LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN Y LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA UNIVERSITARIA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

Barquero i Farràs, Berta[1]; **Bosch i Casabò, Marianna**[2] y **Gascón Pérez, Josep**[3]
[1] Departamento de Matemáticas. Universitat Autònoma de Barcelona
[2] Universitat Ramon Llull. IQS School of Management, Universitat Ramon Llull
[3] Departamento de Matemáticas. Universitat Autònoma de Barcelona
bertabf@gmail.com
marianna.bosch@iqs.url.edu
gascon@mat.uab.cat

Resumen. Este trabajo se centra en el papel de la modelización matemática en los primeros cursos universitarios de Ciencias Experimentales. Situándonos en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, nuestra propuesta se basa en el diseño e implementación de los denominados «Recorridos de Estudio e Investigación» como nuevos dispositivos didácticos que tienen una doble función: integrar en el currículo las cuestiones a las que responden los contenidos matemáticos que los estudiantes deben aprender y articularlos mediante un proceso de modelización que permite «recubrir» el currículo considerado, dotándolo de una clara funcionalidad.

Palabras clave. Modelización matemática, enseñanza universitaria, ciencias experimentales, recorridos de estudio e investigación, Teoría Antropológica de lo Didáctico.

Study and research courses and mathematical modelling in the natural sciences university teaching

Summary. This paper focuses on the role of mathematical modelling in first year courses of experimental sciences university degrees. Within the frame of the Anthropological Theory of the Didactic, we propose the design and implementation of «Study and Research Courses» as a new didactic device having a double purpose: making students aware of the rationale of the mathematical contents they have to learn, and connecting these contents through the study of open modelling questions that can «cover» the main contents of the official mathematical syllabi, giving a clear functionality to its contents.

Keywords. Mathematical modelling, university teaching, natural sciences, study and research courses, Anthropological Theory the Didactics.

EL PAPEL DE LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXPERIMENTALES

El punto de partida de nuestra investigación se sitúa en el problema de la enseñanza de las matemáticas en el primer curso universitario de las facultades de Ciencias Experimentales (CCEE) que, como *problema docente* (en el sentido de Gascón, 1999), admite una formulación en los términos siguientes:

¿Qué tipo de matemáticas se deben enseñar en los primeros cursos de CCEE y cómo deben ser enseñadas?

La respuesta espontánea de la «enseñanza tradicional» de las matemáticas para CCEE a este problema se puede resumir en un proceso que consta de dos etapas. Primero, se enseñan unos conocimientos elementales que se proporcionan a los estudiantes como instrumentos «ya construidos» sin especificar con claridad ni su origen, ni su razón de ser, ni su ámbito de aplicación. Posteriormente, los estudiantes deben aprender a utilizar o, mejor, a «aplicar» estos conocimientos elementales y generales a las situaciones problemáticas prototípicas con las que se encontrarán en su especialidad científica (biología, geología, etc.). El tipo de adaptaciones o modificaciones que puedan requerir estos conocimientos para que sean efectivamente «aplicables» se interpreta como un problema *secundario*, si no en prioridad, sí en cronología. Esta situación refuerza una enseñanza que prioriza el carácter generador de los *elementos teóricos* (nociones, teoremas, definiciones, etc.) de las organizaciones matemáticas, restándole fecundidad productiva a sus *elementos prácticos* (problemas, técnicas, limitaciones de las técnicas, etc.).

Uno de los principales inconvenientes que tiene esta forma de secuenciar los contenidos de la enseñanza, y que ha sido puesto de manifiesto por numerosos autores (por ejemplo Niss, 2001 y Artigue, 2001, entre otros), es el de esconder las cuestiones problemáticas que constituyen la *razón de ser* de dichos contenidos. Al situar los elementos teóricos en el origen de la actividad matemática, se tiende a construir tipos de problemas muy cerrados y aislados, para obtener aplicaciones y ejemplificaciones *ad hoc* de cada una de las nociones o propiedades de cada tema. Dicho en otras palabras, se prioriza una enseñanza «lógico-deductiva» que parte de una construcción teórica de las nociones y considera posteriormente sus posibles utilizaciones, en detrimento de un enfoque «lógico-constructivo» donde los conocimientos se construyen a partir de cuestiones o problemas prácticos. Al mismo tiempo, se relega a un segundo plano (cuando no desaparece totalmente) el proceso de matematización de las cuestiones que se plantean en los diferentes ámbitos de las CCEE, «desarraigando» así las matemáticas de las demás disciplinas y de los problemas extramatemáticos que aportan sus razones de ser a muchas de las construcciones matemáticas enseñadas.

