexions i integració per resoldre problemes.

Idea principal: Canvi i creixement i/o Espai i forma.

Situació : Personal.

Barem de qualificació:

Puntuació 1: Respostes que fan el raonament general que l'àrea de la superfície de la pizza augmenta més ràpidament que el seu preu arribant a la conclusió que la més gran és la millor compra. Per exemple:

. El diàmetre de les pizzes coincideix amb el seu preu, però la quantitat de pizza obtinguda es troba usant el diàmetre al quadrat, per la qual cosa la major proporciona més quantitat per euro.

o,

respostes que calculen l'àrea i la quantitat per euro per a cada pizza, arribant a la conclusió que la pizza major és la millor opció. Per exemple:

. L'àrea de la pizza petita és $0,25 \times \pi \times 30 \times 30 = 225\pi$; la quantitat per euro és $23,6 \text{ cm}^2$. L'àrea de la pizza gran és $0,25 \times \pi \times 40 \times 40 = 400\pi$; la quantitat per euro és $31,4 \text{ cm}^2$. Per tant, la pizza més gran té millor preu.

Puntuació 0: Altres respostes incorrectes. Per exemple:

. Les dues són igual de cares

o,

respostes que són correctes però amb un raonament incorrecte o insuficient. Per exemple:

. La més gran

UNITAT 3: Els líquens

Com a conseqüència de l'escalfament global del planeta, el gel d'alguns glaciers s'està desfent. Dotze anys després que el gel hagi desaparegut, comencen a créixer a les roques

unes plantes diminutes, que s'anomenen líquens. Els líquens creixen aproximadament en forma de cercle.

La relació entre el diàmetre d'aquest cercle i l'edat del líquen es pot expressar aproximadament mitjançant la fórmula:

$$d = 7,0 \times \sqrt{t-12} \quad , \text{ per a } t \geq 12$$

essent d el diàmetre del líquen en mil·límetres, i t el nombre d'anys passats des de la desaparició del gel.

Pregunta 1 (de resposta oberta): Usant la fórmula, calculeu el diàmetre que tindrà un líquen 16 anys després de la desaparició del gel. Mostra els teus càlculs.

Competència de tipus 1 : Reproducció, definicions i càlculs

Idea principal: Canvi i creixement i Espai i forma

Situació: Científica.

Pregunta 2 (de resposta oberta): L'Anna va mesurar el diàmetre d'un líquen i va obtenir 35 mil·límetres. Quants anys han passat des que va desaparèixer el gel en aquest lloc ? Mostra els teus càlculs.

Competència de tipus 2: Connexions i integració per a la resolució de problemes.

Idea principal: Canvi i creixement i Espai i forma.

Situació: Científica.

Barem de qualificació:

Pregunta 1:

Puntuació 2: 14 mm o 14 (no calen les unitats). Es podrien atorgar dos punts sempre que es donés 14 com a resposta correcta, tant si s'han mostrat com no els passos per a arribar a la solució.

$$. d = 7,0 \times \sqrt{16-12}$$

$$d = 14$$

$$. 14 \text{ mm}$$

Puntuació 1: Solucions amb respostes parcials, com per exemple:

. Substitució correcta de valors a la fórmula però resposta incorrecta.

. Respostes incompletes.

Puntuació 0: Altres respostes incorrectes, per exemple:

. 16 (resposta incorrecta sense haver mostrat els passos per a obtenir la solució).

Pregunta 2:

Puntuació 2: Respostes que donen 37 anys o 37 (no calen les unitats), sense tenir en compte la presència o absència dels passos donats per a obtenir la solució, per exemple:

$$35 = 7 \times \sqrt{t-12}$$

$$5 = \sqrt{t-12}$$

$$25 = t-12$$

$$t = 37$$

Puntuació 1: Respostes que mostrin les variables correctament substituïdes a la fórmula però amb la solució incorrecta, per exemple:

$$. 35 = 7 \times \sqrt{t-12}$$

$$35^2 = 7^2 \times t - 12$$

$$35t = 1752$$

$$t = 50$$

$$. 35 = 7 \times \sqrt{t-12}$$

$$35 = \sqrt{t-12}$$

$$1225 = t - 12$$

$$t = 1237$$

Puntuació 0: Altres respostes incorrectes.

UNITAT 7 : El dormir de les foques

Una foca ha de respirar fins i tot si està dormint dintre de l'aigua. El Martí va vigilar una foca durant una hora. Quan va començar a observar-la, la foca estava a la superfície i va prendre aire. Aleshores es va submergir fins al fons del mar i va començar a dormir. Des del fons va tardar 8 minuts a pujar lentament a la superfície, on va tornar a prendre aire. Tres minuts després estava altre cop al fons del mar. El Martí se'n va adonar que tot aquest procés era molt regular.

Pregunta (d'elecció múltiple): Al cap d'una hora, la foca estava:

- A al fons
- B pujant
- C prenent aire
- D baixant

Competència de tipus 2: Connexions i integració per a resoldre un problema.

Idea principal: Canvi i creixement.

Situació: Personal / Científica.

Barem de qualificació:

Puntuació 1: Si respon l'opció B, "pujant a la superfície".

Puntuació 0: Altres respostes.

2.2.6. Comentaris finals

Després de presentar algunes experiències d'avaluació generalitzada d'aprenentatges matemàtics, es poden fer les consideracions següents:

1. De les quatre experiències presentades, dues (APU i PISA) tenen una extensió temporal molt llarga. A més, el projecte PISA és encara en curs de desenvolupament. Aquest projecte anuncia per a l'any 2003 una actuació avaluativa en què l'atenció se centrarà prioritàriament en les matemàtiques i, per tant, tindrà per a nosaltres un interès especial.

Alguns responsables del projecte APU, que va durar nou anys, constaten en les seves reflexions posteriors que els estudis teòrics sobre avaluació anaren modificant, al llarg del temps que durà l'experiència, els seus criteris sobre quins eren els instruments i mètodes d'avaluació més adequats. El projecte APU hagué d'intentar, per tant, anar ajustant les seves previsions als nous criteris.

Com a contrapunt positiu, cal remarcar que de les quatre experiències esmentades és en el projecte APU on trobem una varietat més gran d'instruments d'avaluació, la qual cosa permeté recollir gran quantitat d'informació, molt rica també des del punt de vista qualitatiu.

2. Creiem que un problema general d'aquest tipus d'actuacions avaluatives és la vaguetat en la definició dels seus objectius. En el cas del projecte APU, a posteriori es reconegué que caldria haver intentat definir-ne millor els objectius.

En el programa PISA, s'ha fet un esforç per definir els seus objectius, però de totes maneres han quedat redactats d'una manera prou difusa.

És comprensible, però, que en experiències de l'abast de les que hem descrit, sigui difícil delimitar-ne els objectius d'una manera molt precisa, ja que donada la grandària de l'esforç de recursos que hi ha al darrere, es deu tendir a generalitzar-ne i ampliar-ne al màxim possible les finalitats.

3. Observant les experiències avaluatives generalitzades, es detecta una certa tendència que porta a centrar cada cop més l'atenció en les competències com a objecte d'avaluació, deixant en un segon terme o com a objectes implícits, els continguts estrictament i explícitament curriculars.

El TIMSS i l'avaluació del Sistema Educatiu del MEC organitzen els continguts objecte d'avaluació a partir de criteris estrictament curriculars. D'aquesta manera, els continguts matemàtics s'ordenen en les categories clàssiques (geometria, càlcul, ...) que són presents en els currículums. En el cas del TIMSS, però, ja s'observa una certa inquietud per variar aquest punt de vista en el fet que s'introdueix un bloc dedicat a la proporcionalitat, que no és present en el FIMS (First International Mathematics Study) ni en el SIMS (Second International Mathematics Study) i que respon més a una concepció d'idees vertebradores transversalment dels coneixements matemàtics, que no pas a una classificació que impliqui una compartimentació d'aquests coneixements en categories isolades.

En el cas de l'APU, cap al final del seu període d'aplicació, s'introdueixen els anomenats "tests temàtics", en els quals els ítems d'avaluació giren entorn d'un tema determinat (l'organització d'un viatge, la meteorologia, ...) de manera que es dona una rellevància preeminent a la funcionalitat dels coneixements dels alumnes i al context en el qual s'apliquen.

El projecte PISA abandona la idea del currículum com a principal criteri ordenador dels coneixements i es centra en la "*literacy*", lligada al concepte de competències dels alumnes que impliquen la capacitat de saber seleccionar, integrar i aplicar els coneixements i habilitats adequats a una situació donada en un context "autèntic". Per

ordenar els coneixements matemàtics, el projecte PISA també ignora les classificacions curriculars tradicionals com a criteri principal i es fixa sobretot, com s'ha dit, en algunes "grans idees" vertebradores del coneixement matemàtic.

4. Com a element molt relacionat amb l'anterior consideració, cal esmentar que cada cop sembla més clar que els instruments d'avaluació que només contenen ítems tancats no donen prou informació sobre el que és realment útil i significatiu com a objecte d'avaluació. L'avaluació de competències dels alumnes no es pot realitzar només a partir de l'aplicació de qüestionaris amb preguntes de resposta tancada, ja que aleshores només es pot tenir informació sobre alguns aspectes molt parcials del que significa activar de manera global una competència. És clar, també, que només a base de proves escrites és molt difícil, per no dir impossible, poder avaluar els processos que realitza un alumne per arribar a un determinat resultat. Aquests processos, que només es poden posar clarament de manifest a través d'una entrevista o amb un contacte continuat amb la manera de treballar d'un alumne, segurament han de quedar exclosos d'experiències generalitzades d'avaluació, que haurien de limitar-se, doncs, a l'avaluació de resultats o de cadenes de resultats.

3. ACOTACIÓ DE LA PART PRÀCTICA DE L'ESTUDI. LA PROPORCIONALITAT

3.1. Consideracions prèvies

La part pràctica de l'estudi consisteix en l'elaboració, validació, aplicació i anàlisi dels resultats de proves escrites d'avaluació que tenen una doble finalitat, d'una banda que puguin ser usades com a proves estàndard, i d'altra banda que se'n pugui fer un ús diagnòstic.

A l'hora de seleccionar quina part de la matemàtica havia de ser objecte de l'actuació avaluativa, s'escollí la proporcionalitat entesa en un sentit ampli. O sigui, considerant que:

Intervé la proporcionalitat o s'ha d'aplicar un raonament proporcional sempre que hi ha una situació en què dues variables, entre les quals hi ha una relació de dependència, prenen valors de manera que els valors d'una d'elles es poden obtenir a partir dels valors corresponents de l'altre multiplicant-los per un mateix nombre (nombre que queda fixat per a cada situació i per la perspectiva des què s'estudia o analitza la situació).

Els valors de les dues variables poden ser simplement nombres o representar valors d'una magnitud. En aquest darrer cas, cal escollir una unitat per a cada magnitud i, un cop escollides aquestes unitats, la relació passarà a ser numèrica.

Triar la proporcionalitat com a objecte d'avaluació de les proves que constitueixen la part pràctica d'aquest estudi respon a diversos motius:

- El raonament proporcional seria comparable a allò que en el projecte PISA s'anomenen les "grans idees" matemàtiques subjacents al currículum de matemàtiques. La proporcionalitat s'adequa també al que Vergnaud (1990) anomena un camp conceptual, com a un dels esquemes en què s'estructuren els coneixements matemàtics. En efecte, en el desenvolupament de la seva teoria cognitiva dels camps conceptuals, Vergnaud els considera com a:
"conjunts amplis de situacions l'anàlisi de les quals requereix diversos tipus de conceptes, procediments i representacions simbòliques connectats entre si"
En aquest context, com diu Vergnaud, "situació" no s'ha d'entendre tant en el sentit de situació didàctica com en el de tasca a realitzar, entenent que tota situació complexa pot ser analitzada com una combinació de tasques de la qual és important conèixer-ne la natura i dificultat pròpies. Precisament un dels exemples que exposa Vergnaud per a il·lustrar la seva teoria dels camps conceptuals és l'anàlisi de les estructures multiplicatives que estarien incloses, al nostre parer, dintre d'un camp conceptual més ampli que seria el del raonament proporcional o, dit d'una altra manera, el camp conceptual corresponent al conjunt de totes aquelles situacions relacionades amb la proporcionalitat.
- La proporcionalitat, i en general el raonament proporcional, constitueix un dels eixos vertebradors de gran part del currículum de les matemàtiques a l'etapa d'educació secundària obligatòria i, com veurem en l'apartat següent, es manifesta en molts dels continguts matemàtics prescrits per a aquesta etapa.
- Finalment, sembla prou clar que el raonament proporcional i la proporcionalitat en general han d'estar fortament relacionats amb les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic que se suposa que ha d'haver adquirit un alumne en acabar el seu ensenyament obligatori.
Si ens fixem concretament en les competències relacionades, dintre de l'àmbit matemàtic, pel Departament d'Ensenyament, per a les proves del curs 2001-2002, per

al final del primer cicle de l'etapa d'ESO, ens adonarem que la proporcionalitat està relacionada, de manera més o menys explícita, pel cap baix amb les següents:

M5. Planificar i seguir estratègies de resolució de problemes i modificar-les, si no es mostren prou eficaces.

M6. Usar i interpretar llenguatge matemàtic com ara xifres, signes i altres representacions gràfiques o dibuixos per descriure fenòmens habituals.

M7. Interpretar la funció que fan els nombres quan apareixen en un context real (expressar quantitat, identificació, temps, mesura, intervals) i usar-los d'acord amb les seves característiques.

M8. Reconèixer i interpretar gràficament relacions senzilles de dependència funcional existents entre conjunts de dades d'ús quotidià, en particular en casos de proporcionalitat directa.

3.2. Manifestacions de la proporcionalitat en el currículum de l'ESO

En el currículum de matemàtiques de l'etapa d'educació secundària obligatòria es treballen moltes qüestions i nocions que tenen com a substrat fonamentador el raonament proporcional. Algunes d'elles tenen el seu origen a l'etapa d'educació primària, però han d'acabar de consolidar-se a l'ESO. Entre elles, podem destacar:

- El concepte de raó o proporció que significa el nombre d'elements d'un conjunt que compleixen determinada propietat en relació (dividit per) al nombre total d'elements del conjunt. Els problemes "clàssics" de determinar el valor d'un terme d'una proporció, coneixent el valor dels tres restants. Com a casos particulars es podrien esmentar els problemes de mescles, aleacions, receptes, etc...
- El concepte de fracció com a expressió d'un nombre racional, i conceptes associats al de fracció, com el d'equivalència de fraccions.
- Qüestions relacionades amb la mesura, com el canvi d'unitats de mesura, el mateix ús d'una determinada unitat de mesura,... En la qüestió de la mesura sempre hi ha subjacent la relació de proporcionalitat entre el valor que pren una magnitud en un cas concret i el valor de la magnitud que s'ha pres com a unitat.
- El problema del repartiment proporcional d'una quantitat, d'acord amb uns paràmetres que estableixen uns determinats coeficients de proporcionalitat. El cas particular dels diagrames de sectors en estadística, on cada sector té una amplitud proporcional al valor de la freqüència del resultat corresponent.
- Els problemes de "percentatges" que, tot i ser un cas particular dels problemes de raons, tenen una rellevància especial per l'ús generalitzat que es fa dels percentatges com a element quantificador a la societat actual.
- El càlcul de probabilitats que es pot entendre com un cas particular d'establiment de raons i també com un repartiment proporcional de la unitat entre els diversos esdeveniments aleatoris simples.
- El teorema de Thales i totes les qüestions relacionades amb la semblança de figures geomètriques, en la qual juga un paper clau la proporcionalitat entre les longituds dels costats corresponents de les figures.
- La interpretació i construcció de representacions (mapes, plànols, esquemes, dibuixos, maquetes,...) a escala. Encara que la representació a escala es podria prendre com un cas particular de la semblança, té unes característiques que la'n diferencien, ja que en aquest cas la relació és entre la "realitat" i una "representació" seva.
- Les raons trigonomètriques en un triangle rectangle, el valor de les quals té consistència i coherència, degut al fet que en tractar-se de triangles rectangles semblants (que tenen el mateix angle agut) es pot garantir la constància del valor de la raó entre les longituds dels costats corresponents dels triangles rectangles.
- La funció de proporcionalitat directa i la funció de proporcionalitat inversa i els seus gràfics, com a modelitzacions matemàtiques (en aquest cas, des de la perspectiva de l'anàlisi funcional) en les quals la qüestió de la proporcionalitat hi té una importància decisiva.

Com es veu, doncs, les manifestacions del raonament proporcional en continguts matemàtics de l'etapa d'educació secundària obligatòria són moltes i molt diverses. En efecte, no estan cenyides a un únic camp dintre dels coneixements matemàtics, sinó que en trobem en qüestions estrictament de càlcul, en aspectes de geometria, de mesura, d'anàlisi funcional, de càlcul de probabilitats, d'estadística, de lectura i interpretació de gràfics i esquemes, etc...

Aquesta catalogació que hem fet de qüestions relacionades amb la proporcionalitat ens confirma, doncs, que el raonament proporcional és un dels nuclis fonamentals a partir del qual es desenvolupa una bona part de les matemàtiques que ha de conèixer un alumne en acabar l'educació obligatòria.

A part del fet que els continguts matemàtics que acabem d'esmentar tenen aplicació en moltes altres àrees, també hi ha continguts propis d'altres àrees que estan fortament relacionats amb la noció de raonament proporcional. Pensem, per exemple, en conceptes com la velocitat, la densitat d'una matèria, la pressió, l'acceleració, ... en ciències de la naturalesa, que no són altra cosa que raons entre dues magnituds i el treball amb les quals exigeix un domini de les tècniques numèriques associades a la proporcionalitat. O pensem, també, en conceptes com la densitat de població i la taxa de natalitat, a ciències socials i a ecologia i, en general, l'estimació de qualsevol característica d'una població a partir de l'estudi realitzat en una mostra.

3.3. Fonaments i construcció de la proporcionalitat

En l'ús del llenguatge en matemàtiques ens trobem amb tres tipus de situacions:

- l'ús de termes propis i específics del llenguatge lògico-matemàtic, com poden ser “divisor”, “segment”, “polígon”, “nombre”, etc...
- l'ús de termes de la llengua natural amb el mateix significat que tenen en aquest domini, com per exemple moltes de les paraules que es fan servir en una explicació.
- l'ús de termes que s'usen en la llengua natural, però que dintre del context matemàtic tenen un significat diferent o un nivell de significació molt més precís, com per exemple les paraules “semblança”, “proporció”, “residu”, “funció”, ... i els seus derivats.

Quan ens situem en l'estudi de la proporcionalitat, ens trobem sovint en aquesta tercera possibilitat. En efecte, en el llenguatge natural trobem referències a la paraula “proporcional” en expressions quotidianes. No són estranyes, per exemple, expressions com:

- “la sanció o el càstig han de ser proporcionats”
- “cal tenir en compte la relació (o proporció, o raó) qualitat / preu”
- “aquest edifici no té les proporcions adequades”
- “és una persona que té una figura ben proporcionada”
- “això que has fet és desproporcionat !”

La referència a la proporcionalitat en aquestes frases, i en molts altres exemples que podríem trobar, no és del tot aliena al significat matemàtic de la proporció, però sí que és cert que s'usa d'una manera molt més difusa del significat precís que en matemàtiques s'atribueix a l'existència d'una relació de proporcionalitat.

En molts d'aquests casos sembla que s'aludeixi a una certa relació implícita que se suposa que hauria d'existir entre dos termes, però que és una relació que no és explicitada enlloc, que no té perquè ser la mateixa en diferents cultures, i que no sempre és quantificable. És clar, doncs, que aquest ús habitual i poc rigorós que es fa dels termes relacionats amb “proporció” pot representar un obstacle per a una millor comprensió del que significa matemàticament una relació de proporcionalitat.

Històricament, sembla que el primer context on es comença a treballar amb la proporció vista des d'una perspectiva matemàtica és en el de la semblança de figures i en les conseqüències del que avui en dia s'anomena el teorema de Thales. De fet, en l'antiguitat les qüestions relacionades amb la proporcionalitat són molt presents en els estudis i les descripcions referents a l'arquitectura. A partir d'aquí, les reflexions sobre proporcionalitat s'estendrien a les qüestions de mesura i s'incorporarien a un model amb predominància d'allò quantitatiu, referit a nombres, per sobre de les consideracions purament geomètriques. La modelització de qualsevol situació de proporcionalitat mitjançant el llenguatge funcional seria l'última fase d'aquest desenvolupament, en la qual s'aconseguiria unificar la gran diversitat de perspectives en què és present el raonament proporcional.

Si volem relacionar la construcció del raonament proporcional amb les diferents etapes que estableix la psicologia genètica en l'evolució de les capacitats cognitives d'un individu, ens trobem que:

- En l'estadi anomenat preoperatori (de 2 a 7 anys), el coneixement del nen està íntimament i gairebé exclusivament relacionat amb allò que percep a través dels sentits. El nen manipula i observa, i el que cal és orientar la seva activitat de manera que se'l porti a realitzar actuacions de comparació, classificació i ordenació. Aquests tres tipus d'activitats seran fonamentals per tal de poder desenvolupar de manera correcta, amb posterioritat, el raonament proporcional.
- En l'estadi anomenat d'operacions concretes (de 7 a 12 anys), el nen és capaç de realitzar operacions enteses com a accions interioritzades que han estat possibles després de l'acció exterior amb objectes i la reflexió sobre ella. Es considera

característic d'aquest estadi un tipus de pensament lligat a la realitat sensorial, que no és capaç d'operar mentalment amb els conceptes associats als fenòmens de la realitat sensorial. En relació a la proporcionalitat, s'ha de destacar que és en aquest estadi quan apareix la possibilitat de realitzar mesures i, per tant, d'introduir unes primeres nocions de mesura. Associada a aquesta possibilitat, es pot produir una primera aproximació a la noció de fracció, com a comparació entre dos nombres (per expressar, per exemple, canvis d'unitat) i també com a operador.

- En l'estadi anomenat d'operacions formals (a partir de 11 o 12 anys), el pensament se separa del nivell d'allò concret i assoleix el camp d'allò que és possible, a través de l'adquisició paulatina del domini de noves operacions de la lògica de proposicions. Les operacions formals pressuposen el domini de les operacions concretes que queden integrades en una única estructura superior. De fet, s'ha observat que entre els 12 i els 14 anys encara no s'està plenament en l'estadi de les operacions formals, sinó que s'està fent la transició de les concretes a les formals. Aquesta transició, a més, pot seguir ritmes molt diversos en els diferents individus, essent l'etapa educativa on més remarcable i transcendent pot ser la diversitat de ritmes evolutius.

Piaget i Inhelder, que són els qui estableixen aquests estadis, s'adonen però que el raonament formal no consisteix només en una acumulació de raonaments verbals (la qual cosa suposaria exclusivament un desenvolupament de la lògica de proposicions), sinó que implica la formació i activació d'una sèrie d'esquemes operatoris. Aquests esquemes operatoris (entre els quals, a més de la proporcionalitat, es podrien esmentar les probabilitats, els sistemes de referència, la combinatòria, ...) estan interrelacionats i apareixen i es desenvolupen de forma sincrònica.

Piaget i també Freudenthal (1980) afirmen que cal buscar la gènesi de la idea de proporció en la percepció de les figures. El problema rau en saber com a partir de la percepció de les proporcions es desenvolupa el que es podria anomenar intel·ligència (comprensió i operativitat) de les proporcions.

Donat que una proporció és una relació entre relacions, el nen no pot construir completament aquest concepte mentre només es trobi al nivell de les operacions concretes.

La teoria dels estadis ha estat qüestionada amb posterioritat, per estudiosos com Lunzer, Jawon, Karplus i Adi. Driver (1979) afirma que, des del punt de vista didàctic, cal replantejar la qüestió posant més l'atenció en el contingut dels problemes que no pas en l'estadi formal en què es troba l'alumne.

Fiol i Fortuny (1990) afirmen que, en les últimes tendències didàctiques, "s'ha passat de considerar el raonament proporcional com una manifestació d'una estructura cognitiva o habilitat global, a considerar-lo com un treball més diferenciatiu centrat en l'estudi dels procediments usats de forma espontània pels alumnes en la resolució, amb èxit o sense èxit, dels problemes de proporcionalitat, la qual cosa comporta estudiar diverses estratègies, unes correctes i altres errònies, i les variables que intervenen en la seva resolució".

Si s'analitzen les diverses formes que pot prendre la modelització matemàtica de la proporcionalitat, es veu que la qüestió es pot abordar des de diverses perspectives. D'entrada, s'observa que en una situació de proporcionalitat existeix una correspondència entre dues variables que poden representar els valors d'una magnitud, o bé simplement nombres. Quan hi intervenen magnituds, cal escollir una unitat per a cada una d'elles. Un cop escollides les unitats, la relació entre les dues magnituds es tradueix en una relació numèrica entre els nombres que mesuren les magnituds. En aquest cas, doncs, la relació entre nombres és tributària de la relació entre magnituds i de l'elecció d'unitats que s'ha dut a terme.

Des del punt de vista numèric, una relació de proporcionalitat es pot presentar o entendre:

- Sota l'aspecte de funció . De la forma $f(x) = \alpha \cdot x$, on α és una constant numèrica $\alpha \in R$.
- Sota l'aspecte d'isomorfisme. Es tracta d'una correspondència, on si en general anomenem a' el nombre corresponent a a , per a qualsevol $a, b \in R$ es verifica:
 - . Si $a \leftrightarrow a'$ i $b \leftrightarrow b'$, aleshores $c = a + b \leftrightarrow c' = a' + b'$
 - . Si $a \leftrightarrow a'$ i $k \in R$, aleshores $k \cdot a \leftrightarrow k \cdot a'$
 - . Si $a \leq b$ i $\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a} = \alpha > 0$, aleshores $a' \leq b'$

Des del punt de vista de les magnituds, cal considerar que se suposa que parlar d'una magnitud mesurable implica estar en presència d'una variable de la qual podem comparar-ne (ordenar-ne) els valors, sumar-los i descompondre'ls. Si es disposa de dues magnituds mesurables, V i W , variables i amb l'existència d'una correspondència de proporcionalitat entre els seus valors, aquesta correspondència es pot presentar:

- Sota l'aspecte de funció . De manera que si v_i i w_i són els valors corresponents de les magnituds V i W , $f(v_i) = \alpha \cdot v_i = w_i$, essent α una constant numèrica.
- Sota l'aspecte d'isomorfisme. És a dir:
 - . Si $v_1 \leftrightarrow w_1$ i $v_2 \leftrightarrow w_2$, aleshores $v_1 + v_2 \leftrightarrow w_1 + w_2$
 - . Si $v_1 \leftrightarrow w_1$, aleshores $\forall k \in R$ es verifica $k \cdot v_1 \leftrightarrow k \cdot w_1$

En el cas de les magnituds en correspondència proporcional, també s'hi pot treballar:

- Mitjançant la reducció a la unitat. Calculant $\frac{w_1}{v_1}$ es calcula el valor de la magnitud W que correspon a una unitat de la magnitud V .
- En alguns casos es pot treballar amb nombres sense dimensió, quan les unitats que s'han pres en les dues magnituds són la mateixa. És el cas de les escales i els percentatges.

Observem que en el cas de la perspectiva de les magnituds, es poden afrontar situacions plantejant dos tipus diferents de raons. Plantejem-nos, per exemple, el cas d'un mòbil amb velocitat constant, o sigui seguint un moviment uniforme. En aquest cas, com sabem, hi ha una correspondència de proporcionalitat entre el temps transcorregut i l'espai recorregut. Si plantejem la situació mitjançant raons homogènies (numerador i denominador de la mateixa magnitud) :

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{t_1}{t_2}$$

estem plantejant el problema com una mesura d'una de les quantitats de cada magnitud, prenent l'altra quantitat de cada magnitud com a unitat.

En canvi, si es planteja la situació mitjançant raons heterogènies:

$$\frac{e_1}{t_1} = \frac{e_2}{t_2}$$

Estem introduint mesures d'una nova magnitud, en aquest cas la velocitat.

Sembla que dintre del procés d'adquisició i domini d'estratègies de resolució de situacions de proporcionalitat, el tractament mitjançant raons homogènies seria un esglaió previ al tractament mitjançant raons heterogènies.

En general, si es planteja el problema de trobar dos valors desconeguts, x i y , de dues magnituds entre les quals hi ha una relació de proporcionalitat, i de les quals se'n coneixen diversos valors corresponents, és a dir si es té:

Primera magnitud: $a \quad b \quad x \quad d$
 Segona magnitud: $a' \quad y \quad c' \quad d'$

(essent a, b, d, a', c' i d' nombres reals coneguts)

El problema de calcular x i y es pot abordar des de perspectives diferents:

- A partir del tractament com a funció. Es tracta de calcular α tal que $a' = \alpha \cdot a$ i, a partir d'aquí, calcular $y = \alpha \cdot b$ i $\alpha \cdot x = c'$, o sigui $x = \frac{c'}{\alpha}$. Des d'aquesta perspectiva, no tenen sentit, per exemple, expressions com a' és α vegades a , ja que a' i a són valors corresponents de magnituds diferents.
- A partir del tractament com a isomorfisme. Des d'aquest punt de vista, es calcularia k tal que $b = k \cdot a$ i, per tant, $y = k \cdot a'$. Després s'hauria de calcular r tal que $c' = r \cdot a'$, i s'obtindria $x = r \cdot a$. Des d'aquesta perspectiva, sí que té sentit afirmar que b és k vegades a .

També es pot emprar la tècnica del producte en creu ("regla de tres") que compaginaria les dues perspectives, funció i isomorfisme.

És clar que la perspectiva de funció és la més desenvolupada com a model teòric, ja que el càlcul d'una única constant de proporcionalitat permet el càlcul de qualsevol valor desconegut.

De totes maneres, inicialment sembla que hi ha una tendència a resoldre aquest tipus de situacions des de la perspectiva de l'isomorfisme. Segurament aquesta tendència ve motivada pel fet que la visió elemental del producte com a suma iterada té traducció en el model isomorfisme i no en el model funció.

Com s'afirma a COPREM (1986): "un dels objectius fonamentals de l'ensenyament és conduir els alumnes enfrontats a aquests problemes a recórrer a un o altre dels procediments o a una combinació entre ells d'acord amb les necessitats o l'economia de la situació".

En l'estadi més avançat, quan l'aprenentatge de la proporcionalitat s'ha de considerar absolutament consolidat, el model de la funció de proporcionalitat, $f(x) = \alpha \cdot x$, és el més ric, ja que a més de ser el més econòmic quant a càlculs i passos per a resoldre situacions variades, és l'únic que unifica la gran diversitat de perspectives i manifestacions en què són presents qüestions relacionades amb la proporcionalitat.

Des del punt de vista didàctic, es considera que aproximadament a partir dels 11 anys comença el desenvolupament del coneixement de la proporcionalitat, a partir de la culminació de l'estadi de les operacions concretes. El desenvolupament de la proporcionalitat assoleix el seu equilibri final, generalment, als 14 o 15 anys, encara que en alguns casos aquest equilibri s'assoleix a una edat més tardana.

Abans dels 11 anys, com s'ha dit, no es pot construir el coneixement proporcional pròpiament dit, ja que en tractar-se d'una relació de relacions exigeix un nivell d'operativitat formal. Sí que es pot, però, en aquestes edats començar a assentar els fonaments sobre els quals es construirà el raonament proporcional. Gradualment, es pot:

- Establir compensacions aditives del tipus: $a + b = c + d$.
- Establir compensacions per diferències: $a - c = d - b$.
- Formular correlacions qualitatives, del tipus: "Lisboa és a Portugal com París és a França", etc ...

- Comparar qualitativament la relació entre variables, per exemple, amb relacions del tipus: “a més ... més ...”, o “a menys ... menys ...”, etc ...
- Concebre fraccions i, en algun cas, comprendre la igualtat de dues fraccions.
- Iniciar les compensacions multiplicatives del tipus : $a \cdot b = c \cdot d$, en exemples concrets com la conservació d'àrees de rectangles, la llei de l'alçaprem, etc ...

Segons Inhelder i Piaget (1955), la comprensió de la proporció des del punt de vista psicològic, s'inicia a partir del descobriment dels processos de compensació i en cap cas el procés segueix el camí invers.

La precipitació a estendre la noció de proporcionalitat a casos nous (com, per exemple, la introducció de nombres no naturals o la introducció d'algorismes de càlcul) sembla que afavoreix l'aparició posterior de freqüents errors de càlcul. El més conegut d'aquests errors és l'anomenat error additiu (identificat per Piaget i treballat per Hart Karplus) que,

bàsicament, consisteix en suposar que la fracció $\frac{a+c}{b+c}$ és equivalent a la fracció $\frac{a}{b}$, ja

que tant el numerador com el denominador en augmentat en la mateixa quantitat.

Alguns estudis posteriors han qüestionat alguns aspectes dels treballs de Piaget amb la proporcionalitat. Un dels punts en discussió és la introducció simultània de la proporcionalitat directa i la proporcionalitat inversa. Lovell (1961) situa en els 14 anys l'edat a partir de la qual cal iniciar els treballs amb la proporcionalitat inversa. De la mateixa manera, la possibilitat de comprensió de la proporcionalitat mitjançant el model funcional se situa actualment a una edat més tardana que no pas la que establia Piaget.

Inhelder i Piaget (1955) van intentar fer una catalogació dels diferents tipus de respostes o estratègies dels alumnes davant una situació de proporcionalitat i distingien entre aquells alumnes que:

- sembla que no entenguin el problema que se'ls planteja.
- només usen part de la informació necessària.
- relacionen les dades només des d'un punt de vista qualitatiu.
- utilitzen estratègies errònies, com per exemple l'estratègia additiva.
- utilitzen l'estructura multiplicativa a partir de la comparació de raons i, per tant, resolen correctament la situació.

Altres estudis posteriors s'han centrat més en les variables que influeixen en la resolució d'un problema i no tant en la diferent tipologia d'estratègies. Les variables que poden influir en la resolució d'un problema es classifiquen de la manera següent:

- variables centrades en els alumnes, com l'edat, condicions socio-econòmiques, sexe, ...
- variables centrades en el problema, entre els quals es poden distingir:
 - variables de context: familiaritat del context per a l'alumne, ...
 - variables d'estructura: tipus de nombres, presència o absència d'unitat, magnitud contínua o discreta, ...
- la relació entre ensenyament i aprenentatge, que segurament és la variable més complexa i més difícil d'estudiar.

S'ha comprovat que a partir de la comprensió de l'estructura més elemental de la proporcionalitat, les dificultats en l'ampliació d'aquest coneixement provenen de manera immediata de:

- el pas de contextos familiars a contextos menys familiars i amb una major dificultat conceptual.
- l'extensió del domini numèric, amb les dificultats que provoca la introducció de nombres grans, nombres menors que 1, nombres fraccionaris o nombres decimals.

Finalment, destacarem que és important tenir en compte des del punt de vista didàctic que un problema que contingui simultàniament diverses proporcionalitats pot comportar

l'aparició de dues situacions d'importància fonamental, però que presenten dificultats ben diferenciades. Cal distingir entre:

1. Encadenament de dues proporcionalitats, que respon al model teòric de la composició de funcions:

$$1a \text{ Magnitud} \leftrightarrow 2a \text{ Magnitud} \leftrightarrow 3a \text{ Magnitud}$$

2. Proporcionalitat múltiple:

$$(1a \text{ Magnitud} \times 2a \text{ Magnitud}) \leftrightarrow 3a \text{ Magnitud}$$

En aquesta situació, fixant una de les dues primeres variables, s'obté una proporcionalitat simple, però fixant la tercera variable s'obté una proporcionalitat inversa.

Com a conclusió, podríem afirmar que pràcticament al llarg de tota l'escolaritat obligatòria es pot i cal organitzar activitats i situacions d'aprenentatge relacionades amb la proporcionalitat, i que el raonament proporcional és un element constituent de moltes de les competències bàsiques de l'àmbit matemàtic que es poden establir per al final del període de l'educació obligatòria.

També cal tenir molt present que es detecten grans diferències entre alumnes d'una mateixa edat a l'hora d'afrontar situacions anàlogues. Els diferents ritmes d'evolució i la influència dels coneixements previs tenen una gran transcendència en el tipus de resposta que podem esperar dels diferents alumnes a una mateixa situació.

Així mateix, s'observa que un alumne té respostes de qualitats molt diferents davant de situacions diverses que estan relacionades amb la proporcionalitat, la qual cosa és deguda al fet que, com s'ha vist, el raonament proporcional apareix en contextos molt diferents per afrontar els quals cal activar capacitats de característiques molt diverses. Pensem, per exemple, que dues situacions que aparentment no tenen res en comú, com pot ser efectuar un repartiment proporcional d'uns beneficis entre un grup de socis en relació al capital inicial aportat per cada un d'ells, i interpretar un mapa a escala, requereixen el domini del raonament proporcional per a poder-les solucionar. El raonament proporcional és, doncs, a l'essència de procediments molt diversos i no és d'estranyar que en algunes fases de la construcció d'aquest tipus de raonament, s'obtinguin respostes molt diferents, quant a correcció, per part d'un mateix alumne a diverses situacions de proporcionalitat.

4. PROVES PER A L'AVALUACIÓ ESTANDARITZADA I DIAGNÒSTICA D'ALGUNS CONEIXEMENTS I COMPETÈNCIES RELACIONATS AMB LA PROPORCIONALITAT, A L'ESO

4.1. Delimitació i finalitats de l'actuació avaluativa

La finalitat de l'actuació avaluativa que s'ha realitzat en la part pràctica d'aquest treball és doble:

- Donar uns *valors estàndards* per a les respostes dels alumnes de 2n d'ESO i 4t d'ESO, a algunes qüestions relacionades amb la proporcionalitat que es plantegen a través de proves escrites.
- Fer una *diagnosi individual* de l'estat del procés de construcció d'alguns coneixements matemàtics relacionats amb la proporcionalitat, a través dels resultats que s'obtenen en un conjunt de proves escrites.

Per poder donar uns valors estàndards a les respostes d'alumnes de 2n d'ESO i de 4t d'ESO, a determinades qüestions calia que les proves continguessin ítems per als quals fos senzill donar pautes de qualificació, i que aquestes proves s'apliquessin a mostres prou àmplies i diversificades d'alumnes de cada un dels cursos esmentats.

Així, les proves per a les quals es volien obtenir els valors estàndards s'aplicaren a alumnes de vuit instituts diferents, escollits amb criteris de diversitat de característiques de població: 4 de Barcelona, 1 del cinturó de Barcelona (Esplugues del Llobregat), 2 de ciutats allunyades de Barcelona (Girona i Vic) i 1 de població rural (Bagà).

Recordem que, pel que fa a l'avaluació diagnòstica, Giménez (1997) afirma que ha de donar resposta a les qüestions següents:

- Quins coneixements bàsics posseeixen els alumnes?
- Quins elements són, en principi, difícils per a ells?
- Quina posició pren l'alumne davant de nous elements conceptuals?

Així mateix, Newman (1989), citat per Bazzini (1993), afirma que una avaluació diagnòstica “... *enlloc de mesurar com ho fan de bé o malament (els alumnes) ... ha de permetre observar quanta ajuda necessiten i de quina mena*”.

Finalment, Johansson (1993) afirma que “*l'avaluació diagnòstica no té per finalitat descriure un nivell de coneixement o comparar resultats i objectius, sinó comparar els resultats amb diferents tipus d'estructura de coneixement que l'estudiant ha de desenvolupar per a assolir els objectius que s'han establert*”.

Per dur a terme les dues finalitats esmentades a l'inici d'aquest paràgraf, s'han elaborat tres proves escrites:

- Prova 1. Sobre fonaments de la proporcionalitat. Comuna per als alumnes de 2n i de 4t d'ESO.
- Prova 2. Plantejant situacions d'aplicació immediata de coneixements relacionats amb la proporcionalitat. Comuna per als alumnes de 2n i 4t d'ESO.
- Prova 3. Plantejant situacions d'aplicació no immediata de coneixements relacionats amb la proporcionalitat. Per aplicació no immediata s'entén que hi intervé una doble proporcionalitat o hi ha un context en què cal interpretar i fer entrar en joc alguna estratègia més que el simple raonament proporcional. D'aquesta prova se n'ha realitzat una versió (3.a) per als alumnes de 2n d'ESO i una altra versió (3.b) per als alumnes de

4t d'ESO. Dels set blocs que tenen tant la prova 3.a com la 3.b, els tres primers són comuns a ambdues.

Les proves 1 i 2 s'aplicaren les últimes setmanes del segon trimestre del curs 2001/2002, a 189 alumnes de 2n d'ESO i 184 alumnes de 4t d'ESO, d'instituts seleccionats amb el criteri descrit anteriorment i, per tant, s'obtingueren valors estandaritzats per a les respostes dels seus ítems.