Esta primera respuesta espontánea de la enseñanza tradicional universitaria crea serias dificultades ligadas a la *pérdida de sentido* y la consiguiente *desarticulación* de los contenidos matemáticos escolares, lo que constituye hoy uno de los problemas más acuciantes en todos los niveles educativos (Holton, 2001). Desde la investigación didáctica, el problema docente considerado inicialmente se puede reformular entonces en el siguiente problema de investigación:

¿Cómo conseguir que los conocimientos matemáticos que se enseñan en los primeros cursos universitarios de CCEE no se reduzcan a un conjunto desarticulado de conceptos y técnicas carentes de sentido, sino que aparezcan de manera funcional como herramientas para dar respuesta a cuestiones problemáticas que surgen dentro de las CCEE?

Frente a este problema, muchos autores como Niss (1989), Blum (2002), Blum et al. (2007), Gómez (2003), Gómez y Fortuny (2002), Burkhardt (2006), entre otros, coinciden en proponer un enfoque más instrumental de las matemáticas como *herramienta de modelización* (Blum y Leiß, 2007), integrando así en el proceso de estudio la actividad de modelización matemática y las cuestiones extramatemáticas que la generan. Destacamos aquí, sin entrar en detalle (ver Barquero, 2009), la propuesta que hace la universidad danesa de Roskilde (Niss, 2001, Blomhøj y Kjeldsen, 2009) aportando una respuesta «mixta» al problema anterior en forma de una organización didáctica formada por dos tipos de cursos, unos de carácter «tradicional» en el que se exponen los contenidos matemáticos «elementales», junto con cursos dedicados a la «modelización matemática». Esta respuesta sugiere una segunda reformulación del problema considerado:

En los primeros cursos universitarios de CCEE, ¿cómo conseguir que las matemáticas se enseñen como una herramienta de modelización de situaciones o hechos científicos, de tal forma que la enseñanza globalmente considerada se organice en función de los problemas o proyectos que los estudiantes deben realizar?

Para poder responder a estas cuestiones, vamos a situarnos explícitamente en el ámbito de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) adoptando la concepción de la enseñanza de las matemáticas y, en particular, de la modelización matemática que ésta propone, lo que nos permitirá tomar en consideración nuevas dimensiones del problema formulado.

La TAD utiliza la noción de *praxeología* u *organización matemática* (OM) como herramienta fundamental para modelizar la actividad matemática. Señalemos, sin entrar en mucho detalle, que en toda OM se pueden distinguir dos aspectos inseparables. El bloque de la práctica (o *praxis*) que consta de tipos de tareas problemáticas (T_i) y de técnicas para abordar estas tareas (τ_i), y que pueden identificase genéricamente con el *saber-hacer* de la actividad. Inseparablemente a este bloque, aparece un discurso razonado sobre la práctica (el *logos*) que consta de una tecnología (θ) cuya función es la de describir, explicar y justificar la *praxis*, y de una teoría (Θ) para fundamentar la tecnología. Posteriormente, con el objetivo de tener herramientas más precisas para analizar los procesos didácticos institucionales, Yves Chevallard (1999) introdujo la distinción entre diferentes tipos de praxeologías –puntuales, locales y regionales– según el grado de complejidad de sus componentes.

Siguiendo los trabajos de García (2005) y de García *et al*. (2006), y generalizando la noción clásica del «ciclo de modelización» tal como lo proponen Blum y Leiß (2007), consideraremos los procesos de modelización como *procesos de reconstrucción y articulación de organizaciones matemáticas de complejidad creciente*. Este proceso parte de cuestiones problemáticas que se plantea una comunidad de estudio y que constituyen la «razón de ser» de las organizaciones matemáticas que va a ser necesario (re) construir a modo de respuesta. En consecuencia, la modelización matemática así interpretada constituye un *instrumento de articulación de la actividad matemática escolar* y requiere de manera totalmente imprescindible considerar la modelización *intramatemática* como un caso particular de modelización matemática. Veremos un ejemplo de ello en el apartado 3.

Antes queremos señalar que la concepción de la modelización matemática que propone la TAD implica que la actividad de modelización sea sinónimo de actividad matemática *funcional* en contraposición a una actividad matemática meramente *formal*. Por lo tanto, desde esta perspectiva, *la modelización matemática debe formar parte integrante de cualquier proceso de estudio de las matemáticas*. Esta integración constituye un aspecto esencial del problema de investigación que trataremos aquí y conduce a postular que no tiene sentido pensar en la «enseñanza de la modelización matemática» como un capítulo aparte de las matemáticas. En consecuencia, el problema que hemos planteado debe ampliarse en los siguientes términos:

¿Qué tipo de *dispositivos didácticos* posibilitarían una integración generalizada de la modelización matemática en los sistemas de enseñanza universitarios de las matemáticas para las CCEE? ¿Qué *condiciones* se requieren y qué tipos de *restricciones* institucionales limitan o impiden su desarrollo?

HACIA UNA ORGANIZACIÓN FUNCIONAL DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS: LOS RECORRIDOS DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN

Para abordar el problema que acabamos de enunciar, utilizaremos la noción de «recorrido de estudio e investigación» (REI) que introdujo Chevallard (2005 y 2006)[1]. Un REI se inicia con el estudio de una cuestión Q con fuerte poder generador, capaz de propiciar la aparición de numerosas cuestiones derivadas. Para poder dar respuesta a dichas cuestiones, se requiere la reconstrucción de un número considerable de herramientas matemáticas (técnicas, nociones, propiedades, etc.), que aparecen así como una consecuencia (y no como el origen) del estudio de las cuestiones. La propuesta de los REI pretende recuperar la relación genuina entre *cuestiones* y *respuestas* que está en el origen de la construcción del conocimiento científico en general y de la actividad matemática en particular.

Uno de los objetivos principales de la propuesta de los REI es el de introducir en la escuela una nueva epistemología que permita reemplazar el paradigma escolar del *«inventario» de saberes* por un paradigma del *cuestionamiento del mundo*, para dar sentido al estudio escolar de las matemáticas en su conjunto, transportando a la escuela una actividad de estudio más cercana al ámbito de la investigación. Como indica Chevallard (2009, p. 12):

> Dans ce paradigme, on va à l'école –tel est le contrat entre société et école– non pour visiter des savoirs regardés comme désirables en eux-mêmes, mais pour s' interroger sur le monde et interroger le monde.

Dentro de este paradigma, los REI aparecen como un dispositivo didáctico privilegiado para dar cabida a la actividad de modelización en la enseñanza actual de las matemáticas. En efecto, siguiendo a Chevallard (2005 y 2006), el punto de partida de un REI debe ser, como ya hemos dicho, una cuestión de interés real («viva») para la comunidad de estudio, que denotaremos por Q_0 y a la que llamaremos *cuestión generatriz* del proceso de estudio. A lo largo del REI, el estudio de la cuestión generatriz Q_0 evoluciona y da lugar al planteo de muchas nuevas «cuestiones derivadas»: Q_1, Q_2,…, Q_n. El estudio de Q_0 y de sus cuestiones derivadas conduce a la búsqueda de respuestas y, con ello, a la construcción de un gran número de saberes que delimitan el mapa y los límites provisionales del «territorio» a recorrer durante el proceso de estudio. Este proceso, que podremos sintetizar como una red de cuestiones y respuestas (Q_i, R_i), contiene las posibles trayectorias a «recorrer» generadas a partir del estudio de Q_0.