La prova 3 s'aplicà a mitjans del tercer trimestre del curs 2001/2002, a alumnes de dos centres que ja havien fet les proves 1 i 2. La intenció era poder fer l'avaluació diagnòstica prevista, a partir de l'observació dels resultats d'aquests alumnes en les proves 1, 2 i 3. El criteri per seleccionar els dos centres on aplicar la prova 3, fou el següent: un cop ordenats els vuit centres de major a menor qualificació global de les proves 1 i 2, entre els quatre centres que ocupaven la part central (o sigui, les posicions 3, 4, 5 i 6) se seleccionaren els dos centres en què la desviació estàndard de les qualificacions tenia un valor més alt. Amb això, es pretenia que la mitjana dels resultats dels alumnes fos propera a la mitjana general i que hi hagués prou diversitat de casos per constatar que la diagnosi era possible i efectiva. Aquest procediment de selecció, comportà que la prova 3.a s'apliqués a 34 alumnes de 2n d'ESO de dos instituts i la prova 3.b a 39 alumnes de 4t d'ESO d'aquests mateixos instituts.

4.2. Elaboració i validació de les proves

A l'hora d'elaborar les proves, calgué seleccionar quins dels continguts presents al currículum de matemàtiques de l'ESO i relacionats amb la proporcionalitat, havien de formar-ne part.

Com s'ha vist anteriorment, són molts els continguts del currículum de matemàtiques de l'ESO en els quals hi és present de manera més o menys explícita el raonament proporcional. S'optà per considerar tots els continguts excepte aquells que formen clarament part de dues qüestions que també es poden considerar com a transversals i amb entitat pròpia suficient i diferenciada: la mesura i l'anàlisi funcional. A les proves, doncs, només es trobaran referències molt puntuals i tangencials a qüestions relacionades amb la mesura, tot i que és clara la relació que té amb el raonament proporcional, i a la proporcionalitat vista des de la perspectiva d'una dependència formalitzada entre variables.

Finalment, per a cada una de les proves es consideraren els continguts o objectes específics d'avaluació que s'enumeren a continuació.

Prova 1. Fonaments de la proporcionalitat.

- 1.1. "Proporcionalitat qualitativa": relació qualitativa entre relacions qualitatives.
- 1.2. Distinció entre casos de proporcionalitat i casos de no proporcionalitat.
- 1.3. Detecció visual de formes semblants (sense efectuar càlculs).
- 1.4. Estratègia multiplicadora.
- 1.5. Reducció a la unitat.
- 1.6. Equivalència de fraccions.
- 1.7. Càlcul d'un element desconegut en una proporció.
- 1.8. Comparació de fraccions.

Observi's que com a fonaments de la proporcionalitat s'hi inclouen alguns coneixements que no entren pròpiament dintre del que es podria considerar que forma part del raonament proporcional, però en canvi són requisits previs per al treball posterior amb la proporcionalitat. Els continguts que formen part d'aquesta prova han estat seleccionats considerant que hauria de tractar-se de coneixements ja assolits en acabar l'etapa d'educació primària.

Prova 2. Situacions d'aplicació immediata de la proporcionalitat.

- 2.1. Percentatges.
- 2.2. Interpretació proporcional d'esquemes gràfics.
- 2.3. Semblança de figures, amb criteris quantitius.
- 2.4. Proporcionalitat com a correspondència, en contextos monetaris (de preus).
- 2.5. Proporcionalitat com a correspondència, en contextos no monetaris.
- 2.6. Proporcionalitat com a raó (homogènia o heterogènia).
- 2.7. Germen de la formalització del concepte de funció de proporcionalitat.

De fet, una mateixa situació de proporcionalitat pot ser interpretada, a vegades, com a correspondència o com a raó. En els apartats 2.4 i 2.5 s'hi presenten situacions en les quals el context sembla que tendeix a fer interpretar-les com a correspondències. En canvi, en el cas de l'apartat 2.6, la visió predominant en les situacions que s'hi plantegen és la de raó. S'han distingit les situacions en què el context tracta de preus, ja que són un tipus de situacions prou diferenciades i amb un nivell de quotidianitat diferent al d'altres situacions.

Prova 3.a. Situacions d'aplicació no immediata de proporcionalitat (per a 2n d'ESO).

- 3.a.1. Proporcionalitat doble encadenada.
- 3.a.2. Canvi doble de divises.
- 3.a.3. Càlcul d'un distància real, a partir d'un mapa a escala.
- 3.a.4. Estimació d'una proporció de població, a partir d'una proporció de mostra. Percentatges.
- 3.a.5. Recepta de preparat, a partir de components. Percentatges.
- 3.a.6. Càlcul de venda aventatjosa, a partir del preu unitari (proporcionalitat doble)
- 3.a.7. Comparació de probabilitats, a partir de comparació de fraccions.

Prova 3.b. Situacions d'aplicació no immediata de proporcionalitat (per a 4t d'ESO).

- 3.b.1. Proporcionalitat doble encadenada.
- 3.b.2. Canvi doble de divises.
- 3.b.3. Càlcul d'un distància real, a partir d'un mapa a escala.
- 3.b.4. Construcció associada al teorema de Thales. Verbalització.
- 3.b.5. Problema de repartiment proporcional. Percentatges.
- 3.b.6. Proporcionalitat doble múltiple. Proporcionalitat inversa senzilla.
- 3.b.7. Proporcionalitat associada a probabilitat.

Per tal de garantir la cohesió i la correlació entre les tres proves, els continguts se seleccionaren de manera que tots els continguts de la prova 2 estiguessin relacionats amb continguts de la prova 1, i vice versa. Igualment, els continguts de les proves 3.a i 3.b estan relacionats amb continguts de la prova 2. D'aquesta manera, existeix una mena de tramut entre els continguts de les tres proves, que és el que pot possibilitar amb posterioritat el seu ús diagnòstic, ja que permet resseguir, a través de les proves 2 i 1 d'on provenen les mancances que s'observin en la resolució de la prova 3 (a o b). En els quadres següents, s'indica quins són els ítems que estan relacionats en les diferents proves.

Taula de relació entre els continguts de la prova 1 i els de la prova 2

	1.1 Propor. Qualitativa	1.2. Distinc. Prop-No pro	1.3.Detecció form. semb.	1.4. Estrat. Multiplic.	1.5. Reducc. Unitat	1.6. Equiv. fraccions	1.7. Càlcul el. descon.	1.8. Comp. fraccions
2.1. Percentatges	x	x			x	x	x	
2.2. Interp. Esquema	x	x	x	x	x	o	o	
2.3. Semblança	x	x	x			x		
2.4. Corresp. (diners)	x	x		x	x	o	o	
2.5. Corresp. (no diners)	x	x		x	x	o	o	
2.6. Raons (homog i no)	x	x			x			x
2.7. Germen de funció	x	x		x	x			

Com es veu, els blocs 1.1 i 1.2 de la prova 1 són tan genèrics que es consideren relacionats amb tots els continguts de la prova 2. Quan en una fila hi ha dos tipus de símbols (x i o) es vol indicar que les situacions relacionades amb el contingut d'aquella fila es poden resoldre a través de dos tipus d'estratègia: o mitjançant reducció a la unitat i estratègia multiplicativa o a través de plantejar una equivalència de fraccions i calcular-ne l'element desconegut.

Taula de relació entre els continguts de la prova 2 i els de la prova 3.a

	2.0. Verb. i Estratègia	2.1. Percentatges	2.2. Interp. esquema	2.3. Semblança	2.4. Corresp. (diners)	2.5. Corresp. (no diners)	2.6. Raons (hom. i no)	2.7. Germen de funció
3.a.1. Prop. doble encaden.	x(e)					x		x
3.a.2. Canvi de moneda					x		x	x
3.a.3. Escala de mapa			x	x		x		
3.a.4. Estimació. Percentatges		x					x	
3.a.5. Recepta. Percentatges		x					x	
3.a.6. Càlcul a partir preu unitari	x(e)				x			x
3.a.7. Comparac. de probabilitats							x	

Taula de relació entre els continguts de la prova 2 i els de la prova 3.b

	2.0. Verb. i Estratègia	2.1. Percentatges	2.2. Interp. esquema	2.3. Semblança	2.4. Corresp. (diners)	2.5. Corresp. (no diners)	2.6. Raons (hom. i no)	2.7. Germen de funció
3.b.1. Prop. doble encaden.	x(e)					x		x
3.b.2. Canvi de moneda					x		x	x
3.b.3. Escala de mapa			x	x		x		
3.b.4. Teorema de Thales	x(v)			x			x	
3.b.5. Rep. prop. Percentatges	x(e)	x				x		
3.b.6. Prop. dob. mult. i inversa						x		x
3.b.7. Proporc. assoc. a probab.							x	

Entre les columnes corresponents als continguts de la prova 2, s'ha afegit una columna que no consta com a bloc explícit de continguts d'aquesta prova. S'ha designat per "2.0 Verbalització i estratègia", i s'ha introduït amb l'única finalitat de poder destacar aquells blocs de les proves 3.a i 3.b en els quals té una importància rellevant l'estratègia que s'empra per resoldre la situació (s'ha marcat al quadre amb x(e)), o bé s'exigeix algun procés de verbalització (s'ha marcat al quadre amb x(v)).

Les proves, tal com es passaren als alumnes, estan recollides a l'annex d'aquest estudi, però en la presentació de resultats que es farà en els apartats següents es reproduirà cada un dels ítems. Cal tenir en compte que cada un dels continguts enunciats pot tenir un o més d'un ítem a la prova. Per exemple, en la prova 2, el contingut "2.3. Semblança de figures, amb criteris qualitatius" només té un ítem, en canvi el contingut "2.4. Proporcionalitat com a correspondència, en contextos de preus" té tres ítems que hi fan referència. Aquestes particularitats es poden veure consultant directament les proves, o s'aniran veient, com s'ha dit, a mida que es vagin presentant els resultats obtinguts.

Un cop elaborades les proves, per procedir a la seva validació se seguí el procés que es descriu a continuació.

Procés de validació de la prova 1:

- Qüestionari obert a tres experts (professors de matemàtiques) per tal que indiquessin què creien que s'avaluava amb cada un dels ítems proposats (s'adjunta el model de qüestionari a l'annex).

- Entrevista a sis alumnes de sisè curs de l'etapa d'educació primària de tres centres diferents (dos alumnes de cada centre), aplicant-los de manera oral la proposta de prova, per tal de constatar si realment el que es proposava com a fonaments de proporcionalitat tenia autèntic caràcter de fonament previ.
- Aplicació de la proposta de prova a dos grups de tres alumnes cada un, de 1r d'ESO i de dos centres diferents, amb comentari i debat comú posterior a la realització de la prova.

Procés de validació de la prova 2:

- Qüestionari obert a tres experts (professors de matemàtiques) per tal que indiquessin què creien que s'avaluava amb cada un dels ítems proposats (s'adjunta el model de qüestionari a l'annex).
- Aplicació de la proposta de prova a dos grups de tres alumnes cada un, de 2n d'ESO i de dos centres diferents, amb comentari i debat comú posterior a la realització de la prova.

Procés de validació de les proves 3.a i 3.b:

- Qüestionari obert a tres experts (professors de matemàtiques) per tal que indiquessin què creien que s'avaluava amb cada un dels ítems proposats (s'adjunta el model de qüestionari a l'annex).
- Aplicació de la proposta de prova a dos grups de tres alumnes cada un, de 2n d'ESO i de dos centres diferents per a la prova 3.a i de 4t d'ESO i de dos centres diferents per a la prova 3.b, amb comentari i debat comú posterior a la realització de la prova.

Cal dir que en els quatre casos, s'hagueren de canviar alguns aspectes de les proves, ja fos per canviar algunes paraules o redactats que en dificultaven la comprensió, així com per afegir algun ítem que recollís informació sobre algun aspecte que els experts observaren que quedava oblidat en la proposta feta.

4.3. Resultats de les proves estàndard

4.3.1. Consideracions generals

Les proves que es passaren a mostres prou àmplies i representatives, com per a obtenir-ne valors estàndards, foren les proves 1 i 2. En els annexos, juntament amb les proves, hi ha els criteris de puntuació. Per a cada prova es feren dos tipus de puntuacions: una ítem a ítem i una altra que, a partir dels ítems que formaven part d'un dels blocs de continguts, especificava com puntuar cada un d'aquests blocs de continguts contemplats a cada prova.

A continuació, per a cada una de les proves 1 i 2, es presentaran: els ítems, els criteris de puntuació de cada un d'ells, els valors estàndard de les mitjanes obtinguts a 2n i 4t d'ESO, i comentaris.

Després es presentaran els criteris de puntuació per a obtenir la puntuació corresponent a cada bloc, les mitjanes i desviacions obtingudes en cada bloc, tant a 2n com a 4t d'ESO, i comentaris.

En el cas dels resultats obtinguts ítem a ítem no es dona el valor de la desviació estàndard ja que en ser, en la majoria de casos, la puntuació possible de cada ítem 0 o 1, la dispersió no aporta cap informació significativa nova.

4.3.2. Resultats de la prova sobre fonaments de proporcionalitat

PROVA 1. Fonaments de proporcionalitat (ítem a ítem)

Bloc 1.1. “Proporcionalitat” qualitativa: relació qualitativa entre relacions qualitatives.

1.1. Cada frase té un espai deixat en blanc, que correspon a una paraula. Omple aquests espais amb les paraules que et semblin més adequades.

ítem 1.1.a. Lisboa és a Portugal com París és a

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,937	0,967

ítem 1.1.b. El color vermell és a les maduixes com el color és a les llimones

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,964	0,984

ítem 1.1.c. Nedar és als com volar és als ocells

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,869	0,935

ítem 1.1.d. és als avions com el port és als vaixells

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,931	0,951

Comentari

Aquest bloc és el que ha obtingut millors resultats. De fet, el que es pretenia avaluar és si els alumnes eren capaços de completar una relació de quatre termes, relacionats dos a dos, trobant-ne un de desconegut i coneixent els tres restants.

En cada un dels ítems el terme desconegut ocupava una posició diferent (quarta, tercera, segona i primera, per aquest ordre) i el tipus de relació era força variat: “capitalitat d’un estat”, “característica de color”, “mode de desplaçament” i “lloc d’aturada o estacionament”. Es procurà que els coneixements necessaris per contestar cada ítem, que no fossin estrictament els de saber establir la relació corresponent, fossin sense cap mena de dubte a l’abast de tothom. Sembla que en el cas de la geografia això no s’aconseguí del tot. També es tingueren algunes sorpreses en respostes imprevistes, detectades a temps, i que s’hagueren de considerar correctes. A l’ítem 1.1.b la resposta correcta esperada era “groc”, però s’hagué de considerar també correcta la resposta “verd” que donaven alumnes nouvinguts, acabats d’arribar de països on el color característic de les llimones (o “limes”) és verd.

En els quatre ítems el percentatge d’encerts (observi’s que en ser la puntuació zero o ú, la mitjana correspon al tant per ú d’encerts i només cal multiplicar per cent per obtenir el percentatge), tant a 2n com a 4t d’ESO, és superior al 90%, excepte en l’ítem 1.1.c, a 2n d’ESO.

En tots els casos la mitjana és superior a 4t d’ESO que a 2n d’ESO.

Bloc 1.2. Distinció entre casos de proporcionalitat i casos de no proporcionalitat.

1.2. De cada una de les quatre frases següents, digues si és certa o falsa (marca amb una creu l'opció que triïs):

ítem 1.2.a. Jo ara tinc 12 anys i el meu germà en té 8. Quan jo tingui el doble d'edat de la que tinc ara, el meu germà també en tindrà el doble de la que té actualment.

Cert ☐

Fals ☐

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,397	0,576

ítem 1.2.b. Hem comprovat que si som 12 persones a sopar necessitem 10 pizzes. Per tant, si fóssim la meitat de persones, necessitaríem la meitat de pizzes.

Cert ☐

Fals ☐

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,820	0,859

ítem 1.2.c. Si omplim el dipòsit de benzina del nostre cotxe, hi hem de posar 52 litres. Per omplir els dipòsits de tres cotxes com el nostre, necessitaríem el triple de litres.

Cert ☐

Fals ☐

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,931	0,940

ítem 1.2.d. Un quadrat de 3 m de costat, té una àrea de 9 m^2 . Si considerem un quadrat que tingui el doble de costat, l'àrea també serà el doble.

Cert ☐

Fals ☐

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,635	0,674

Comentari:

D'entrada, cal destacar que tenen un major percentatge d'encert, o millor mitjana, els casos en què la resposta és "cert", i sembla que això podria respondre a la idea que quan es produeix la relació entre dues variables de manera que a mesura que una creix l'altra també ho fa, hi ha tendència a suposar immediatament que la relació és de proporcionalitat.

Són destacables, negativament, les mitjanes tan baixes que s'obtenen a l'ítem 1.2.a, tant a 2n com a 4t d'ESO. Sembla que la resposta correcta a l'ítem 1.2.d requereix un nivell de raonament i de coneixements superiors als que requereixen l'ítem 1.2.a, però, en canvi en aquest últim s'obté menys èxit que al 1.2.d. Una possible explicació a aquest fenomen seria que la situació que planteja l'ítem 1.2.d és més acadèmica que no pas la que planteja l'ítem 1.2.a.

Els resultats que s'obtenen en aquest bloc indiquen que la distinció entre relacions de proporcionalitat i de no proporcionalitat és una qüestió que els alumnes d'ESO no dominen suficientment.

Bloc 1.3. Detecció visual de formes semblants (sense efectuar càlculs)

ítem 1.3. Entre els quadrilàters següents, digues quins són els dos parells que són “semblants” (o sigui, que tenen la mateixa forma).

Són semblants els quadrilàters i

Són semblants els quadrilàters i

(S’hi adjunta un dibuix amb 8 quadrilàters, entre els quals n’hi ha dos parells de semblants: el A i el C, i el D i el H. També s’ha de destacar que n’hi ha dos de còncaus, el E i el G, tot i que no són semblants)

Criteri de puntuació: 2 punts: dues parelles de figures correctes
1 punt: una parella de figures correcta
0 punts: cap parella de figures correcta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	1,354	1,609

Comentari:

Aquest ítem pretén avaluar la capacitat gairebé intuïtiva de detectar visualment formes semblants. S’observa que aquesta percepció millora de 2n d’ESO a 4t d’ESO.

Cal destacar que molts dels errors produïts es deuen a donar com a semblants els dos quadrilàters còncaus que hi ha entre les figures. Una raó que podria explicar aquest error és el fet que la paraula “semblants” té en el llenguatge natural un significat diferent que en el llenguatge matemàtic. De totes maneres, en l’enunciat es va pretendre esmorteïr aquesta contaminació lingüística aclarint que quan es deia “semblant” es volia dir que tinguessin la mateixa forma.

Bloc 1.4. Estratègia multiplicadora

ítem 1.4.a. Un llibre costa 15 €. Quant valen 5 llibres com aquest ?

Resposta :

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,963	0,962

ítem 1.4.b. Un ou val 0,2 €. Quant valen dues dotzenes d'ous ?

Resposta:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,862	0,880

Comentari:

En els dos ítems d'aquest bloc s'obtenen percentatges alts d'encert. En el cas de l'ítem 1.4.a, sorprén que, encara que de manera gairebé imperceptible, la mitjana sigui major a 2n d'ESO que a 4t d'ESO. En tot cas, sí que sembla força clar que en el domini d'aquesta estratègia simple no hi ha progrés d'un final de cicle a l'altre, per tant és important aconseguir que estigui plenament consolidada al final del primer cicle.

Quan hi intervenen altres paràmetres, per senzills que siguin com és el cas de les dotzenes, hi ha un descens significatiu dels percentatges d'encerts i ja es detecta progrés de 2n a 4t d'ESO.

Bloc 1.5. Reducció a la unitat

ítem 1.5.a. Fer 5 000 diaris ha costat 2 500 €. Quant ha costat cada diari ?

Resposta:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,360	0,418

ítem 1.5.b. Hem comprat 24 paquets de bateries. En total ens han donat 192 bateries. Quantes bateries hi ha a cada paquet ?

Resposta:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,899	0,973

Comentaris:

El resultat de l'ítem 1.5.a es pot considerar un dels més sorprenents de la prova. El baix percentatge d'encerts només pot ser degut al fet que quan l'alumne ha decidit que cal dividir, ho fa dividint el nombre més gran pel més petit, sense pensar quina és la divisió adequada, ja que la gran majoria de respostes errònies són "2", resultat de dividir 5000 per 2500. Tot i així, és difícil d'explicar perquè ni a 2n d'ESO ni a 4t d'ESO arriben al 50% els percentatges d'encerts en aquest ítem.

En canvi, l'ítem 1.5.b que d'entrada podria ser considerat menys simple i on, a més, el context no és monetari, obté un major èxit en les respostes.

Ens trobaríem aquí davant d'una evidència que el tipus de nombres (en aquest cas el fet que el resultat sigui menor que ú) és un element determinant en la dificultat per resoldre correctament una situació.