La modelización matemática tiene un papel esencial en este proceso por varios motivos. En primer lugar, la producción de «respuestas provisionales» a la cuestión inicial Q_0 requiere la construcción de modelos, su utilización y el cuestionamiento de su ámbito de validez, generando así nuevas cuestiones que, a su vez, requieren un nuevo proceso de modelización. Durante la evolución de un REI el cuestionamiento de estas respuestas provisionales que se van obteniendo se incorpora en todo momento a la actividad de modelización. Este cuestionamiento es el *motor* del proceso de modelización y, por lo tanto, de la estructura arborescente y articulada de los REI. En segundo lugar, los REI permiten explicitar, institucionalizar y evaluar el proceso global de modelización. Esto es posible dado que el proceso de estudio generado por los REI tiene cierta continuidad en el tiempo, logrando superar la atomización tradicional del estudio escolar de las matemáticas. Por último, dado que el objetivo de un REI es dar respuesta a ciertas cuestiones y no aprender (o enseñar) ciertos conceptos, el proceso de modelización puede considerarse como un objetivo de la enseñanza en sí mismo y no como un medio para construir nuevos conocimientos. El desarrollo de un REI supone dar importancia tanto al proceso de estudio –la actividad de modelización– como a la respuesta que este genera.

Veremos además que los REI permiten y potencian una forma de incorporar a los procesos de estudio los *momentos de la actividad matemática* que indica Chevallard (1999, pp. 250-255) que suelen tener poca presencia en la cultura pedagógica tradicional, lo que facilita la integración de la modelización matemática en los actuales sistemas de enseñanza.

DISEÑO Y EXPERIMENTACIÓN DE UN RECORRIDO DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN EN TORNO AL ESTUDIO DE LA DINÁMICA DE POBLACIONES

Después de describir a grandes rasgos las características básicas de los REI, vamos a ilustrar con un caso concreto el diseño y experimentación de un REI para la enseñanza de las matemáticas en un primer curso de CCCE. Esto nos permitirá mostrar con mayor claridad la relación entre el dispositivo didáctico y la actividad de modelización, así como examinar posteriormente, a modo de resultados de la experimentación, las condiciones y restricciones que habría que considerar para su implementación generalizada en la enseñanza universitaria actual.

Partiremos de una cuestión en torno al *estudio de la dinámica de poblaciones* que servirá de hilo conductor de todo el proceso didáctico. Propondremos responderla a partir de la construcción de un primer modelo matemático que permitirá delimitar inicialmente la problemática y ampliarla progresivamente a partir de la construcción de nuevas organizaciones matemáticas de complejidad creciente. Se originará, en definitiva, un proceso de ampliaciones sucesivas de los modelos matemáticos considerados que acabarán recubriendo el programa de estudios del curso.

El estudio de la evolución de una población como cuestión generatriz

Consideremos una población X y sea x_t su tamaño (número de individuos) en el instante t. El *estudio de la evolución* o *dinámica* de la población X puede originarse a partir de la siguiente cuestión inicial:

Q_0 : Si suponemos que conocemos el tamaño de la población X en algunos periodos de tiempo, ¿podemos predecir cómo evolucionará después de n períodos? ¿Será siempre posible predecir la evolución del tamaño de X a largo plazo? ¿Qué hipótesis sobre el entorno, la población y su crecimiento se tienen que asumir? ¿Cómo hacer predicciones sobre la evolución del tamaño de X y cómo validarlas?

Inicialmente podemos optar por discretizar el tiempo y suponer que x_t depende, entre otras cosas, de los d estados anteriores $x_{t-1}, x_{t-2},\dots, x_{t-d}$ $(0 \leq d \leq t)$. Podemos suponer, además, que la población X es *autónoma* en el sentido que no sufre cambios debido a las condiciones externas. En esta situación el estudio de la cuestión Q_0 nos lleva a considerar dos grandes tipos de modelos, según si x_t sólo depende del estado anterior x_{t-1} (población con *generaciones separadas*) o si x_t depende del conjunto de estados anteriores $x_{t-1}, x_{t-2},\dots, x_{t-d}$ (población con *generaciones mezcladas*).

Desarrollaremos aquí el primer tipo de modelos que nos llevará, como veremos más adelante, al estudio de *sucesiones recurrentes de orden* 1 del tipo $x_{t+1} = f(x_t)$, con f función de variable real. El segundo tipo conduce a considerar *sucesiones recurrentes de orden* $d > 1$ reducibles a *sucesiones recurrentes vectoriales* del tipo $X_{t+1} = f(X_t)$ donde $X_0 = (x_0, x_1, \dots, x_{d-1})$ es el vector de las d primeras generaciones y $X_i = (x_{id}, x_{id+1}, \dots, x_{id+(d-1)})$ el i-ésimo vector de las d generaciones sucesivas con $1 \leq i \leq n$.