Bloc 1.6. Equivalència de fraccions

1.6. Considerem la fracció $\frac{2}{5}$. Quines de les fraccions següents li són equivalents?

ítem 1.6.a. $\frac{4}{7}$ Sí ☐ No ☐

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,915	0,935

ítem 1.6. b. $\frac{8}{20}$ Sí ☐ No ☐

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,889	0,957

ítem 1.6.c. $\frac{12}{30}$ Sí ☐ No ☐

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,878	0,908

ítem 1.6.d. $\frac{12}{15}$ Sí ☐ No ☐

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,714	0,826

Comentaris:

En tots els casos s'obtenen millors resultats a 4t d'ESO que a 2n d'ESO.

En l'ítem 1.6.d. s'obtenen uns resultats que cal considerar baixos donat el caire fonamental que té la qüestió de l'equivalència de fraccions i el fet que el cas que es planteja és senzill. Segurament cal buscar la raó d'aquest descens en el percentatge d'encerts en el fet que apliquen l'estratègia additiva errònia (la creença que si s'afegeix al numerador i al denominador una mateixa quantitat s'obté una fracció equivalent), però també hi ha d'haver alguna raó en el fet que l'aparença semblant entre les dues fraccions indueixi a fer pensar que són equivalents. Si l'única raó fos l'estratègia additiva errònia també hi hauria menys percentatge d'encerts en l'ítem 1.6.a., que en canvi té les mitjanes d'èxit més altes d'aquest bloc de continguts.

Bloc 1.7. Càlcul d'un element desconegut en una proporció

1.7. *Calcula, en cada cas, el nombre que es desconeix i que s'indica amb X, per tal que les fraccions siguin equivalents :*

ítem 1.7.a. $\frac{5}{X} = \frac{10}{8}$ $X =$

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,841	0,886

ítem 1.7.b. $\frac{7}{10} = \frac{X}{60}$ $X =$

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,841	0,848

ítem 1.7.c $\frac{14}{22} = \frac{7}{X}$ $X =$

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,804	0,826

ítem 1.7.d. $\frac{X}{9} = \frac{20}{30}$ $X =$

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,704	0,658

Comentaris:

La prova sembla deixar clar que la dificultat per calcular un element desconegut d'una proporció no ve condicionada per la posició que ocupa aquest element.

Sí que apareix com un factor determinant, en el sentit d'incrementar la dificultat, el fet que una de les dues fraccions no es pugui obtenir com a simplificació de l'altra. Aquesta sembla l'única raó per explicar una davallada de més de deu punts en el percentatge d'encerts de l'ítem 1.7.d en relació als altres ítems d'aquest bloc.

Crida molt l'atenció que en aquest ítem, 1.7.d., el percentatge d'encerts sigui major a 2n d'ESO que a 4t d'ESO.

Bloc 1.8. Comparació de fraccions

1.8. En cada un dels parells de fraccions següents, digues quina de les dues fraccions és la més gran:

ítem 1.8.a. $\frac{4}{7}$ i $\frac{5}{7}$

La fracció més gran de les dues és:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,868	0,880

ítem 1.8.b $\frac{5}{11}$ i $\frac{5}{13}$

La fracció més gran de les dues és:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,624	0,772

ítem 1.8.c $\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{8}$

La fracció més gran de les dues és:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,619	0,772

ítem 1.8.d $\frac{5}{6}$ i $\frac{3}{4}$

La fracció més gran de les dues és:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,714	0,804

Comentaris:

Sembla que seria esperable obtenir millors resultats en aquests ítems, tenint en compte, a més, que els alumnes disposaven de calculadora i que, per tant, fins i tot podien esbrinar quina fracció era més gran fent simplement la divisió.

En l'ítem 1.8.d. , entre les respostes errònies destaquen per la seva quantitat les que diuen que les dues fraccions són iguals. Ens trobem altre cop amb una aplicació de l'estratègia additiva errònia en el terreny de la proporcionalitat.

El baix percentatge d'encerts que s'obté en l'ítem 1.8.b, tant a 2n d'ESO com a 4t d'ESO, només és explicable si es pensa que un bon nombre d'alumnes d'aquests cursos no té gens clar el concepte de fracció.

PROVA 1. Fonaments de proporcionalitat (per blocs)

Cada bloc s'ha puntuat sobre 2 punts, per tant la puntuació global de la prova és de 16 punts, ja que en total hi ha 8 blocs. A continuació es donen els criteris de puntuació de cada bloc, la mitjana i desviació estàndard a 2n i 4t d'ESO i, al final, es donen la mitjana i desviació estàndard de la puntuació global

Bloc 1.1. “Proporcionalitat” qualitativa: relació qualitativa entre relacions qualitatives.

Criteris de puntuació: 2 punts: quatre respostes correctes
 1 punt: tres respostes correctes
 0 punts: menys de tres respostes correctes

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	1,772	1,864
Desviació estàndard	0,501	0,429

Bloc 1.2. Distinció entre casos de proporcionalitat i casos de no proporcionalitat.

Criteris de puntuació: 2 punts: quatre respostes correctes
 1 punt: tres respostes correctes
 0 punts: menys de tres respostes correctes

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,878	1,120
Desviació estàndard	0,813	0,834

Bloc 1.3. Detecció visual de formes semblants (sense efectuar càlculs)

Criteris de puntuació: 2 punts: dues parelles de figures correctes
 1 punt: una parella de figures correcta
 0 punts: cap parella de figures correcta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	1,354	1,614
Desviació estàndard	0,665	0,660

Bloc 1.4. Estratègia multiplicadora

Criteris de puntuació: 2 punts: dues respostes correctes
1 punt: una resposta correcta
0 punts: cap resposta correcta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	1,820	1,842
Desviació estàndard	0,425	0,394

Bloc 1.5. Reducció a la unitat

Criteris de puntuació: 2 punts: dues respostes correctes
1 punt: una resposta correcta
0 punts: cap resposta correcta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	1,254	1,391
Desviació estàndard	0,601	0,532

Bloc 1.6. Equivalència de fraccions

Criteris de puntuació: 2 punts: quatre respostes correctes
1 punt: tres respostes correctes
0 punts: menys de tres respostes correctes

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	1,519	1,701
Desviació estàndard	0,719	0,621

Bloc 1.7. Càlcul d'un element desconegut en una proporció

Criteris de puntuació: 2 punts: quatre respostes correctes
1 punt: tres respostes correctes
0 punts: menys de tres respostes correctes

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	1,439	1,397
Desviació estàndard	0,794	0,796

Bloc 1.8. Comparació de fraccions

Criteris de puntuació: 2 punts: quatre respostes correctes
 1 punt: tres respostes correctes
 0 punts: menys de tres respostes correctes

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,947	1,364
Desviació estàndard	0,909	0,858

Puntuació total de la prova (sobre 16 punts)

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	10,984	12,293
Desviació estàndard	3,153	3,084

Comentaris:

- Considerant els resultats per blocs de continguts, en tots els casos s'obtenen millors resultats a 4t d'ESO que a 2n d'ESO, excepte en el cas del bloc "1.7. Càlcul d'un element desconegut en una proporció".
Pel que fa a la desviació estàndard, no hi ha grans diferències entre els dos cursos i en tots els casos, excepte el bloc 1.7 ja esmentat i el bloc "1.2. Distinció entre casos de proporcionalitat i casos de no proporcionalitat", la dispersió és major a 2n d'ESO que a 4t d'ESO.
- Resulten especialment baixos els resultats que s'obtenen en el bloc "1.2. Distinció entre casos de proporcionalitat i casos de no proporcionalitat" (tant a 2n com a 4t d'ESO), en el bloc "1.5. Reducció a la unitat" (degut fonamentalment al ítem 1.5.a, ja comentat), i en el bloc "1.8. Comparació de fraccions" (en aquest cas, especialment a 2n d'ESO).
- Els blocs en els quals s'obtenen millors resultats són el "1.1. Proporcionalitat qualitativa: relació qualitativa entre relacions qualitatives", el "1.4. Estratègia multiplicadora" i el "1.6. Equivalència de fraccions".
- Dels resultats estàndards que s'obtenen en aquesta prova de fonaments de proporcionalitat, es pot concloure que cal posar molta atenció en potenciar en els alumnes l'aprenentatge de:
 - Distinció entre casos de proporcionalitat i casos de no proporcionalitat, ja que hi ha una tendència a reconèixer com a proporcional qualsevol relació en la qual en créixer una variable també creix l'altra.
 - Reducció a la unitat, ja que els alumnes distingeixen, en general, quan en una situació cal usar la divisió, però, dependent del context, no tenen prou consolidat el fet de saber quina és la quantitat que ha d'actuar com a dividend i quina com a divisor.
 - La detecció, mitjançant percepció visual, de formes semblants, en el cas dels alumnes de 2n d'ESO.

- La comparació de fraccions, de manera que no quedin dubtes sobre quina fracció és la major d'entre dues de donades.

4.3.3. Resultats de la prova sobre situacions d'aplicació immediata de proporcionalitat

PROVA 2. Situacions d'aplicació immediata de proporcionalitat (ítem a ítem)

Bloc 2.1. Percentatges

ítem 2.1.a. S'afirma que el 25% d'un total de 3 600 000 persones llegeixen algun diari, com a mínim un cop per setmana. Quantes persones es pot dir que llegeixen algun diari com a mínim un cop per setmana ?

Operacions:

Resposta:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,566	0,766

ítem 2.1.b. En un estudi que s'ha fet sobre els costums alimentaris de la població d'una ciutat, s'ha arribat a la conclusió que 3 de cada 5 habitants prenen llet per esmorzar. Quin percentatge d'aquesta població pren llet per esmorzar ?

Operacions:

Resposta:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,503	0,625

ítem 2.1.c. Un model de cotxe es ven normalment a 12 500 €. La marca farà el mes vinent una oferta en la qual rebaixarà aquest model un 10%. Quant costarà aquest model de cotxe el mes vinent ?

Operacions:

Resposta:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,466	0,625

Comentaris:

El coneixement sobre percentatges que demostren els alumnes en acabar el primer cicle d'ESO, sembla clarament insuficient, especialment quan es tracta d'usar un percentatge per aplicar un descompte.

Els resultats que s'obtenen, tant a 2n d'ESO com a 4t d'ESO, semblen inferiors als desitjables, sobretot si es té en compte que les situacions que es plantegen són d'aplicació immediata i simple de percentatges.

En l'ítem 1.2.c sovintaja com a resposta errònia el fet de calcular el 10% del preu i no efectuar la resta, o sigui, donar el descompte enlloc del preu resultant.

De totes maneres, aquest és un bloc de continguts en el qual s'observa una millora clara en comparar els resultats de 4t d'ESO amb els de 2n d'ESO.

Bloc 2.2. Interpretació proporcional d'esquemes gràfics

2.2. En l'esquema següent hi ha quatre poblacions A, B, C i D.

(Esquema gràfic en el qual A i B estan separades per 6 segments iguals alineats, B i C per tres segments iguals als anteriors alineats, i A i D per 10 segments iguals als anteriors alineats)

Se sap que de A a B hi ha 24 km de distància.

Ítem 2.2.a. Quina és la distància de B a C ?

Distància de B a C =

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,810	0,864

Ítem 2.2.b. Quina és la distància de A a D ?

Distància de A a D =

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,725	0,783

Comentaris:

En els ítems corresponents a aquest bloc de continguts s'obtenen uns percentatges d'encert sempre superiors al 70%.

Tot i ser prou elevada la mitjana que s'obté en cada un dels ítems a 2n d'ESO, els resultats de 4t les superen (encara que no arribi als 10 punts d'increment percentual).

ítem 2.3. Entre els rectangles de la pàgina següent, n'hi ha tres que són semblants (o sigui, que tenen la mateixa forma) . Quins són ?

Rectangles semblants: , i

Per què ?

Criteris de puntuació:

- 3 punts: els tres rectangles semblants correctes i justificació satisfactòria
- 2 punts: els tres rectangles semblants correctes, sense justificació o amb justificació no satisfactòria
- 1 punt: dos rectangles semblants correctes
- 0 punts: cap parell de rectangles semblants

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0.857	1.429

En aquest cas, considerant que la puntuació màxima és 3, els resultats que s'obtenen són baixos, ja que ni a 2n d'ESO ni a 4t d'ESO s'arriba a la meitat d'aquest màxim (1,5 punts). El fet de tenir en compte, en la puntuació, la justificació verbal de la resposta pot ser un element que hagi fet baixar les mitjanes. De totes maneres, a 2n d'ESO no s'arriba ni a la meitat de la que seria la puntuació màxima sense considerar la justificació verbal (2 punts). És clar que un dels elements que ha fet errar moltes respostes és l'aplicació de l'estratègia additiva errònia, ja que en molts casos es donen com a rectangles semblants els A (3x4), C (4x5) i F (2x3).

Bloc 2.4. Proporcionalitat com a correspondència, en contextos de preus

ítem 2.4.a. Sabem que dos parells de mitjons costen 8 €. Quant costen 10 parells de mitjons?

Operacions:

Resposta:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,730	0,810

ítem 2.4.b. Sabem que 12 litres de llet costen 9 €. Quant costen 18 litres de llet ?

Operacions:

Resposta:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,587	0,667

ítem 2.4.c. Hem comprat 20 bolígrafs i ens han costat 26,4 €. Quant ens costaran 52 bolígrafs ?

Operacions:

Resposta:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,651	0,728

Comentaris:

L'ítem 2.4.b és el que té un percentatge menor d'encerts, tant a 2n com a 4t d'ESO. La causa creiem que és semblant a la que hem trobat en l'ítem 1.5.a de la prova 1. En efecte, per calcular el preu d'un litre de llet cal dividir 9 € per 12 litres, i ens trobem que molts alumnes han dividit 12 litres per 9 €. Torna a aparèixer la tendència a dividir el nombre gran pel petit, quan s'ha decidit que cal dividir, sense reflexionar quin ha de ser el dividend i quin ha de ser el divisor.

Observem que aquest element de les característiques dels nombres que intervenen en la situació té més influència negativa en la correcta resolució de la situació que no pas el fet que algun dels nombres tingui xifres decimals, com és el cas de l'ítem 2.4.c.

En els tres casos s'observa millora en els resultats de 4t d'ESO en relació als de 2n d'ESO, encara que en cap cas aquesta millora supera els 10 punts percentuals.

Bloc 2.5. Proporcionalitat com a correspondència en contextos no monetaris

ítem 2.5.a. Amb 800 g de pintura vàrem poder pintar 18 m^2 de paret. Quanta pintura necessitem per pintar 72 m^2 de paret ?

Operacions:

Resposta:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,762	0,832

ítem 2.5.b. Per fer 45 quilograms de mermelada es necessiten 12 kg de sucre. Quanta mermelada es podrà fer amb 10 kg de sucre ?

Operacions:

Resposta:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,741	0,772

ítem 2.5.c. Un cotxe que va a una velocitat constant tarda 25 minuts en fer 37,5 km. Quants quilòmetres recorrerà en 45 minuts ?

Operacions:

Resposta:

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,646	0,761

Comentaris:

Els resultats que s'obtenen són molt semblants als del bloc 2.4, excepte en el cas de l'ítem ja comentat 2.4.b (en què s'obtenien resultats significativament més baixos).

En el cas de l'ítem 2.5.c, a 2n d'ESO es produeix una davallada en el percentatge d'encerts que es podria atribuir al fet que hi intervenen nombres decimals o al fet d'estar poc habituats a treballar amb el concepte de velocitat.

Observant els ítems dels blocs 2.4 i 2.5, es pot concloure que l'ordre en què apareixen les dades (primer el dividend o primer el divisor) no és un element que condicioni de manera rellevant el major o menor percentatge d'encerts.

Bloc 2.6. Proporcionalitat com a raó (homogènia o heterogènia)

ítem 2.6.a. Per fer una llimonada es barregen suc de llimona i aigua. La marca Lemon, usa 3 litres de suc de llimona per cada 9 litres de llimonada. La marca Lemonade usa 5 litres de suc de llimona per cada 18 litres de llimonada. Quina marca de llimonada tindrà més gust de llimona ?

La marca :

Per què ?

Criteris de puntuació: 2 punts: resposta correcta i justificació satisfactòria
1 punt: resposta correcta, sense justificació o amb justificació no satisfactòria
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,995	1,223

ítem 2.6.b. En una aula, A, de 45 m^2 hi ha 25 alumnes. En una altra aula, B, de 30 m^2 , hi ha 20 alumnes. En quina de les dues aules estaran més apretats els alumnes?

A l'aula :

Per què ?

Criteris de puntuació: 2 punts: resposta correcta i justificació satisfactòria
1 punt: resposta correcta, sense justificació o amb justificació no satisfactòria
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,857	1,033

ítem 2.6.c. Un cotxe, A, tarda 22 minuts en recórrer 50 quilòmetres i un altre, B, tarda 30 minuts en recórrer 60 quilòmetres. Quin cotxe ha anat més ràpid, o sigui a major velocitat?

El cotxe :

Per què ?

Criteris de puntuació: 2 punts: resposta correcta i justificació satisfactòria
1 punt: resposta correcta, sense justificació o amb justificació no satisfactòria
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,619	0,908

Comentaris:

Tenint en compte que la puntuació màxima de cada ítem és 2, cal considerar que en els dos ítems s'obtenen mitjanes força baixes.

Sens dubte, el fet de puntuar la justificació verbalitzada de la resposta és un element important a l'hora de considerar les causes que produeixen que la mitjana dels resultats sigui baixa.

És sorprenent que entre les justificacions errònies de resultats, sovintegin argumentacions en què implícitament hi ha present l'estratègia additiva errònia. Per exemple, justificacions del tipus “estan més apretats a l'aula B que a l'A, perquè a l'A hi ha 15 m^2 més i només hi ha 5 alumnes més”, en l'ítem 2.6.b.

Entre els resultats, crida l'atenció de manera negativa el que s'obté a 2n d'ESO per a l'ítem 2.6.c. Segurament és degut al fet que el domini del concepte de velocitat té un grau de complexitat superior al de “concentració” (que es podria atribuir a l'ítem 2.6.a) i al de “densitat de població” (que es podria atribuir a l'ítem 2.6.b). En aquest sentit, els alumnes de 4t d'ESO probablement estan més habituats a treballar amb el concepte de velocitat i per això, tot i que en l'ítem 2.6.c també és on obtenen pitjors resultats, la davallada de les mitjanes no és tan rellevant.

Bloc 2.7. Germen de la formalització del concepte de funció de proporcionalitat

ítem 2.7.a. Quant val el perímetre d'un triangle equilàter que té un costat de 6 cm ?

(s'inclou dibuix d'un triangle equilàter de costat 6 cm)

Perímetre =

I si el costat mesurés 4,5 cm ?

Perímetre =

Criteri de puntuació: 1 punt: els dos perímetres correctes
0 punts: en els altres casos

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,593	0,799

ítem 2.7.b. Sabem que el perímetre d'un triangle equilàter val 33 cm. Quant val el seu costat ?

Costat =

I si el perímetre mesura 16,8 cm ?

Costat =

Criteri de puntuació: 1 punt: els dos costats correctes
0 punts: en els altres casos

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,630	0,814

ítem 2.7.c. Quant val el perímetre d'un triangle equilàter de costat a ?

Costat = a → Perímetre =

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,376	0,647

ítem 2.7.d. Quant val el costat d'un triangle equilàter que té de perímetre x ?

Perímetre = x → Costat =

Criteri de puntuació: 1 punt: resposta correcta
0 punts: resposta incorrecta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,339	0,549

Comentaris:

Aquest és un dels blocs on la diferència de resultats entre els alumnes de 2n i de 4t d'ESO és més remarcable, especialment en els ítems 2.7.c i 2.7.d.

Aquests resultats confirmen que el procés de formalització algebàrica (per senzill que sigui, com és el cas que ens ocupa) presenta moltes dificultats per a una bona part de l'alumnat que té l'edat corresponent a 2n d'ESO. Fins i tot a 4t d'ESO, vistos els resultats obtinguts en els ítems 2.7.c i 2.7.d, cal considerar que segurament hi ha un bon percentatge d'alumnes per als quals qualsevol procés de formalització, generalització i abstracció representa força dificultats.

És destacable que, entre les respostes errònies a l'ítem 2.7.c abundi l'expressió a^3 , la qual cosa posa de manifest, a més de la dificultat de formalització, una incorrecta assimilació del significat d'una potència.

Costa de trobar explicacions al fet que el percentatge d'encerts a l'ítem 2.7.b sigui, tant a 2n d'ESO com a 4t d'ESO, superior al de l'ítem 2.7.a. Una possible explicació seria que alguns alumnes calcuessin $4,5 \times 3$ mentalment i s'equivoquessin i, en canvi, per calcular $16,8 : 3$ usessin la calculadora.

PROVA 2. Situacions d'aplicació immediata de proporcionalitat (per blocs)

Cada bloc s'ha puntuat sobre 2 punts, per tant la puntuació global de la prova és de 14 punts, ja que en total hi ha 7 blocs. A continuació es donen els criteris de puntuació de cada bloc, la mitjana i desviació estàndard a 2n i 4t d'ESO i, al final, es donen la mitjana i desviació estàndard de la puntuació global

Bloc 2.1. Percentatges

Criteris de puntuació: 2 punts: tres respostes correctes
 1 punt: dues respostes correctes
 0 punts: menys de dues respostes correctes

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,762	1,163
Desviació estàndard	0,851	0,840

Bloc 2.2. Interpretació proporcional d'esquemes gràfics

Criteris de puntuació: 2 punts: dues respostes correctes
 1 punt: una resposta correcta
 0 punts: cap resposta correcta

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	1,534	1,647
Desviació estàndard	0,782	0,701

Bloc 2.3. Semblança de figures, amb criteris quantitatius

Criteris de puntuació: 2 punts: els tres rectangles semblants i justificació satisfactòria
 1 punt: els tres rectangles semblants, sense justificació o amb justificació no satisfactòria
 1 punt: dos rectangles semblants i justificació satisfactòria
 0 punts: en la resta de casos

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,460	0,918
Desviació estàndard	0,761	0,868

Bloc 2.4. Proporcionalitat com a correspondència, en contextos de preus

Criteris de puntuació: 2 punts: tres respostes correctes
 1 punt: dues respostes correctes
 0 punts: menys de dues respostes correctes

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	1,148	1,304
Desviació estàndard	0,905	0,884

Bloc 2.5. Proporcionalitat com a correspondència en contextos no monetaris

Criteris de puntuació: 2 punts: tres respostes correctes
1 punt: dues respostes correctes
0 punts: menys de dues respostes correctes

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	1,312	1,489
Desviació estàndard	0,846	0,782

Bloc 2.6. Proporcionalitat com a raó (homogènia o heterogènia)

Criteris de puntuació: 2 punts: tres respostes correctes amb tres justificacions satisfactòries
1 punt: tres respostes correctes sense cap justificació, o sense cap justificació satisfactòria
1 punt: dues respostes correctes amb les corresponents justificacions satisfactòries
1 punt: una resposta correcta amb la corresponent justificació satisfactòria i una altra resposta correcta sense justificació satisfactòria
0 punts: en la resta de casos

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,497	0,826
Desviació estàndard	0,689	0,726

Bloc 2.7. Germen de la formalització del concepte de funció de proporcionalitat

Criteris de puntuació: 2 punts: els quatre apartats correctes
1 punt: apartats a i b correctes, i c i d incorrectes
1 punt: apartats c i d correctes, i a o b correctes
1 punt: apartats a i c correctes
1 punt: apartats b i d correctes
0 punts: en la resta de casos

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	0,852	1,293
Desviació estàndard	0,812	0,776

Puntuació total de la prova (sobre 14 punts)

	2n ESO	4t ESO
Mitjana	6,566	8,641
Desviació estàndard	3,772	3,827

Correlació lineal entre els resultats globals de la prova 1 i la prova 2

El coeficient de correlació lineal de Pearson entre les puntuacions totals obtingudes a la prova 2 i les puntuacions totals obtingudes a la prova 1 varen ser :

- A 2n d'ESO, el coeficient de Pearson fou 0,699
- A 4t d'ESO, el coeficient de Pearson fou 0,728

Recordem que el coeficient de correlació lineal de Pearson és un índex, el valor del qual està en l'interval $[-1, +1]$, que com més pròxim a 0 és indica una menor correlació lineal, que si és pròxim a +1 indica una forta correlació lineal positiva (com majors són els valors d'una variable, majors són els de l'altra), i que si és pròxim a -1 indica una forta correlació lineal negativa.

En aquest cas, doncs, podem considerar que hi ha una correlació lineal positiva força remarcable entre els resultats globals de les dues proves.

Comentaris:

- Els dos blocs on s'obté una puntuació més baixa són el "2.3. *Semblança de figures, amb criteris quantitius*" i el "2.6. *Proporcionalitat com a raó (homogènia o heterogènia)*". En els ítems d'aquests blocs és necessari tenir en compte la justificació verbal en la puntuació i aquest ha estat, sens dubte, un dels elements que ha contribuït a evitar que la mitjana de puntuacions fos més alta. De totes maneres, aquest no pot ser l'únic paràmetre que ha influït en al baix rendiment en les puntuacions ja que per si sol, si més no a 2n d'ESO, no és suficient per explicar unes mitjanes tan baixes. Per tant, cal entendre que en aquests blocs de continguts hi ha dèficits en el bagatge de coneixements dels alumnes.
- Cal considerar també insatisfactoris els resultats que s'obtenen en el bloc "2.1. *Percentatges*", tant a 2n com a 4t d'ESO, sobretot tenint en compte que els ítems plantegen situacions, en principi, molt simples i que els percentatges són un instrument de càlcul d'ús molt habitual en la vida quotidiana.
- El bloc que obté uns millors resultats és el "2.2. *Interpretació proporcional d'esquemes gràfics*", la qual cosa pot fer suposar que és una qüestió ben assumida per l'alumnat en general. Potser degut al fet que és un tipus de contingut que es treballa des de diferents perspectives i a diferents àrees curriculars.
- Els resultats del bloc "2.7. *Germen de la formalització del concepte de funció de proporcionalitat*" posen de manifest la dificultat clara que implica per als alumnes de 2n d'ESO qualsevol procés de formalització, per senzill que sigui, i el fet que tampoc a 4t d'ESO sembla que estigui a l'abast de tots els alumnes dominar els més simples processos de formalització algebàrica.

4.4. Proves per a l'avaluació diagnòstica

4.4.1. Consideracions generals

Cal insistir en el fet que les proves 3a i 3b (la primera per a 2n d'ESO i la segona per a 4t d'ESO) no foren elaborades ni aplicades amb la finalitat d'obtenir uns valors estàndards per a les seves respostes, sinó per tal de poder elaborar, conjuntament amb els resultats de les proves 1 i 2, una diagnosi individual sobre coneixements relacionats amb la proporcionalitat.

Els ítems d'aquestes proves tenen un caire diferent dels de les proves 1 i 2, en el sentit que no són situacions de resposta immediata, sinó que requereixen d'un mínim d'estratègia per a la seva resolució, ja sigui perquè hi intervenen proporcionalitats dobles o perquè cal aplicar altres procediments dels estrictament derivats del raonament proporcional.

Des d'aquest punt de vista, els ítems de les proves 3a i 3b es refereixen molt més a competències que els de les proves 1 i 2. En efecte, els ítems de les proves 3a i 3b presenten situacions per a la resolució de les quals cal seleccionar els coneixements adequats, integrar-los en una estratègia de resolució i aplicar-los adequadament.

Per tant, tot i que a continuació es presentaran els resultats que s'obtingueren en l'aplicació de les proves 3 a i 3 b, aquests resultats no han de ser presos com a valors estàndards, ja que, tal com s'ha comentat anteriorment, s'aplicaren a mostres molt reduïdes d'alumnes. Concretament, la prova 3 a s'aplicà a 34 alumnes de 2n d'ESO i la prova 3 b a 39 alumnes de 4t d'ESO, pertanyents tant uns com altres a dos centres diferents. Els instituts seleccionats foren aquells que tenien una major desviació estàndard, d'entre els quatre centres que, un cop ordenats els vuit d'acord amb la suma de mitjanes totals de les proves 1 i 2, ocuparen les quatre posicions centrals.

Recordi's que, com s'ha dit, dels 7 apartats que té cada una de les proves, els tres primers són comuns a la prova 3 a i a la 3 b.

Els criteris de puntuació s'han establert de tal manera que la puntuació màxima de cada bloc sigui de 2 punts. En el cas dels blocs que tenen més d'un ítem, s'ha fet de manera que la suma de puntuacions màximes dels ítems d'un mateix bloc sigui 2 (excepte en el bloc 3.b.6, en què s'especifica quin ha estat el criteri de puntuació). Quan un bloc té un únic ítem, la puntuació per blocs i ítems coincideix.

A diferència de la presentació que s'ha fet dels resultats de les proves 1 i 2, en aquest cas no s'adjunten comentaris ja que aquests quedaran integrats en fer la presentació de l'ús diagnòstic dels resultats. Cal tenir en compte que en ser reduïdes les mostres d'alumnes a què s'aplicaren les proves 3 a i 3 b, difícilment els resultats són susceptibles de comentaris de caràcter general.

PROVA 3 a. Situacions d'aplicació no immediata de proporcionalitat (2n d'ESO) (ítem a ítem, i per blocs)

ítem 3a . 1. Un grup de 8 membres d'un centre de recerca arqueològica ha d'anar 3 dies d'acampada i ha d'emportar-se tota l'aigua que necessiten, ja que allà on van no en poden obtenir.

Quanta aigua s'ha d'emportar el grup d'arqueòlegs ?

Resposta:

Criteris de puntuació:

- 2 punts: Troba la resposta correcta mitjançant estratègia vàlida
- 1 punt: Redueix bé alguna de les dues proporcionalitats, o les dues, a la unitat, o si fa ús d'una dada unitària, però no resol bé.
- 0 punts: En els altres casos

Criteris de puntuació del bloc: És la mateixa puntuació que l'ítem

L'avaluació dels aprenentatges matemàtics

Bloc 3 a. 2. Canvi doble de divises

El dia 23 d'abril de 2002 eren vigents els següents valors en el mercat de canvi de divises:

1 dòlar USA = 1,13 euros

1 dòlar USA = 130,36 iens japonesos

Ítem 3 a. 2. a. Quants iens equivalien, aquell dia, a 100 euros ?

(Doneu la resposta amb dues xifres decimals)

Operacions i raonaments:

Resposta:

Criteris de puntuació: 1 punt: Resultat correcte
 0,5 punts: Calcula bé un canvi de moneda diferent dels donats
 0 punts: En els altres casos

Mitjana	0,588
----------------	-------

Ítem 3 a. 2. b. Quants euros equivalien, aquell dia, a 1500 iens ?

(Doneu la resposta amb dues xifres decimals)

Operacions i raonaments:

Resposta:

Criteris de puntuació: 1 punt: Resultat correcte
 0,5 punts: Calcula bé un canvi de moneda diferent dels donats
 0 punts: En els altres casos

Mitjana	0,559
----------------	-------

Criteris de puntuació del bloc: És la suma de les puntuacions dels dos ítems

Mitjana	1,147
Desviació estàndard	0,958

Bloc 3 a. 3. Càlcul d'una distància real, a partir d'un mapa a escala.

ítem 3a . 3. A continuació, tens reproduït un mapa de Sicília.

Observa l'escala a què està dibuixat i, mitjançant l'ajut d'un regle graduat, digues quina és, aproximadament, la distància en línia recta entre les poblacions de Trapani i Ragusa a la realitat.

(S'inclou un mapa de Sicília en el qual la distància entre Trapani i Ragusa és d'aproximadament 17,2 cm i on, amb un segment, s'indica que 2 cm del mapa equivalen a 25 km a la realitat)

Operacions i raonaments:

Resposta:

Criteris de puntuació: 2 punts: Troba la resposta correcta, o aproximada (es consideren correctes valors des de 212,5 km (o sigui 17 cm en el mapa) fins a 217,5 km (o sigui 17,4 cm en el mapa)
1 punt: Error en la mesura de la distància en el mapa, però ben transformat per l'escala. Error en algun producte. Prendre 25 km equivalents a 1 cm enlloc de 2 cm. Resultat bé, sense explicar d'on surt.
0 punts: En els altres casos

Mitjana	1,353
----------------	-------

Criteris de puntuació del bloc: És la mateixa puntuació que l'ítem

Mitjana	1,353
Desviació estàndard	0,849

Bloc 3 a. 4. Estimació d'una proporció de població, a partir d'una proporció de mostra. Percentatges.

3a. 4. La ciutat A té una població de 1 500 000 habitants. Es vol fer un estudi sobre els hàbits d'assistència al cinema en aquesta ciutat.

Per fer-ho, es pren una mostra representativa de 6 000 habitants i se'ls fa una enquesta. Resulta que 1 290 persones d'aquesta mostra responen que van al cinema, pel cap baix, dues vegades cada mes.

Ítem 3 a. 4. a. Quina estimació es pot fer sobre el nombre d'habitants de la ciutat A que van dues o més vegades al cinema cada mes ?

Operacions i raonaments:

Resposta:

Criteris de puntuació: 1 punt: Resultat correcte
0 punts: En els altres casos

Mitjana	0,618
----------------	-------

ítem 3 a. 4. b. Quin percentatge de la població de la ciutat A es pot estimar que va dues vegades al cinema cada mes, pel cap baix ?

Operacions i raonaments:

Resposta:

Criteris de puntuació: 1 punt: Resultat correcte
0 punts: En els altres casos

Mitjana	0,529
----------------	-------

Criteris de puntuació del bloc: És la suma de les puntuacions dels dos ítems

Mitjana	1,147
Desviació estàndard	0,857

Bloc 3 a. 5. Recepte de preparat, a partir de components. Percentatges.

3a . 5. Per fer 4 litres d'una beguda refrescant, fem servir:

2 litres de suc de taronja
0,8 litres de suc de llimona
1,2 litres d'aigua

ítem 3 a. 5. a. Quina quantitat de cada un d'aquests ingredients es necessitarà per fer 15 litres d'aquesta beguda ?

Operacions i raonaments:

Resposta:

Criteris de puntuació: 1 punt: Tres respostes correctes
 0,5 punts: Dues respostes correctes
 0 punts: En els altres casos

Mitjana	0,691
----------------	-------

ítem 3 a.5.b. Quin percentatge de cada un dels tres líquids hi haurà a la beguda refrescant?

Operacions i raonaments:

Resposta:

Criteris de puntuació: 1 punt: Tres respostes correctes
 0,5 punts: Dues respostes correctes. Error motivat per un error en a). Prendre referent equivocat per als percentatges.
 0 punts: En els altres casos

Mitjana	0,676
----------------	-------

Criteris de puntuació del bloc: És la suma de les puntuacions dels dos ítems

Mitjana	1,368
Desviació estàndard	0,801

Bloc 3 a. 6. Càlcul de venda aventatjosa, a partir del preu unitari (proporcionalitat doble encadenada)

ítem 3a . 6. En una botiga hi ha dos tipus de capses de llumins.

La marca FOCS es ven en lots de deu capses de 40 llumins cada una, a 0,43 € el lot.

La marca FLAMES es ven en lots de tres capses de 120 llumins cada una a 0,40 € el lot.

Si les dues marques són d'igual qualitat, quina de les dues resulta més econòmica?

Operacions i raonaments :

Resposta:

Criteris de puntuació: 2 punts: Estratègia bona i resultat correcte.
 1 punt: Estratègia bona i error de càlcul o en la interpretació de resultats.
 0 punts: En els altres casos

Mitjana	0,500
----------------	-------

Criteris de puntuació del bloc: És la mateixa puntuació que l'ítem

Mitjana	0,500
Desviació estàndard	0,826

Bloc 3 a. 7. Comparació de probabilitats, a partir de comparació de fraccions.

ítem 3 a. 7. En les dues ruletes que tens dibuixades a sota, hi ha sectors blancs i sectors negres. Es diu que “surto blanc” quan, en aturar-se el cercle que girava, el sector que queda davant de la fletxa és de color blanc.

En quina de les dues ruletes següents és més probable que “surti” el color negre ?

(S'inclou dibuix d'una ruleta, A, en la qual una tercera part és pintada negra i d'una altra, B, en la qual tres vuitenes parts són pintades negres)

Operacions i raonaments:

Resposta:

Criteris de puntuació: 2 punts: Raonament correcte i resultat correcte
1 punt: Raonament correcte i error en la comparació o en el càlcul (de graus). Fraccions correctes i resposta correcta, però sense justificació.
0 punts: En els altres casos

Mitjana	0,647
----------------	-------

Criteris de puntuació del bloc: És la mateixa puntuació que l'ítem

Mitjana	0,647
Desviació estàndard	0,884

Correlació lineal entre els resultats globals de la prova 2 i la prova 3 a

El coeficient de correlació lineal de Pearson, entre els resultats globals de la prova 3 a i els de la prova 2, per als 34 alumnes de 2n d'ESO que han realitzat la prova 3 a, és 0,871.

Per al conjunt d'aquests 34 alumnes, el coeficient de correlació lineal de Pearson entre els resultats obtinguts a la prova 1 i els obtinguts a la prova 2 és 0,594.

Com es veu, doncs, en aquesta mostra de 34 alumnes de 2n d'ESO, s'obtenen uns valors per al coeficient de correlació lineal, entre els resultats globals de les proves 1, 2 i 3 a, prou elevats per poder considerar que entre aquests resultats hi ha un grau de dependència suficient.

PROVA 3 b. Situacions d'aplicació no immediata de proporcionalitat (4t d'ESO) (ítem a ítem, i per blocs)

Bloc 3 b.1. Proporcionalitat doble encadenada.

ítem 3b . 1. Un grup de 8 membres d'un centre de recerca arqueològica ha d'anar 3 dies d'acampada i ha d'emportar-se tota l'aigua que necessiten, ja que allà on van no en poden obtenir.

En una guia s'explica que, en general, per a un grup de 5 persones es necessiten 12,5 litres d'aigua per dia.

Quanta aigua s'ha d'emportar el grup d'arqueòlegs ?

Operacions i raonaments:

Resposta:

Criteris de puntuació: 2 punts: Troba la resposta correcta mitjançant estratègia vàlida
1 punt: Redueix bé alguna de les dues proporcionalitats, o les dues, a la unitat, o si fa ús d'una dada unitària, però no resol bé.
0 punts: En els altres casos

Mitjana	1,769
----------------	-------

Criteris de puntuació del bloc: És la mateixa puntuació que l'ítem

Mitjana	1,769
Desviació estàndard	0,583

Bloc 3 b. 2. Canvi doble de divises

El dia 23 d'abril de 2002 eren vigents els següents valors en el mercat de canvi de divises:

1 dòlar USA = 1,13 euros

1 dòlar USA = 130,36 iens japonesos

ítem 3 b. 2. a. Quants iens equivalien, aquell dia, a 100 euros ?

(Doneu la resposta amb dues xifres decimals)

Operacions i raonaments:

Resposta:

Criteris de puntuació: 1 punt: Resultat correcte
 0,5 punts: Calcula bé un canvi de moneda diferent dels donats
 0 punts: En els altres casos

Mitjana	0,795
----------------	-------

ítem 3 b. 2. b. Quants euros equivalien, aquell dia, a 1500 iens ?

(Doneu la resposta amb dues xifres decimals)

Operacions i raonaments:

Resposta:

Criteris de puntuació: 1 punt: Resultat correcte
 0,5 punts: Calcula bé un canvi de moneda diferent dels donats
 0 punts: En els altres casos

Mitjana	0,718
----------------	-------

Criteris de puntuació del bloc: És la suma de les puntuacions dels dos ítems

Mitjana	1,513
Desviació estàndard	0,823

Bloc 3 b. 3. Càlcul d'una distància real, a partir d'un mapa a escala.

ítem 3b . 3. A continuació, tens reproduït un mapa de Sicília.

Observa l'escala a què està dibuixat i, mitjançant l'ajut d'un regle graduat, digues quina és, aproximadament, la distància en línia recta entre les poblacions de Trapani i Ragusa a la realitat.

(S'inclou un mapa de Sicília en el qual la distància entre Trapani i Ragusa és d'aproximadament 17,2 cm i on, amb un segment, s'indica que 2 cm del mapa equivalen a 25 km a la realitat)

Operacions i raonaments:

Resposta:

Criteris de puntuació: 2 punts: Troba la resposta correcta, o aproximada (es consideren correctes valors des de 212,5 km (o sigui 17 cm en el mapa) fins a 217,5 km (o sigui 17,4 cm en el mapa)
1 punt: Error en la mesura de la distància en el mapa, però ben transformat per l'escala. Error en algun producte. Prendre 25 km equivalents a 1 cm enlloc de 2 cm. Resultat bé, sense explicar d'on surt.
0 punts: En els altres casos

Mitjana	1,282
----------------	-------

Criteris de puntuació del bloc: És la mateixa puntuació que l'ítem

Mitjana	1,282
Desviació estàndard	0,857

Bloc 3 b. 4. Construcció associada al teorema de Thales. Verbalització.

ítem 3b . 4. En el dibuix següent, marca un punt M , de la recta r , de manera que :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OM}$$

(Si et cal, pots fer servir el regle i l'escaire)

(Il·lustració tradicional del teorema de Thales: dues rectes concurrents, r i s , que es tallen en el punt O i en les quals hi ha marcats dos punts a la recta s , A i B , i un a la recta r , C .