Si consideramos el tiempo como una variable continua, pasamos entonces a estudiar la evolución continua de la población con modelos matemáticos basados en *ecuaciones diferenciales* de orden 1 o superior, estudio en el que encontramos una estructura análoga y, en cierta manera, paralela a la anterior. En el esquema del anexo 2 se muestran las relaciones entre los distintos modelos, es decir, cómo se relacionan, se completan y se complementan. Se indica también el paralelismo entre las dos grandes familias de modelos considerados, el mundo de los modelos discretos y el de los continuos. Cada una de las «ramas» del esquema constituye el germen de un posible REI. A continuación describiremos la experimentación que hemos realizado al implementarlos en un primer curso universitario de matemáticas.

Condiciones generales y metodología de la experimentación

La experimentación de los REI se ha desarrollado durante cinco cursos académicos, del 2005/06 al 2009/10, con estudiantes de primer curso de ingeniería técnica industrial (especialidad en química industrial) de la Escuela Técnica y Superior de Ingeniería (ETSE) de la Universitat Autònoma de Barcelona (UAB). En cada una de las experimentaciones participaron alrededor de 25-30 alumnos que estaban cursando la asignatura anual de «Fundamentos matemáticos para la ingeniería». A las tradicionales clases de teoría y de problemas se añadió un tercer dispositivo, denominado «Taller de modelización matemática», que consistía en una sesión semanal de dos horas. La participación en el taller era opcional para los estudiantes y les daba la posibilidad de obtener hasta un máximo de un punto adicional a la nota final de la asignatura.

Por motivos obvios de espacio, presentaremos aquí los elementos que fueron comunes a las cinco experimentaciones, dejando de lado las variaciones encontradas en cada caso (ver Barquero, 2009). El esquema del anexo 2 muestra los principales contenidos (cuestiones, modelos y respuestas) que, debido a su carácter relativamente autónomo, acabaron delimitando los REI experimentados. La realización del taller en paralelo con la asignatura condujo a dividir el proceso de estudio en tres problemáticas distintas siguiendo el programa del curso y su estructura semestral. El primer REI se centró en el estudio de la dinámica en *tiempo discreto* de poblaciones con *generaciones separadas*; el segundo REI en el estudio en tiempo discreto de poblaciones con *generaciones mezcladas* y el tercero al estudio de la evolución de las poblaciones en *tiempo continuo*. El primer REI, al que nos limitaremos aquí, ocupó un total de 6 sesiones de dos horas cada una. En la primera sesión se presentaron los datos correspondientes al crecimiento de una población de faisanes durante un periodo de cinco años consecutivos en una isla protegida delante de la costa del estado de Washington[2]. Junto a estos datos se presentó la cuestión inicial que guiaría y articularía todo el proceso de estudio. Cabe destacar que el resto de materiales no fueron diseñados a priori sino que, respetando el carácter dinámico y abierto de los REI, se fueron modificando en función de la evolución de la problemática tratada.

Sobre la gestión global de los talleres, los estudiantes estuvieron siempre trabajando en grupos de dos o tres personas. Al inicio de cada sesión, cada grupo de trabajo debía entregar un informe con la síntesis del trabajo de modelización desarrollado y los resultados parciales obtenidos en las sesiones precedentes. Además, al inicio de cada semana, se escogía un «secretario de la semana» encargado de explicar y defender los resultados de su grupo de trabajo. Este dispositivo resultó esencial para fomentar la discusión sobre el trabajo realizado además de permitir que resultara muy natural y necesario formalizar las sucesivas cuestiones estudiadas y las respuestas construidas durante el proceso de estudio de Q_0. Al final del taller cada grupo debía presentar un informe final sobre el trabajo realizado y los resultados obtenidos que, junto con los informes parciales, conformaban la calificación final del taller.

Los informes semanales de los grupos de trabajo, los dossier de trabajo redactados por la profesora según la evolución de la problemática, los informes finales individuales y las grabaciones de las distintas sesiones del Taller, que recogen la participación del secretario de la semana, la actuación de la profesora como directora del proceso de estudio y las distintas participaciones y discusiones entre los grupos de trabajo constituyen la base empírica sobre la que descansan las conclusiones de este trabajo. Cabe destacar que el análisis de todo este material se hizo en base al *diseño a priori* del *recorrido matemático* (Barquero, 2009, pp. 97-190) y al *diseño didáctico a priori* de los REI (Ibid., pp. 191-270).