Explica els passos que has seguit per fer la construcció o dibuix que t'han permès marcar el punt M :

- 1.
- 2.
- 3.

Si et cal, afegeix més apartats a l'explicació:

Criteris de puntuació: 2 punts: Construcció bona i explicació acceptable
1 punt: Construcció bona, sense explicació o amb explicació no adequada.
0 punts: En els altres casos

Mitjana	1,103
---------	-------

Criteris de puntuació del bloc: És la mateixa puntuació que l'ítem

Mitjana	1,103
Desviació estàndard	0,940

Bloc 3 b. 5. Problema de repartiment proporcional. Percentatges.

3b . 5. Una comunitat de propietaris està constituïda per quatre persones (A, B, C i D), que tenen cada una d'elles un local de la superfície que s'especifica a continuació.

Superfície del local propietat d'A: 80 m^2
Superfície del local propietat de B: 100 m^2
Superfície del local propietat de C: 128 m^2
Superfície del local propietat de D: 92 m^2

Les despeses es reparteixen entre els propietaris de manera proporcional a la superfície de cada un d'ells.

Ítem 3 b. 5. a. Quant haurà de pagar cada un d'ells per una despesa de 6000 € ?

Operacions i raonaments:

Resposta:

Criteris de puntuació: 1 punt: Estratègia bona i resultats correctes.
0,5 punts: Estratègia bona i error en només un dels quatre resultats.
0 punts: En els altres casos

Mitjana	0,615
---------	-------

ítem 3b . 5. b. Quin percentatge haurà de pagar cada un d'ells de qualsevol despesa ?

Operacions i raonaments:

Resposta:

Criteris de puntuació: 1 punt: Estratègia bona i percentatges correctes.
0,5 punts: Estratègia bona i error en només un dels quatre percentatges.
0 punts: En els altres casos

Mitjana	0,538
---------	-------

Criteris de puntuació del bloc: És la suma de les puntuacions dels dos ítems

Mitjana	1,154
Desviació estàndard	0,961

Bloc 3 b. 6. Proporcionalitat doble múltiple. Proporcionalitat inversa senzilla.

3b . 6. En cinc minuts una màquina impressora efectua el tiratge de 50 diaris. A partir d'aquesta dada, completa les taules següents:

Ítem 3b. 6. a.

Minuts	Nombre de màquines	Nombre de diaris
5	1	50
5	3	

Criteris de puntuació: 1 punt: Resultat correcte
0 punts: En els altres casos

Mitjana	0,974
---------	-------

Ítem 3 b. 6. b.

Minuts	Nombre de màquines	Nombre de diaris
5	1	50
	5	50

Criteris de puntuació: 1 punt: Resultat correcte
0 punts: En els altres casos

Mitjana	0,846
---------	-------

Ítem 3 b. 6. c.

Minuts	Nombre de màquines	Nombre de diaris
5	1	50
	2	500

Criteris de puntuació: 1 punt: Resultat correcte
0 punts: En els altres casos

Mitjana	0,513
---------	-------

Criteris de puntuació del bloc: 2 punts: Les tres respostes correctes
1 punt: Dues respostes correctes
0 punts: En els altres casos

Mitjana	1,359
Desviació estàndard	0,707

Bloc 3 b. 7 . Proporcionalitat associada a probabilitat.

ítem 3b . 7. Una bossa conté boles vermelles i boles blaves, de la mateixa grandària i pes. Sabem que hi ha 8 boles blaves.

També sabem que si extraïem una bola a l'atzar, la probabilitat que sigui blava és $\frac{2}{5}$. Quin és el nombre de boles vermelles que hi ha a la bossa ?

Operacions i raonaments :

Resposta:

Criteris de puntuació: 2 punts: Resposta correcta i explicació acceptable
1 punt: Dóna el total de boles, enlloc del nombre de boles vermelles. O sigui, dóna com a resposta 20. Dóna la bona resposta sense cap explicació.
0 punts: En els altres casos

Mitjana	1,026
----------------	-------

Criteris de puntuació del bloc: És la mateixa puntuació que l'ítem

Mitjana	1,026
Desviació estàndard	0,932

Correlació lineal entre els resultats globals de la prova 2 i la prova 3 b

El coeficient de correlació lineal de Pearson, entre els resultats globals de la prova 3 b i els de la prova 2, per als 39 alumnes de 4t d'ESO que han realitzat la prova 3 b, és 0,749.

Per al conjunt d'aquests 39 alumnes, el coeficient de correlació lineal de Pearson entre els resultats obtinguts a la prova 1 i els obtinguts a la prova 2 és 0,751.

Com es veu, doncs, en aquesta mostra de 39 alumnes de 4t d'ESO, s'obtenen uns valors per al coeficient de correlació lineal, entre els resultats globals de les proves 1, 2 i 3 b, prou elevats per poder considerar que entre aquests resultats hi ha un grau de dependència suficient.

4.4.3. Ús diagnòstic de les proves a 2n d'ESO

Per fer un ús diagnòstic dels resultats obtinguts pels 34 alumnes de 2n d'ESO a les proves 1, 2 i 3a sobre continguts relacionats amb la proporcionalitat, seguirem el procés següent:

1. Situarem en una taula els resultats globals dels 34 alumnes a cada una de les proves. El resultat global de la prova 1 es calculava sobre un màxim de 16 i els de les proves 2 i 3a sobre un màxim de 14. Per tal de fer més senzilla la interpretació dels resultats i homogeneïtzar la referència en els tres casos, passarem els tres resultats al referent 10 com a puntuació màxima.
2. A la vista dels resultats obtinguts en les tres proves, classificarem els 34 alumnes en diferents categories. Per als alumnes d'algunes d'aquestes categories es podrà fer una diagnosi col·lectiva i, en canvi, per als d'algunes altres categories caldrà fer una diagnosi individual.
3. En el cas dels alumnes per als quals cal fer una diagnosi individual, presentarem una manera d'organitzar la informació de què disposem sobre ells per tal que sigui possible fer-ne l'anàlisi corresponent que permeti fer la diagnosi.

Així doncs, començarem construint una taula on constin els resultats globals de les proves 1, 2 i 3a dels 34 alumnes de 2n d'ESO. Per mantenir l'anonimat, designarem els alumnes amb l'indicatiu A1, A2, A3, ..., A34.

Resultats globals dels 34 alumnes de 2n d'ESO:

	Prova 1 (sobre 16)	Prova 2 (sobre 14)	Prova 3a(sobre 14)
A1	10	8	9
A2	9	3	0
A3	12	1	3
A4	8	0	0
A5	15	12	14
A6	16	11	12
A7	11	10	14
A8	12	8	7
A9	8	2	1
A10	9	8	5
A11	6	7	8
A12	14	2	8
A13	11	8	7,5
A14	11	9	7
A15	15	12	13
A16	15	10	11
A17	9	6	5,5
A18	14	8	10
A19	14	11	9
A20	13	8	10
A21	14	12	12
A22	10	6	5
A23	11	8	8
A24	13	10	14
A25	15	11	11
A26	12	13	12,5
A27	4	1	2
A28	5	3	0
A29	11	12	14
A30	14	7	6
A31	10	10	8
A32	11	8	9
A33	5	5	1
A34	15	7	7

A continuació, es construeix la mateixa taula però prenent com a referència de puntuació màxima per a cada una de les tres proves el valor 10.

Resultats globals dels 34 alumnes de 2n d'ESO, prenent 10 com a referent de puntuació màxima:

	Prova 1 (sobre 10)	Prova 2 (sobre 10)	Prova 3a(sobre 10)
A1	6,25	5,71	6,43
A2	5,63	2,14	0
A3	7,50	0,71	2,14
A4	5	0	0
A5	9,38	8,57	10
A6	10	7,86	8,57
A7	6,88	7,14	10
A8	7,50	5,71	5
A9	5	1,43	0,71
A10	5,63	5,71	3,57
A11	3,75	5	5,71
A12	8,75	1,43	5,71
A13	6,88	5,71	5,36
A14	6,88	6,43	5
A15	9,38	8,57	9,29
A16	9,38	7,14	7,86
A17	5,63	4,29	3,93
A18	8,75	5,71	7,14
A19	8,75	7,86	6,43
A20	8,13	5,71	7,14
A21	8,75	8,57	8,57
A22	6,25	4,29	3,57
A23	6,88	5,71	5,71
A24	8,13	7,14	10
A25	9,38	7,86	7,86
A26	7,50	9,29	8,93
A27	2,50	0,71	1,43
A28	3,13	2,14	0
A29	6,88	8,57	10
A30	8,75	5	4,29
A31	6,25	7,14	5,71
A32	6,88	5,71	6,43
A33	3,13	3,57	0,71
A34	9,38	5	5

A partir de la informació que conté aquesta última taula, establim la classificació següent amb 5 categories diferents d'alumnes:

- Categoria 1. Alumnes que tenen les tres proves amb qualificació global superior o igual a 7: A5, A6, A15, A16, A21, A24, A25 i A26. Hi considerem també els alumnes A7 i A29, perquè l'única prova que no arriba a 7 és la prova 1 en la qual tenen de puntuació 6,88. Total d'alumnes: 10.
- Categoria 2. Alumnes que tenen les tres proves amb qualificació global inferior a 5: A27, A28 i A33. Total d'alumnes: 3.

- Categoria 3. Alumnes que tenen una qualificació major o igual a 5 en la prova 1 i qualificacions per sota de 5 en les proves 2 i 3 a: A2, A3, A4, A9, A17 i A22. Total d'alumnes: 6.
- Categoria 4. Alumnes que tenen les tres proves amb qualificació superior o igual a 5, però no les tres amb qualificació igual o superior a 7: A1, A8, A13, A14, A18, A19, A20, A23, A31, A32 i A34. Total d'alumnes: 11.
- Categoria 5. Resta d'alumnes, que seran aquells que tenen només una de les tres proves per sota de 5, o que només tenen igual o superior a 5 la prova 2 o la prova 3: A10, A11, A12 i A30. Total d'alumnes: 4.

Pel que fa als alumnes de la categoria 1, es pot considerar que tenen suficientment consolidats els coneixements relacionats amb la proporcionalitat (tenint en compte que no se n'han avaluat en relació a mesura i a la perspectiva funcional de la proporcionalitat), i que tenen assolides les competències en què s'han d'activar continguts relacionats amb la proporcionalitat.

Pel que fa als alumnes de la categoria 2, cal concloure que és necessari iniciar amb ells el treball relatiu al raonament proporcional partint pràcticament de zero, ja que no tenen assolits els fonaments previs, ni tampoc no demostren saber aplicar el raonament proporcional a situacions pràctiques, ja siguin senzilles o una mica més complexes.

Pel que fa als alumnes de la categoria 3, els resultats indiquen que tot i tenir assolits, en major o menor grau, alguns fonaments de la proporcionalitat no se'n surten a l'hora d'haver d'aplicar el raonament proporcional a situacions, per immediates que aquestes siguin. No són competents a l'hora de resoldre situacions en les quals calgui activar coneixements relacionats amb el raonament proporcional.

Dintre d'aquesta categoria, amb un criteri una mica més estricte, es podrien destriar casos i diferenciar, per exemple, entre un alumne com el A4 ($5 - 0 - 0$) que mostra una total ineficàcia a l'hora d'aplicar el raonament proporcional i que, a més, mostra un èxit molt ajustat en el domini dels fonaments de la proporcionalitat i un altre alumne com el A22 ($6,25 - 4,29 - 3,57$) en què la diagnosi feta es pot continuar considerant vàlida, però que és clar que té consolidats un major grau de coneixements i habilitats.

De totes maneres, distingint més o menys entre uns i altres, el treball amb els alumnes d'aquesta categoria hauria de posar l'èmfasi especialment en l'aplicació del raonament proporcional a situacions pràctiques, partint de la base que tenen mínimament consolidats alguns coneixements previs a la proporcionalitat.

En el cas dels alumnes de les categories 4 i 5, creiem que necessàriament cal considerar la diagnosi individualment. No sembla possible determinar una situació col·lectiva en la qual puguin considerar-se descrits de manera significativa i útil, de cara a posteriors actuacions o preses de decisions, la totalitat dels alumnes d'aquestes dues categories.

Per poder analitzar el cas de cada alumne individualment, presentarem una manera d'organitzar la informació de què disposem, a partir de les proves escrites, que en faciliti una interpretació diagnòstica. Per fer-ho, caldrà recuperar la puntuació de cada bloc de cada una de les proves i d'alguns ítems de la prova 3a i organitzar aquestes puntuacions d'acord amb la fitxa següent:

Alumne:	PROVA 1:	PROVA 2:	PROVA 3 a:
Preproporcionalitat	1.1:		
	1.2:		
Proporcionalitat geomètrica	1.3:	2.2:	3.a.3:
		2.3:	
Proporcionalitat com a correspondència	1.4:	2.1:	3.a.1:
	1.5:	2.4:	3.a.2:
		2.5:	3.a.6:
		2.7:	
Proporcionalitat com a raó	1.6:	2.1:	3.a.4:
	1.7:	2.4:	3.a.5:
	1.8:	2.5:	3.a.7:
		2.6:	
Percentatges		2.1:	3.a.4.b):
			3.a.5.b):
Verbalització		2.3:	3.a.7:
		2.6:	

Amb aquesta fitxa, la informació corresponent a un alumne obtinguda a les tres proves escrites queda a la vista i organitzada de manera que:

- A la part superior hi ha les qualificacions globals de les tres proves
- Les qualificacions dels blocs de les tres proves s'han organitzat en quatre grans apartats (preproporcionalitat, proporcionalitat geomètrica, proporcionalitat com a correspondència i proporcionalitat com a raó) i s'han especificat les puntuacions referents a percentatges i a aquells blocs en què la verbalització es tenia en compte en la puntuació, ja que són dos aspectes en els quals s'han constatat mancances d'una manera força generalitzada.

Aquesta organització de la informació permet interpretar els resultats obtinguts per un alumne, tant des del punt de vista de les diferents proves, com des d'una perspectiva "temàtica" que pot ajudar a entendre quins són els punts forts i els punts febles en el seu domini del raonament proporcional.

Per omplir i interpretar les fitxes cal tenir en compte que hi ha resultats de blocs que s'han de repetir en dos apartats diferents (per exemple, el 2.4 i el 2.5), que la puntuació de cada bloc es sobre un màxim de 2 punts i que totes les puntuacions que apareixen a la fitxa són de blocs, excepte les dels ítems 3.a.4.b) i 3.a.5.b), en l'apartat dels percentatges, que tenien una puntuació màxima de 1.

Abans d'analitzar les fitxes d'alguns alumnes, recordem a quins continguts o coneixements corresponien cada un dels blocs de les proves:

Prova 1. Fonaments de la proporcionalitat.

- 1.1. "Proporcionalitat qualitativa": relació qualitativa entre relacions qualitatives.
- 1.2. Distinció entre casos de proporcionalitat i casos de no proporcionalitat.
- 1.3. Detecció visual de formes semblants (sense efectuar càlculs).
- 1.4. Estratègia multiplicadora.
- 1.5. Reducció a la unitat.
- 1.6. Equivalència de fraccions.
- 1.7. Càlcul d'un element desconegut en una proporció.
- 1.8. Comparació de fraccions.

Prova 2. Situacions d'aplicació immediata de la proporcionalitat.

- 2.1 Percentatges.
- 2.2. Interpretació proporcional d'esquemes gràfics.
- 2.3. Semblança de figures, amb criteris quantitatius.
- 2.4. Proporcionalitat com a correspondència, en contextos monetaris (de preus).
- 2.5. Proporcionalitat com a correspondència, en contextos no monetaris.
- 2.6. Proporcionalitat com a raó (homogènia o heterogènia).
- 2.7. Germen de la formalització del concepte de funció de proporcionalitat.

Prova 3.a. Situacions d'aplicació no immediata de proporcionalitat (per a 2n d'ESO).

- 3.a.1. Proporcionalitat doble encadenada.
- 3.a.2. Canvi doble de divises.
- 3.a.3. Càlcul d'una distància real, a partir d'un mapa a escala.
- 3.a.4. Estimació d'una proporció de població, a partir d'una proporció de mostra.
Percentatges.
- 3.a.5. Recepta de preparat, a partir de components. Percentatges.
- 3.a.6. Càlcul de venda aventatjosa, a partir del preu unitari (proporcionalitat doble)
- 3.a.7. Comparació de probabilitats, a partir de comparació de fraccions.

A continuació, a tall d'exemple, presentem quatre fitxes corresponents a quatre alumnes de les categories 4 i 5 per il·lustrar quin és el tipus de diagnosi que permet, per als alumnes d'aquestes categories, la informació obtinguda a través de les proves.

Exemple 1

Alumne: A10	PROVA 1: 5,63	PROVA 2: 5,71	PROVA 3 a: 3,57
Preproporcionalitat	1.1: 1		
	1.2: 1		
Proporcionalitat geomètrica	1.3: 0	2.2: 2	3.a.3: 1
		2.3: 0	
Proporcionalitat com a correspondència	1.4: 2	2.1: 1	3.a.1: 2
	1.5: 1	2.4: 1	3.a.2: 0
		2.5: 2	3.a.6: 0
		2.7: 1	
Proporcionalitat com a raó	1.6: 2	2.1: 1	3.a.4: 0
	1.7: 1	2.4: 1	3.a.5: 2
	1.8: 1	2.5: 2	3.a.7: 0
		2.6: 1	
Percentatges		2.1: 1	3.a.4.b): 0
			3.a.5.b): 1
Verbalització		2.3: 0	3.a.7: 0
		2.6: 1	

- Ens trobem davant d'un alumne que té mancances en allò que hem anomenat preproporcionalitat, o sigui, en treballar bé amb relacions qualitatives i en distingir les relacions que són de proporcionalitat de les que no ho són.
- La resta de mancances, que són prou abundants, estan molt distribuïdes entre els diferents temes o apartats en què hem subdividit les qüestions relacionades amb el raonament proporcional.

Exemple 2

Alumne: A11	PROVA 1: 3,75	PROVA 2: 5	PROVA 3 a: 5,75
Preproporcionalitat	1.1: 2		
	1.2: 0		
Proporcionalitat geomètrica	1.3: 0	2.2: 2	3.a.3: 2
		2.3: 0	
Proporcionalitat com a correspondència	1.4: 2	2.1: 2	3.a.1: 2
	1.5: 0	2.4: 1	3.a.2: 0
		2.5: 1	3.a.6: 0
		2.7: 0	
Proporcionalitat com a raó	1.6: 0	2.1: 2	3.a.4: 2
	1.7: 0	2.4: 1	3.a.5: 2
	1.8: 0	2.5: 1	3.a.7: 0
		2.6: 1	
Percentatges		2.1: 2	3.a.4.b): 1
			3.a.5.b): 1
Verbalització		2.3: 0	3.a.7: 0
		2.6: 1	

- Curiosament, al revés que la majoria, aquest alumne obté millors resultats en les proves en què ha d'aplicar el raonament proporcional a contextos reals que no pas en les proves en què ha de demostrar que té coneixements de proporcionalitat sense haver-los d'aplicar. Pertany a un tipus d'alumne que quan ha de solucionar una situació en context real, sap trobar estratègies per sortir-se'n i, en canvi, quan se'ls demana un coneixement matemàtic fora de context real són molt menys hàbils per posar-lo de manifest. És un tipus d'alumne que podríem qualificar de poc acadèmic, però "espavilat".
- A la vista dels resultats, cal considerar que té suficientment consolidats els coneixements bàsics referents a percentatges.
- Obté resultats fluïdos en aquells blocs en què intervé la verbalització, per tant aquest seria un aspecte a treballar.
- A banda de les altres mancances que queden reflectides en la fitxa, cal destacar que no distingeix els casos de relació de proporcionalitat dels que no ho són.

Exemple 3

Alumne: A19	PROVA 1: 8,75	PROVA 2: 7,86	PROVA 3 a: 6,43
Preproporcionalitat	1.1: 2		
	1.2: 1		
Proporcionalitat geomètrica	1.3: 1	2.2: 2	3.a.3: 2
		2.3: 0	
Proporcionalitat com a correspondència	1.4: 2	2.1: 2	3.a.1: 2
	1.5: 2	2.4: 2	3.a.2: 0
		2.5: 2	3.a.6: 0
		2.7: 2	
Proporcionalitat com a raó	1.6: 2	2.1: 2	3.a.4: 2
	1.7: 2	2.4: 2	3.a.5: 2
	1.8: 2	2.5: 2	3.a.7: 1
		2.6: 1	
Percentatges		2.1: 2	3.a.4.b): 1
			3.a.5.b): 1
Verbalització		2.3: 0	3.a.7: 1
		2.6: 1	

- És un alumne que, en general, mostra poques mancances tant en el coneixement com en l'aplicació de continguts relacionats amb la proporcionalitat. Cal destacar, però, que com més exigent és el nivell d'aplicació dels coneixements, menys exitosos són els seus resultats, que segueixen una línia descendent a través de les proves 1, 2 i 3 a.
- Els resultats mostren un domini més que suficient en el treball bàsic amb percentatges i en l'aplicació del raonament proporcional en aquells casos en què hi ha un predomini de la perspectiva proporcional en forma de raó numèrica.