Análisis de un proceso de estudio en torno a la dinámica de poblaciones

En todas las experimentaciones, la primera sesión se caracteriza por la riqueza de las respuestas construidas por los estudiantes. En una primera etapa los grupos de trabajo se dedican a ensayar *herramientas para describir el tiempo*, el *tamaño* y el *crecimiento* de la población de faisanes. En una segunda etapa construyen modelos matemáticos de las dos grandes familias de modelos que se estudian durante todo el curso: por un lado, dentro de los modelos continuos, proponen modelos basados en *ajustes exponenciales* y modelos de *interpolación polinómica* y, por otro lado, dentro de los modelos discretos, aparecen modelos basados en *sucesiones recurrentes*. Las figuras 1 a 4 muestran algunas de estas propuestas recogidas en las distintas experimentaciones:

Figura 1
Ejemplo del análisis de la tabla de datos.

any	X	taxa variació relativa	taxa variació absoluta
1937	8		
1938	26	$= \frac{26-8}{8} = 2,25$	$= 26 - 8 = 18$
1939	85	= 2,27	= 59
1940	274	= 2,22	= 189
1941	800	= 1,9	= 526
1942	1800	= 1,25	= 1000

Figura 2
Ejemplo de propuesta de un ajuste exponencial.

$$y(x) = a \cdot e^{b \cdot x}$$

$$8 = a \cdot e^{b} \longrightarrow \frac{8}{e^{b}} = a \simeq \frac{8}{e^{1'08}} = 2'71$$
$$1800 = a \cdot e^{6b}$$

$$1800 = \frac{8}{e^{b}} \, e^{6b} \qquad \ln(225) = \ln(e^{5b})$$
$$1800 = 8 \cdot e^{6b-b} \qquad \ln 225 = 5b$$
$$1800 = 8 \cdot e^{5b} \qquad b = \frac{\ln 225}{5}$$
$$\frac{1800}{8} = e^{5b} \qquad b \simeq 1'08$$
$$225 = e^{5b} \qquad \boxed{y(x) = 2'71 \cdot e^{1'08x}}$$

Figura 3
Ejemplo de modelos basados en sucesiones recurrentes.

$$m(1940) = \frac{n(1941) - n(1940)}{n(1940)}$$

→ se relaciona así mediante la frecuencia relativa el número de patos de 2 años consecutivos

$$m(1941) = \frac{n(1942) - n(1941)}{n(1941)}$$

(despejando las ecuaciones)

$$n(1941) = (m \cdot (n_{1940})) + n(1940)$$
$$n(1942) = (m \cdot n_{1941}) + n(1941)$$

obteniendo el término general

$$\boxed{n_a = (1+m)(n_{a-1})}$$

Figura 4
Ejemplo de modelo basado en el polinomio interpolador.

$$P_{(x)} = 8 + 18(x-1) + 20'5(x-1)(x-2) + 14'83(x-1)(x-2)(x-3) +$$
$$+ 4'92(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) - 1'57(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

En la puesta en común del trabajo realizado en la primera sesión, los grupos explican sus propuestas mientras la profesora se encarga de sintetizar en la pizarra aquello que cada grupo explica, centrándose principalmente en describir la *terminología* utilizada, los *modelos* considerados y las *hipótesis asumidas* para la construcción de estos modelos. En todas las experimentaciones la mayoría de estudiantes están más habituados a trabajar con funciones elementales, por lo que parecería lógico iniciar el estudio utilizando modelos «continuos». Pero raramente proponen el uso de la derivada para *describir el crecimiento* de *X* ni disponen de herramientas matemáticas suficientes para ver la relación con el ajuste exponencial propuesto. En cambio, sí suelen considerar herramientas de naturaleza «discreta» para analizar las tablas que presenta el dossier, lo que facilita considerar el modelo basado en *sucesiones recurrentes*. Por este motivo se ha iniciado siempre el estudio por este caso, dejando para el segundo semestre el estudio de los modelos continuos.

En la segunda sesión, el secretario de la semana con la ayuda de la profesora describe el trabajo realizado en la sesión introductoria. Más concretamente, se acuerda qué notación común se utilizará y se fijan algunas de las hipótesis básicas. La hipótesis de *generaciones separadas* conduce a considerar dos posibles magnitudes para describir el crecimiento de X: la *tasa absoluta de variación* entre dos generaciones consecutivas:

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n \qquad (1.1)$$

y la *tasa relativa de variación*:

$$r_n = \frac{\Delta x_n}{x_n} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \qquad (1.2)$$

de la que se deriva el *índice relativo de variación*:

$$i_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \qquad (1.3)$$

En estas primeras sesiones de la experimentación resulta imprescindible acordar y fijar una manera de referirse a los elementos clave que intervienen en el proceso de modelización. Se pacta así cierta nomenclatura como, por ejemplo: «hipótesis sobre el sistema», «cuestiones a estudiar», «construcción del modelo», «respuestas obtenidas», «nuevas cuestiones pendientes de ser estudiadas». De hecho la profesora solicita a los estudiantes que redacten sus informes semanales y finales en base a estos elementos clave. A continuación vamos a presentar, de forma muy resumida, la evolución de las *hipótesis* sobre X y sobre su crecimiento (H_i), las *cuestiones problemáticas* centrales a tratar (Q_i) derivadas de Q_0, la descripción de la *construcción de los modelos* (M_i), las sucesivas *respuestas* provisionales (R_i) y las nuevas cuestiones problemáticas que acaban configurando todo el proceso de estudio experimentado.

Del modelo maltusiano al modelo logístico

En todas las experimentaciones alguno de los grupos empieza por proponer una de las hipótesis (H_1) más sencillas sobre el crecimiento de X: que su tasa relativa de variación es constante ($r_n \equiv r$), lo que hace muy «natural» seguir con el estudio de los modelos «discretos», como se explica en el siguiente informe producido por un grupo de estudiantes:

Figura 5

Formulación de las primera hipótesis sobre el crecimiento de una población

La primera hipòtesi vàlida ha estat trobar

$\frac{M(n+1)}{M(n)} = c$, $\forall c \in \mathbb{R}$, on c = cte

Així ens vam adonar que si trobàvem una c vàlida podríem definir la funció $M(n+1) = c\,M(n)$ útil per tots els casos.

Esta suposición da lugar a la construcción del primer modelo (M_1) que equivale a considerar la ecuación recurrente:

$$x_{n+1} = r \cdot x_n + x_n = (1+r) \cdot x_n = \alpha \cdot x_n \text{ con } \alpha = 1 + r \qquad (1.4)$$

Si suponemos que esta relación es válida para cualquier pareja de generaciones consecutivas, obtenemos la expresión cerrada equivalente de M_1:

$$x_{n+1} = \alpha \cdot x_n \Leftrightarrow x_n = \alpha^n \cdot x_0 \qquad (1.5)$$

La profesora deja bajo la responsabilidad de los estudiantes que busquen información sobre este primer modelo y poder así nombrarlo de manera más concisa. En la siguiente sesión, algunos de los estudiantes vuelven habiendo encontrado información relativa a este modelo que denotaremos en adelante «*modelo maltusiano*»[3].

En una primera fase del trabajo técnico con M_1 los estudiantes se centran en estudiar una primera cuestión $Q_{1.1}$ formulada por ellos mismos: *¿Cómo podemos encontrar la mejor aproximación del parámetro «r» o «α» que proporcione el mejor ajuste a la evolución real de la población de faisanes?* En una segunda fase, la profesora les propone que realicen un *estudio general de* M_1 ($Q_{1.2}$), sugiriéndoles que realicen más simulaciones de los iterados de la sucesión generada por M_1 para distintos valores del parámetro r (o α) y de las condiciones iniciales x_0.

El estudio exploratorio realizado con este primer modelo permite a los estudiantes dar una primera respuesta R_1 a Q_0 distinguiendo tres posibles casos: (1) si $0 < \alpha < 1$, la población[4] tiende a su extinción; (2) si $\alpha = 1$, la población se mantiene constante igual a $x_0 = c$; (3) si $\alpha > 1$, la población crece indefinidamente: $\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$.