Exemple 4

Alumne: A34	PROVA 1: 9,38	PROVA 2: 5	PROVA 3 a: 5
Preproporcionalitat	1.1: 2		
	1.2: 2		
Proporcionalitat geomètrica	1.3: 2	2.2: 2	3.a.3: 2
		2.3: 0	
Proporcionalitat com a correspondència	1.4: 2	2.1: 0	3. a.1: 2
	1.5: 1	2.4: 2	3.a.2: 2
		2.5: 2	3.a.6: 0
		2.7: 1	
Proporcionalitat com a raó	1.6: 2	2.1: 0	3.a.4: 1
	1.7: 2	2.4: 2	3.a.5: 0
	1.8: 2	2.5: 2	3.a.7: 0
		2.6: 0	
Percentatges		2.1: 0	3.a.4.b): 0
			3.a.5.b): 0
Verbalització		2.3: 0	3.a.7: 0
		2.6: 0	

- El rendiment d'aquest alumne baixa molt quan ha d'aplicar, en les proves 2 i 3 a, els coneixements sobre continguts de proporcionalitat que, en la prova 1, demostra posseir.
- Mostra un rendiment molt fluix en l'ús dels percentatges i en aquells apartats on s'ha tingut en compte la verbalització a l'hora de puntuar.
- Tot i que demostra, a la prova 1, que té els fonaments del raonament proporcional ben assimilats, a l'hora d'aplicar-los mostra mancances significatives en els tres apartats: proporcionalitat geomètrica, proporcionalitat com a correspondència i proporcionalitat com a raó.

4.4.4. Ús diagnòstic de les proves a 4t d'ESO

Per fer un ús diagnòstic dels resultats obtinguts pels 39 alumnes de 4t d'ESO a les proves 1, 2 i 3b sobre continguts relacionats amb la proporcionalitat, seguirem un procés totalment anàleg a allò que hem fet pels alumnes de 2n d'ESO. O sigui, farem el següent:

1. Situem en una taula els resultats globals dels 39 alumnes a cada una de les proves. El resultat global de la prova 1 es calculava sobre un màxim de 16 i els de les proves 2 i 3b sobre un màxim de 14. Per tal de fer més senzilla la interpretació dels resultats i homogeneïtzar la referència en els tres casos, passarem els tres resultats al referent 10 com a puntuació màxima.
2. A la vista dels resultats obtinguts en les tres proves, classificarem els 39 alumnes en diferents categories. Per als alumnes d'algunes d'aquestes categories es podrà fer una diagnosi col·lectiva i, en canvi, per als d'algunes altres categories caldrà fer una diagnosi individual.
3. En el cas dels alumnes per als quals cal fer una diagnosi individual, presentarem una manera d'organitzar la informació de què disposem sobre ells per tal que sigui possible fer-ne l'anàlisi corresponent que permeti fer la diagnosi.

Així doncs, començarem construint una taula on constin els resultats globals de les proves 1, 2 i 3b dels 39 alumnes de 4t d'ESO. Per mantenir l'anonimat, designarem els alumnes amb l'indicatiu B1, B2, B3, ..., B39.

Resultats globals dels 39 alumnes de 4t d'ESO:

	Prova 1 (sobre 16)	Prova 2 (sobre 14)	Prova 3b(sobre 14)
B1	9	7	2
B2	15	11	10
B3	16	12	12
B4	15	13	13
B5	6	5	1
B6	10	6	4
B7	9	8	5
B8	9	8	2
B9	14	11	11
B10	12	12	9
B11	15	14	12
B12	13	12	10
B13	13	12	8
B14	12	12	6
B15	11	5	8
B16	13	11	8
B17	16	11	10
B18	16	13	14
B19	16	13	14
B20	14	12	11
B21	12	8	12
B22	14	9	14
B23	14	13	12
B24	13	9	11
B25	8	6	10
B26	15	9	10
B27	15	11	11
B28	15	14	12
B29	16	12	12
B30	10	7	5
B31	15	14	14
B32	15	12	14
B33	16	14	14
B34	7	4	0
B35	12	10	5
B36	14	13	14
B37	13	5	4
B38	15	8	10
B39	14	7	5

A continuació, es construeix la mateixa taula però prenent com a referència de puntuació màxima per a cada una de les tres proves el valor 10.

Resultats globals dels 39 alumnes de 4t d'ESO, prenent 10 com a referent de puntuació màxima:

	Prova 1 (sobre 10)	Prova 2 (sobre 10)	Prova 3b(sobre 10)
B1	5,63	5	1,43
B2	9,38	7,86	7,14
B3	10	8,57	8,57
B4	9,38	9,29	9,29
B5	3,75	3,57	0,71
B6	6,25	4,29	2,86
B7	5,63	5,71	3,57
B8	5,63	5,71	1,43
B9	8,75	7,86	7,86
B10	7,50	8,57	6,43
B11	9,38	10	8,57
B12	8,13	8,57	7,14
B13	8,13	8,57	5,71
B14	7,50	8,57	4,29
B15	6,88	3,57	5,71
B16	8,13	7,86	5,71
B17	10	7,86	7,14
B18	10	9,29	10
B19	10	9,29	10
B20	8,75	8,57	7,86
B21	7,50	5,71	8,57
B22	8,75	6,43	10
B23	8,75	9,29	8,57
B24	8,13	6,43	7,86
B25	5	4,29	7,14
B26	9,38	6,43	7,14
B27	9,38	7,86	7,86
B28	9,38	10	8,57
B29	10	8,57	8,57
B30	6,25	5	3,57
B31	9,38	10	10
B32	9,38	8,57	10
B33	10	10	10
B34	4,38	2,86	0
B35	7,50	7,14	3,57
B36	8,75	9,29	10
B37	8,13	3,57	2,86
B38	9,38	5,71	7,14
B39	8,75	5	3,57

A partir de la informació que conté aquesta última taula, establim la classificació següent amb 5 categories diferents d'alumnes:

- Categoria 1. Alumnes que tenen les tres proves amb qualificació global superior o igual a 7: B2, B3, B4, B9, B11, B12, B17, B18, B19, B20, B23, B27, B28, B29, B31, B32, B33 i B36. Total d'alumnes: 18.

- Categoria 2. Alumnes que tenen les tres proves amb qualificació global inferior a 5: B5 i B34. Total d'alumnes: 2.
- Categoria 3. Alumnes que tenen una qualificació major o igual a 5 en la prova 1 i qualificacions per sota de 5 en les proves 2 i 3 a: B6 i B37. Total d'alumnes: 2.
- Categoria 4. Alumnes que tenen les tres proves amb qualificació superior o igual a 5, però no les tres amb qualificació igual o superior a 7: B10, B13, B16, B21, B22, B24, B26 i B38. Total d'alumnes: 8.
- Categoria 5. Resta d'alumnes, que seran aquells que tenen només una de les tres proves per sota de 5, o que només tenen igual o superior a 5 la prova 2 o la prova 3: B1, B7, B8, B14, B15, B25, B30, B35 i B39. Total d'alumnes: 9.

Pel que fa als alumnes de la categoria 1, es pot considerar que tenen suficientment consolidats els coneixements relacionats amb la proporcionalitat (tenint en compte que no se n'han avaluat en relació a mesura i a la perspectiva funcional de la proporcionalitat), i que tenen assolides les competències en què s'han d'activar continguts relacionats amb la proporcionalitat.

Pel que fa als alumnes de la categoria 2, cal concloure que és necessari iniciar amb ells el treball relatiu al raonament proporcional partint pràcticament de zero, ja que no tenen assolits els fonaments previs, ni tampoc no demostren saber aplicar el raonament proporcional a situacions pràctiques, ja siguin senzilles o una mica més complexes.

Pel que fa als alumnes de la categoria 3, els resultats indiquen que tot i tenir assolits, en major o menor grau, alguns fonaments de la proporcionalitat no se'n surten a l'hora d'haver d'aplicar el raonament proporcional a situacions, per immediates que aquestes siguin. No són competents a l'hora de resoldre situacions en les quals calgui activar coneixements relacionats amb el raonament proporcional.

El treball amb els alumnes d'aquesta categoria hauria de posar l'èmfasi especialment en l'aplicació del raonament proporcional a situacions pràctiques, partint de la base que tenen mínimament consolidats alguns coneixements previs a la proporcionalitat.

En el cas dels alumnes de les categories 4 i 5, creiem que necessàriament cal considerar la diagnosi individualment. No sembla possible determinar una situació col·lectiva en la qual puguin considerar-se descrits de manera significativa i útil, de cara a posteriors actuacions o preses de decisions, la totalitat dels alumnes d'aquestes dues categories.

Per poder analitzar el cas de cada alumne individualment, presentarem una manera d'organitzar la informació de què disposem, a partir de les proves escrites, que en faciliti una interpretació diagnòstica. Per fer-ho, caldrà recuperar la puntuació de cada bloc de cada una de les proves i d'alguns ítems de la prova 3b i organitzar aquestes puntuacions d'acord amb la fitxa següent:

Alumne:	PROVA 1:	PROVA 2:	PROVA 3 b:
Preproporcionalitat	1.1:		
	1.2:		
Proporcionalitat geomètrica	1.3:	2.2:	3.b.3:
		2.3:	3.b.4:
Proporcionalitat com a correspondència	1.4:	2.1:	3.b.1:
	1.5:	2.4:	3.b.2:
		2.5:	3.b.6:
		2.7:	
Proporcionalitat com a raó	1.6:	2.1:	3.b.5:
	1.7:	2.4:	3.b.7:
	1.8:	2.5:	
		2.6:	
Percentatges		2.1:	3.b.5.b):
Verbalització		2.3:	3.b.4:
		2.6:	

Amb aquesta fitxa, la informació corresponent a un alumne obtinguda a les tres proves escrites queda a la vista i organitzada de manera que:

- A la part superior hi ha les qualificacions globals de les tres proves
- Les qualificacions dels blocs de les tres proves s'han organitzat en quatre grans apartats (preproporcionalitat, proporcionalitat geomètrica, proporcionalitat com a correspondència i proporcionalitat com a raó) i s'han especificat les puntuacions referents a percentatges i a aquells blocs en què la verbalització es tenia en compte en la puntuació, ja que són dos aspectes en els quals s'han constatat mancances d'una manera força generalitzada.

Aquesta organització de la informació permet interpretar els resultats obtinguts per un alumne, tant des del punt de vista de les diferents proves, com des d'una perspectiva "temàtica" que pot ajudar a entendre quins són els punts forts i els punts febles en el seu domini del raonament proporcional.

Per omplir i interpretar les fitxes cal tenir en compte que hi ha resultats de blocs que s'han de repetir en dos apartats diferents (per exemple, el 2.4 i el 2.5), que la puntuació de cada bloc es sobre un màxim de 2 punts i que totes les puntuacions que apareixen a la fitxa són de blocs, excepte la de l'ítem 3.b.5.b), en l'apartat dels percentatges, que tenia una puntuació màxima de 1.

Abans d'analitzar les fitxes d'alguns alumnes, recordem a quins continguts o coneixements corresponien cada un dels blocs de les proves:

Prova 1. Fonaments de la proporcionalitat.

- 1.9. “Proporcionalitat qualitativa”: relació qualitativa entre relacions qualitatives.
- 1.10. Distinció entre casos de proporcionalitat i casos de no proporcionalitat.
- 1.11. Detecció visual de formes semblants (sense efectuar càlculs).
- 1.12. Estratègia multiplicadora.
- 1.13. Reducció a la unitat.
- 1.14. Equivalència de fraccions.
- 1.15. Càlcul d'un element desconegut en una proporció.
- 1.16. Comparació de fraccions.

Prova 2. Situacions d'aplicació immediata de la proporcionalitat.

- 2.2 Percentatges.
- 3.2. Interpretació proporcional d'esquemes gràfics.
- 3.3. Semblança de figures, amb criteris quantitatius.
- 3.4. Proporcionalitat com a correspondència, en contextos monetaris (de preus).
- 3.5. Proporcionalitat com a correspondència, en contextos no monetaris.
- 3.6. Proporcionalitat com a raó (homogènia o heterogènia).
- 3.7. Germen de la formalització del concepte de funció de proporcionalitat.

Prova 3.b. Situacions d'aplicació no immediata de proporcionalitat (per a 4t d'ESO).

- 3.b.1. Proporcionalitat doble encadenada.
- 3.b.2. Canvi doble de divises.
- 3.b.3. Càlcul d'una distància real, a partir d'un mapa a escala.
- 3.b.4. Construcció associada al teorema de Thales. Verbalització.
- 3.b.5. Problema de repartiment proporcional. Percentatges.
- 3.b.6. Proporcionalitat doble múltiple. Proporcionalitat inversa senzilla.
- 3.b.7. Proporcionalitat associada a probabilitat.

A continuació, a tall d'exemple, presentem quatre fitxes corresponents a quatre alumnes de les categories 4 i 5 per il·lustrar quin és el tipus de diagnosi que permet, per als alumnes d'aquestes categories, la informació obtinguda a través de les proves.

Exemple 1

Alumne: B1	PROVA 1: 5,63	PROVA 2: 5	PROVA 3 b: 1,43
Preproporcionalitat	1.1: 2		
	1.2: 1		
Proporcionalitat geomètrica	1.3: 1	2.2: 1	3.b.3: 0
		2.3: 0	3.b.4: 0
Proporcionalitat com a correspondència	1.4: 2	2.1: 0	3.b.1: 2
	1.5: 1	2.4: 2	3.b.2: 0
		2.5: 2	3.b.6: 0
		2.7: 1	
Proporcionalitat com a raó	1.6: 2	2.1: 0	3.b.5: 0
	1.7: 0	2.4: 2	3.b.7: 0
	1.8: 0	2.5: 2	
		2.6: 1	
Percentatges		2.1: 0	3.b.5.b): 0
Verbalització		2.3: 0	3.b.4: 0
		2.6: 1	

- S'observa una davallada molt forta en el resultat corresponent a l'aplicació de continguts relacionats amb la proporcionalitat a situacions en què aquesta aplicació no és immediata.
- En el cas de les situacions de proporcionalitat geomètrica, s'observa que les dificultats són anteriors a la qüestió de l'aplicació de coneixements, i que per tant cal treballar amb la fonamentació bàsica d'aquest tipus de continguts.
- Els coneixements sobre l'ús de percentatges són totalment deficitaris. També s'observen resultats baixos en aquells blocs en què es té en compte la verbalització en la puntuació.

Exemple 2

Alumne: B14	PROVA 1: 7,5	PROVA 2: 8,57	PROVA 3 b: 4,29
Preproporcionalitat	1.1: 2		
	1.2: 1		
Proporcionalitat geomètrica	1.3: 2	2.2: 2	3.b.3: 0
		2.3: 0	3.b.4: 1
Proporcionalitat com a correspondència	1.4: 2	2.1: 2	3.b.1: 1
	1.5: 2	2.4: 2	3.b.2: 2
		2.5: 2	3.b.6: 2
		2.7: 2	
Proporcionalitat com a raó	1.6: 2	2.1: 2	3.b.5: 0
	1.7: 1	2.4: 2	3.b.7: 0
	1.8: 0	2.5: 2	
		2.6: 2	
Percentatges		2.1: 2	3.b.5.b): 0
Verbalització		2.3: 0	3.b.4: 1
		2.6: 2	

- Es produeix una davallada molt forta en el resultat de la prova 3, en relació als resultats de les proves 1 i 2. Aquest fet mostra dificultats en l'aplicació no immediata de coneixements que, en principi, semblen ben consolidats.
- Es detecten insuficiències específiques en els problemes de repartiments proporcionals i en els relacionats amb probabilitat.
- Cal dedicar una especial atenció a la proporcionalitat geomètrica, ja que en aquest cas la inseguretat també es detecta quan cal aplicar aquests coneixements a situacions d'aplicació immediata.

Exemple 3

Alumne: B25	PROVA 1: 5	PROVA 2: 4,29	PROVA 3 b: 7,14
Preproporcionalitat	1.1: 2		
	1.2: 0		
Proporcionalitat geomètrica	1.3: 2	2.2: 1	3.b.3: 2
		2.3: 1	3.b.4: 2
Proporcionalitat com a correspondència	1.4: 2	2.1: 0	3.b.1: 2
	1.5: 0	2.4: 1	3.b.2: 2
		2.5: 2	3.b.6: 0
		2.7: 1	
Proporcionalitat com a raó	1.6: 2	2.1: 0	3.b.5: 2
	1.7: 0	2.4: 1	3.b.7: 0
	1.8: 0	2.5: 2	
		2.6: 0	
Percentatges		2.1: 0	3.b.5.b): 1
Verbalització		2.3: 1	3.b.4: 2
		2.6: 0	

- Curiosament, al revés que la majoria, aquest alumne obté un millor resultat en la prova en què ha d'aplicar de manera no immediata el raonament proporcional a contextos reals que no pas en les dues primeres proves. Pertany a un tipus d'alumne que quan ha de solucionar una situació en context real, sap trobar estratègies per sortir-se'n i, en canvi, quan se'ls demana un coneixement matemàtic fora de context real són molt menys hàbils per posar-lo de manifest. És un tipus d'alumne que podríem qualificar de poc acadèmic, però "espavilat".
- A les proves 1 i 2, les mancances que s'observen estan molt repartides entre els diferents apartats. Valdria la pena potser destacar la dificultat que té en distingir els casos de proporcionalitat dels que no ho són.
- A aquest tipus d'alumnes, cal ajudar-los a ordenar bé els coneixements de què disposen i fer-los veure que es necessita disciplina de treball i rigor per afrontar situacions complexes. Cal anar en compte, però, en no desqualificar estratègies "peculiaris", que tot i no ser les més habituals acadèmicament, poden resultar eficaces.

Exemple 4

Alumne: B39	PROVA 1: 8,75	PROVA 2: 5	PROVA 3 b: 3,57
Preproporcionalitat	1.1: 2		
	1.2: 1		
Proporcionalitat geomètrica	1.3: 2	2.2: 2	3.b.3: 0
		2.3: 0	3.b.4: 0
Proporcionalitat com a correspondència	1.4: 2	2.1: 0	3.b.1: 2
	1.5: 2	2.4: 1	3.b.2: 2
		2.5: 2	3.b.6: 1
		2.7: 2	
Proporcionalitat com a raó	1.6: 2	2.1: 0	3.b.5: 0
	1.7: 1	2.4: 1	3.b.7: 0
	1.8: 2	2.5: 2	
		2.6: 0	
Percentatges		2.1: 0	3.b.5.b): 0
Verbalització		2.3: 0	3.b.4: 0
		2.6: 0	

- S'observa una davallada forta i permanent en les qualificacions de les proves, a mesura que aquestes incorporen l'aplicació de coneixements relacionats amb la proporcionalitat, a situacions cada vegada menys immediates.
- S'observa un dèficit molt gran en l'ús del càlcul de percentatges, tant a situacions simples com una mica més complexes
- Obté puntuacions baixes en els blocs en la puntuació dels quals es tenia en compte la verbalització.
- S'observen més dificultats en l'aplicació dels coneixements relatius a la proporcionalitat geomètrica i a la proporcionalitat com a raó, que no pas en la resta.

4.4.5. Comentaris finals

En els dos últims apartats hem vist, doncs, com es pot fer un ús diagnòstic dels resultats obtinguts pels alumnes a les proves 1, 2 i 3a, o 3b segons considerem, respectivament, els alumnes de 2n o de 4t d'ESO.

En efecte, a partir del conjunt de resultats de les tres proves, podem determinar no només si un alumne té consolidats en major o menor grau els coneixements relacionats amb el raonament proporcional, sinó també, en el cas dels que no obtenen resultat satisfactori, quins són els seus punts febles o si el problema principal no és tant de posseir determinats coneixements com de saber-los aplicar. D'aquesta descripció se'n pot deduir, a més, quin és el tipus de treball més convenient de dur a terme per fer progressar els alumnes en el seus coneixements relacionats amb la proporcionalitat.

De l'exemple que s'ha presentat en aquest treball, relacionat amb la proporcionalitat, se'n pot deduir un model de construcció de proves que permetin l'avaluació diagnòstica en altres camps de coneixements matemàtics o d'altres disciplines.

Per construir un conjunt de proves escrites que permetin l'avaluació diagnòstica, de la manera que ho hem fet aquí, podríem dir que, de manera resumida, cal seguir els següents passos:

1. Seleccionar un camp conceptual, en el sentit que els defineix Vergnaud (1990) com a *"conjunt ampli de situacions l'anàlisi de les quals requereix diversos tipus de conceptes, procediments i representacions simbòliques connectats entre si"*, com a tema per a ser avaluat, i determinar bé la població a qui s'aplicarà l'avaluació. En el nostre cas, el camp conceptual ha estat el de la proporcionalitat (sense entrar en les qüestions relatives a mesura ni tampoc en l'anàlisi de la proporcionalitat des d'una perspectiva de llenguatge de funcions) i les poblacions han estat dues: un conjunt d'alumnes de 2n d'ESO i un conjunt d'alumnes de 4t d'ESO.
2. Elaborar, validar, pilotar i aplicar tres proves escrites: una prova (la prova 1) centrada en fonaments del camp conceptual i, fins i tot, en coneixements previs necessaris per a abordar-lo; una altra prova (la prova 2) en què es plantegen situacions per a la resolució de les quals només cal aplicar de manera immediata coneixements corresponents al camp conceptual; i una tercera prova (la prova 3) en què es plantegen situacions la resolució de les quals implica una aplicació no immediata de coneixements del camp conceptual, o sigui situacions la resolució de les quals comporta l'exercici de competències que activen, entre altres, coneixements corresponents al camp conceptual.
3. Garantir que els ítems de cada una de les proves estiguin relacionats amb ítems de la prova de numeració anterior. O sigui, garantir que cada ítem de la prova 2 estigui relacionat amb ítems de la prova 1, i que els ítems de la prova 3 estiguin relacionats amb ítems de la prova 2.

D'aquesta manera es fa possible que quan es disposi de la informació que proporcionen les tres proves sobre un alumne, aquesta informació sigui ordenable de manera que s'hi estableixin relacions que permetin analitzar els punts febles i els punts forts, en els coneixements d'aquell alumne relatius al camp conceptual. Aquesta condició implica un estudi previ aprofundit que permeti estructurar els coneixements corresponents al camp conceptual. Així mateix, és d'utilitat conèixer i tenir en compte en l'elaboració de les proves quins són els errors més habituals que es produeixen i les estratègies errònies que de manera més general empren els alumnes.

També és bo assegurar-se que entre els resultats de les tres proves existeix una correlació alta, ja que això indica que hi ha una certa dependència i coherència entre els resultats que s'obtenen dels alumnes, a partir de l'aplicació de les proves.

4. Classificar els alumnes segons els resultats obtinguts en les tres proves, amb una classificació del tipus de la que hem presentat en aquest treball, o alguna altra usant criteris semblants, de manera que s'obtinguin categories d'alumnes, per a algunes de les quals es pugui fer una diagnosi col·lectiva.
5. Construir una fitxa que permeti tenir a la vista, d'una manera ordenada, tota la informació que sobre un alumne ens han proporcionat les tres proves, per tal de poder fer-ne una diagnosi que permeti fonamentar les decisions que s'hagin de prendre en el futur sobre el seu procés d'ensenyament-aprenentatge.

5. CONCLUSIONS I OBSERVACIONS FINALS DE L'ESTUDI

En relació a l'avaluació en general:

1. Qualsevol actuació avaluativa comporta un procés de recollida d'informació i un processament d'aquesta informació que permeti una anàlisi en què es pugui fonamentar una posterior presa de decisions.
Aquests processos comporten plantejar una situació als qui han de ser avaluats, que provoqui una resposta que serà la generadora de la informació que s'utilitzarà en l'avaluació.
S'anomenen instruments d'avaluació els instruments que s'usen per a la recollida de la informació o per al plantejament de la situació avaluativa. Aquests instruments poden ser molt diversos: entrevistes, pautes d'observació directa, proves escrites de característiques molt diferents, elaboració de treballs, ...
2. Quan s'inicia una actuació avaluativa, cal delimitar molt clarament què es vol avaluar, a qui es vol avaluar i per a què es vol avaluar, o sigui la finalitat amb què s'endega l'avaluació. La delimitació d'aquestes variables ha de condicionar totalment l'actuació avaluativa, en particular el tipus d'instruments que s'usin i el tipus de situacions que es plantegin.
Cal tenir present que l'avaluació, en el camp de l'educació, compleix, pel cap baix, quatre tipus de funcions: social, política, pedagògica i professional. Les quatre funcions poden produir-se simultàniament, però les particularitats de cada avaluació determinaran quines d'aquestes funcions seran les predominants i quines altres tindran un caràcter subsidiari.
3. En qualsevol avaluació s'han de considerar les qüestions de la seva validesa i la seva fiabilitat. Cal ser conscient, però, que a vegades caldrà relaxar l'exigència d'un elevat nivell formal de fiabilitat per tal de permetre que els instruments d'avaluació aportin informació significativa sobre aspectes imprescindibles de la realitat que es vol avaluar.

En relació a l'avaluació d'aprenentatges matemàtics:

1. L'aprenentatge de les matemàtiques té unes característiques pròpies prou definides com per considerar que l'avaluació d'aprenentatges matemàtics s'ha de contemplar des d'una perspectiva que, a més de les qüestions generals sobre avaluació, tingui en compte elements específics diferenciadors. Fins i tot hi ha qui parla de la necessitat d'elaborar una teoria de l'avaluació matemàtica.
Avui en dia, però, cal considerar que una teoria d'aquesta mena encara és lluny de ser realitat i el que es produeixen són esforços i experiències que permeten avançar cap a actuacions avaluatives subjectes, al màxim possible, als criteris de rigor, objectivitat i eficàcia.
2. Si s'observen les experiències en què s'han dut a terme actuacions avaluadores generalitzades, en les qual s'han tingut en compte els aprenentatges matemàtics (APU, TIMSS, PISA, ...) es constata que:
 - En general, aquest tipus d'actuacions parteixen d'una definició d'objectius poc precisa, de manera que es troba a faltar una major definició de la finalitat de l'avaluació.
 - Cronològicament es tendeix, en les proves escrites que s'apliquen en aquests

programes, a un major ús dels ítems oberts en relació als ítems tancats, ja que es considera que aquests últims no donen prou informació i no són adequats per avaluar l'exercici de competències.

– L'objecte de l'avaluació d'aprenentatges matemàtics cada cop es centra més en l'exercici de competències, i no tant en el domini de continguts estrictament i explícitament curriculars. Això provoca que els continguts matemàtics s'organitzin més aviat seguint uns criteris d'idees vertebradores o camps conceptuals, i no tant a partir de la classificació temàtica clàssica (nombres, equacions, geometria, ...).

En relació a la proporcionalitat:

1. La proporcionalitat o el raonament proporcional es pot entendre com un camp conceptual, en el sentit que dóna Vergnaud (1990) a aquesta expressió, i com un dels eixos vertebradors de molts dels continguts de l'etapa d'educació secundària obligatòria.
2. La proporcionalitat o el raonament proporcional es manifesta en molts dels continguts prescriptius (percentatges, fraccions, escales, mesura, ...) del currículum de matemàtiques durant tot l'ensenyament obligatori.
3. La proporcionalitat o el raonament proporcional es pot estudiar des de perspectives molt diverses i complementàries: aritmètica, geomètrica, funcional, ...

En relació als resultats obtinguts en l'avaluació estàndard realitzada en la part pràctica del treball:

1. A partir dels resultats obtinguts en el bloc 1.2, de la prova 1, s'observa que força alumnes no tenen suficientment desenvolupat el criteri per distingir els casos en què existeix una relació de proporcionalitat, d'aquells altres en què la relació existent no és de proporcionalitat. Sembla que atribueixen l'existència de relació de proporcionalitat a qualsevol situació en que intervinguin dues variables i es verifiqui que el fet que una d'elles augmenti el seu valor comporti també l'augment del valor de l'altra.
2. Els resultats obtinguts a l'ítem 2.4.b, de la prova 2, i sobretot a l'ítem 1.5.a, de la prova 1, indiquen que un elevat percentatge d'alumnes eludeixen l'obtenció de nombres positius menors que $\dot{u}$ com a resultat. És a dir, quan han de calcular el valor d'una variable corresponent al valor unitari de l'altra variable (reducció a la unitat), tendeixen a prendre com a dividend el nombre més gran i el més petit com a divisor, independentment de si el que cal fer és aquesta divisió o la contrària. De l'observació dels resultats que s'obtenen en altres ítems, es conclou que aquesta característica numèrica representa un obstacle major per a la resolució exitosa d'una situació problemàtica que no pas l'ús de nombres amb expressió decimal.
3. Els resultats obtinguts en els ítems 1.6.d i 1.8.d, de la prova 1, i el 2.3, de la prova 2, indiquen que per una bona part dels alumnes d'ESO persisteix l'aplicació de l'estratègia additiva errònia. És a dir, consideren, de manera més o menys explícita, que si al numerador i al denominador d'una fracció se'ls suma una mateixa quantitat s'obté una fracció equivalent.
4. Els resultats de l'ítem 1.7.d, de la prova 1, mostren que hi ha més dificultats de les que serien previsible entre els alumnes d'ESO (tant a $2n$ com a $4t$), per calcular el valor d'un terme desconegut en una proporció, coneixent-ne els altres tres, en els casos en

què cap de les dues fraccions equivalents es pot obtenir a partir de l'altra per simplificació.

5. Els resultats obtinguts a l'ítem 1.8.b, de la prova 1, sembla que posen de manifest que hi ha un percentatge considerable d'alumnes, tant de 2n d'ESO com de 4t d'ESO, que no tenen assimilat clarament el concepte numèric de fracció.
6. Els resultats de tot el bloc 2.1, de la prova 2, indiquen que els alumnes de 2n i de 4t d'ESO no treballen amb els percentatges, en situacions senzilles, amb el nivell d'eficiència i correcció que seria desitjable, sobretot tenint en compte l'abundant ús que es fa actualment, en àmbits molt variats de la vida quotidiana, dels percentatges com a element quantificador de la realitat.
7. Els resultats de l'ítem 2.3, de la prova 2, mostren que una bona part dels alumnes de 2n i de 4t d'ESO tenen dificultats per detectar figures semblants, si ho han de fer per criteris quantitius, verificant que existeix una relació de proporcionalitat entre les longituds dels costats corresponents de les figures.
8. Els resultats del bloc 2.7, de la prova 2, mostren que un percentatge molt elevat d'alumnes de 2n d'ESO tenen moltes dificultats, o simplement no tenen un nivell de maduresa intel·lectual suficient, per comprendre o construir petites formalitzacions, a partir de processos elementals de generalització. A 4t d'ESO, el percentatge d'alumnes que se'n mostra capaç tampoc no és gaire elevat (al voltant del 60%), però ha tingut un increment significatiu en relació al percentatge d'èxit a 2n d'ESO.
9. Els resultats del bloc 2.6, de la prova 2, mostren que hi ha un percentatge elevat d'alumnes, tant de 2n d'ESO com de 4t d'ESO, que tenen força dificultats per aplicar el raonament proporcional en situacions en què la relació de proporcionalitat es manifesta fonamentalment sota la forma de raó, ja sigui homogènia (quocient entre quantitats que representen mesures d'una mateixa magnitud, com per exemple en el cas de la concentració), o heterogènia (quocient entre quantitats que representen mesures de magnituds diferents, com per exemple en situacions en què es treballa en conceptes com la velocitat o la densitat de població).
10. Els resultats dels ítems dels blocs 2.3 i 2.6, de la prova 2, poden indicar que els alumnes, tant a 2n d'ESO com a 4t d'ESO, tenen dificultats per donar explicacions o justificar verbalment les respostes que donen. Aquests són els dos únics blocs de les proves 1 i 2 en la puntuació dels quals es té en compte la verbalització. El fet que les puntuacions d'aquests blocs siguin especialment baixes sembla posar de manifest aquesta dificultat en la verbalització que fem notar. De totes maneres, l'observació no pot ser concloent, ja que no és possible determinar, amb el processament que hem fet de la informació, si el poc èxit és degut en major mesura al desconeixement dels continguts a què fan referència aquests blocs o a una verbalització defectuosa.

En relació al disseny d'una avaluació diagnòstica, realitzat en la part pràctica del treball:

1. Un cop seleccionat un camp conceptual i un àmbit d'actuació (en el cas del nostre estudi, la proporcionalitat a l'ESO) és possible dissenyar un conjunt de tres proves escrites que permetin un tipus d'avaluació diagnòstica. La primera prova conté ítems referits als fonaments del camp conceptual, la segona prova planteja situacions en què s'han d'aplicar de manera immediata continguts referents al camp conceptual i la tercera prova planteja situacions més complexes, no d'aplicació immediata, per resoldre les quals cal l'exercici de competències que activen l'aplicació de coneixements relacionats amb el camp conceptual.

2. En el disseny de les proves cal garantir que s'estableixi una xarxa de relacions entre els ítems, de manera que cada un dels ítems d'una prova estigui relacionat amb ítems de la prova anterior. Així mateix, cal tenir establerta una estructuració dels continguts del camp conceptual que permeti organitzar els ítems de les diferents proves d'acord amb les diverses manifestacions, o els diversos tipus de situacions, del camp conceptual que es vulguin avaluar.
3. Un cop es disposa dels resultats de les tres proves, es poden classificar els alumnes en diverses categories:
 - Aquells alumnes que mostren un domini suficient tant dels coneixements corresponents al camp conceptual que es volen avaluar com de la seva aplicació a diverses situacions. Són aquells alumnes que obtenen resultats satisfactoris a les tres proves.
 - Aquells alumnes que mostren dèficits importants tant en els fonaments com en les aplicacions dels coneixements i habilitats corresponents al camp conceptual. Són aquells alumnes que no obtenen resultats mínimament satisfactoris en cap de les tres proves.
 - Aquells alumnes que mostren un cert domini dels fonaments del camp conceptual, però no tenen adquirides el mínim de destreses necessàries per aplicar aquests coneixements a situacions del món real, a allò que alguns anomenen situacions "autèntiques". Són aquells alumnes que obtenen resultats acceptables a la prova 1, però insatisfactoris a les proves 2 i 3.
 - Aquells alumnes que no pertanyen a cap de les tres categories anteriors i que, per tant, han de ser objecte d'una diagnosi individual.
4. La informació que proporcionen les tres proves s'ha de poder organitzar de manera que permeti una diagnosi individual per a cada alumne, que pugui servir de fonament a la presa de decisions sobre el futur del seu procés d'ensenyament-aprenentatge. Així, ha de donar informació, pel cap baix, sobre:
 - Com varia el rendiment de l'alumne en funció de la major o menor exigència d'aplicabilitat dels coneixements.
 - Quins són els aspectes del camp conceptual en què l'alumne mostra més dificultats.
 - Quina és la resposta de l'alumne en aquells aspectes del camp conceptual en què s'ha detectat que hi ha un elevat percentatge d'alumnat que hi troba dificultats.

BIBLIOGRAFIA

- Alderson, J.C. i altres (1998): *Exámenes de idiomas. Elaboración y evaluación*. Madrid: Cambridge University Press.
- Arcavi, A. (1999). "...Y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos?", a *Números* vol 38, juny de 1999, pàgines 39 – 56.
- Armendáriz, V.G.; Azcárate, C. i Deulofeu, J. (1993). "Didáctica de las matemáticas y psicología", a *Infancia y Aprendizaje*, número 62-63, pàgines 77 – 99.
- Ashworth, A.E. (1982): *Testing for continuous assessment*. London: Evans Brothers Limited.
- Bazzini, L. (1993): "The Teaching/Learning Process and Assessment Practice: Two Intertwined Sides of Mathematics Education", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Bodin, A. (1993): "What Does to Assess Mean? The Case of assessing Mathematical Knowledge", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Broomes, D.R. i Halliday, J.A (1993): "Major Issues in assessing Mathematics Performance at 16+ Level: A Caribbean Perspective", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Brown, M. (1993): "Assessment in Mathematics Educations: Developments in Philosophy and Practice in the United Kingdom", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chao-Qun, W. i Hui, Z. (1993): "Educational Assessment in Mathematics Teaching: Applied Research in China", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Cockcroft, Informe (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- COPREM (Commission Permanente de Reflexion sur l'Enseignement des Mathématiques) (1986): *Contributions a l'enseignement mathématique contemporain: 1. La proportionnalité. 2. Le calcul numérique*. Strasbourg: CRDP (Ministère de l'Éducation Nationale).
- Dossey, J.A. i Swafford, J.O. (1993): "Issues in Mathematics Assessment in the United States", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Fiol, M.L. i Fortuny, J.M. (1990): *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Síntesis.
- Foxman, D. (1993): "The Assessment of Performance Unit's Monitoring Surveys 1978-1987", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Galbraith, P. (1993): "Paradigms, Problems and Assessment: Some Ideological Implications", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Galí, A. (1935). *La prova de Burt i l'ensenyament de l'àritmètica*. Barcelona: Publicacions de l'Associació Protectora de l'Ensenyança Catalana. Editorial Pedagògica.

Giménez Rodríguez, J (1997): *Evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis.

Ginsburg, H.P. i altres (1993): "Assessing Mathematical Thinking and Learning Potential in Primary Grade Children", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gjone, G. (1993): "Types of Problems and How Students in Norway Solve Them", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hanna, G. (1993): "The Validity of International Performance Comparisons", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Henning, G. (1987): *A guide to language testing*. Cambridge: Newbury House.

Hermann, K. I Hirsberg, B. (1993): "Assessment in Upper Secondary Mathematics in Denmark", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Howson, G. (1993): "The Relationship Between Assessment, Curriculum and Society", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (1998): *Diagnóstico del Sistema Educativo. La escuela secundaria obligatoria. 2. Los resultados escolares*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura.

Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (2000): *PISA. La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos. Un nuevo marco para la evaluación*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura.

Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (2001): *PISA. La medida de los conocimientos y destrezas de los alumnos. La evaluación de la lectura, las matemáticas y las ciencias en el Proyecto Pisa 2000*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura.

International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) (1996): *Mathematics Achievement in the Middle School Years: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Chesnut Hill, MA, USA: TIMSS International Study Center. Boston College.

Izard, J. (1993): "Challenges to the Improvement of Assessment Practice", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jensen, H.N. (1993): "Assessment of Primary and Lower Secondary Mathematics in Denmark", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Johansson, B. (1993): "Diagnostic Assessment in Arithmetic", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jurdak, M. (1993): "Assessment in Mathematics Education in the Arab Countries", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kilpatrick, J. (1993): "The Chain and the Arrow: From the History of Mathematics Assessment", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kleijne, W. i Schuring, H. (1993): "Assessment of Examinations in the Netherlands", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Leal, L.C. i Abrantes, P. (1993): "Assessment in an Innovative Curriculum Project for Mathematics in Grades 7 – 9 in Portugal", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Little, C. (1993): "The School Mathematics Project: Some Secondary School Assessment Initiatives in England", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

López, J.A. i Moreno, M.L. (1997). *Resultados de matemáticas. TIMSS*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura.

Mellin-Olsen, S. (1993): "A Critical View of Assessment in Mathematics Education: Where is the Student as a Subject ?", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Morris, N. (1961): "An historian's view of examinations", a Wiseman, S. (Ed.) *Examinations and english education*. Manchester: Manchester University Press.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (1991): *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: SAEM Thales.

Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. (1993): "Assessment in Mathematics Education and its Effects: An Introduction", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. (1993): "Introduction", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Rico, L. (1993): "Mathematics Assessment in the Spanish Educational System", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ridgway, J i Passey, D (1993): "An International View of Mathematics Assessment – Through a Class, Darkly", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Robitaille, D.F. i Donn, S. (1993) : "TIMSS: The Third International Mathematics and Science Study", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Romberg, T.A. (1993): "How One Comes to Know: Models and Theories of the Learning of Mathematics", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Silver, E.A. i Lane, S. (1993): "assessment in the Context of Mathematics Instruction Reform: the Design of Assessment in the QUASAR Project", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Stephens, M. i Money, R. (1993): "New Developments in Senior Secondary assessment in Australia", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Swan, M. (1993): "Improving the Design and Balance of Mathematical Assessment", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sweetnam. R.K. (1993): "Assessment in Mathematics Within the International Baccalaureate", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Vergnaud, G. (1990). "La théorie des champs conceptuels", a *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 10, n. 2 i 3, pàgines 133-170.

Webb, N.L. (1993): "Visualizing a Theory of the Assessment of Students' Knowledge of Mathematics", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wheeler, D. (1993): "Epistemological Issues and Challenges to assessment: What is Mathematical Knowledge ?", a Niss, M. (Ed) (1993): *Investigations into Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wood, R. (1987): *Measurement and assessment in education and psychology*. London: The Falmer Press.

Zemin, C. i Shaozheng, L. (1993): "The Practice and Study of Evaluating Mathematics Teaching in China", a Niss, M. (Ed) (1993): *Cases of Assessment in Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.