La figura 6 muestra la explicación propuesta por un grupo de estudiantes para el caso $x_0 = 150$ y $\alpha = 20$:

Figura 6

Ejemplificación de la simulación con M_1 tomando los valores c = 20 y $M(0)$ = 150

- <u>1r cas</u> : per una $M(0) = 150$ i una $c = 20$ tenim que: (podem plantejar la fórmula d'una altra manera per veure-ho més clar: $M(n+1) = c^n M(0)$)

n	M(n+1)
0	150
1	3000
2	60000
3	1200000
4	24000000

* Aquesta fórmula surt de

$M(n+1) = c\,M(n) = c c M(n-1) = c \cdot c \cdot c\, M(n-2) = c \cdot c \cdot c \cdot c\, M(n-3) = \ldots = c^n [M(0)]$

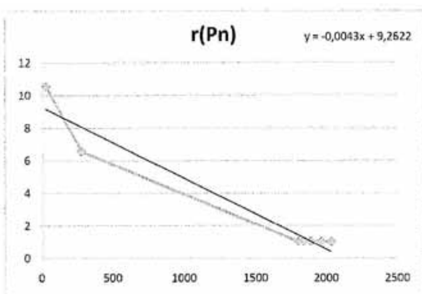
$\boxed{M(n+1) = c^n M(0)}$

Per tant, en aquest cas, on la $c > 1$, la població creix infinitament, com és el cas del nostre model. Matemàticament, per $c > 1$, $\lim_{n \to \infty} M(n+1) = \infty$

Rápidamente los estudiantes encuentran que este primer modelo (M_1) presenta una clara limitación: el hecho que la población aumente de forma geométrica (caso $\alpha > 1$) cae en la paradoja biológica de suponer la existencia de recursos infinitos. Esta limitación, conocida como la *paradoja maltusiana*, conduce a la profesora a plantear la necesidad de modificar la hipótesis H_1.

En general los propios estudiantes, que disponen de la gráfica realizada en la sesión introductoria de la tasa relativa de variación r_n (o de i_n) respecto del tamaño de la población $x(n)$, llegan a la conclusión que es más coherente suponer que r_n decrece respecto $x(n)$ sin poder sobrepasar «cierto límite».

Figura 7
Reformulación de H_1 por H_2 y búsqueda de la recta decreciente que mejor ajusta ($P_n \equiv x_n, r_n$).



Dades Experimentals

Pn	r
26	10,5384615
274	6,56934307
1800	1,01833333
1833	1,03000546
1888	1,03919492
1962	1,03669725
2034	1,01327434
2061	0

De este análisis se deduce habitualmente, y de forma bastante natural, la necesidad de cambiar la hipótesis H_1 por H_2 finalmente formalizada por la profesora en términos parecidos a los siguientes:

H_2: La tasa relativa de variación r_n varía con el tamaño de la población x_n. Además, x_n no puede sobrepasar cierto valor máximo K que llamaremos *capacidad máxima del hábitat* de X.

Bajo esta hipótesis, r_n deja de suponerse constante y pasa a considerarse decreciente a medida que X se aproxima a su capacidad máxima K. Uno de los casos más sencillos a estudiar sería suponer que r_n *decrece linealmente* con x_n: $r_n = \dfrac{x_{n+1} - x_n}{x_n} = a - b \cdot x_n$ para ciertos parámetros $a > 0$ y $b > 0$ (1.6)

Uno de los modelos más sencillos que satisface las condiciones impuestas por H_2 se obtiene al considerar $b = a/K$:

$$r_n = \frac{\Delta x_n}{x_n} = a - \frac{a}{K} \cdot x_n = \alpha \cdot \left(1 - \frac{x_n}{K}\right) \qquad (1.7)$$

Operando con la ecuación descrita llegamos a la expresión equivalente:[5]

$$N_{n+1} = \alpha \cdot N_n \cdot \left(1 - \frac{N_n}{K}\right) \text{ con } \alpha > 0 \text{ y } K > 0 \qquad (1.8)$$

conocida como la *ecuación logística discreta* o *modelo de Verhulst*[6] (M_2) donde el parámetro α representa el *coeficiente de reproducción* de X cuando hay recursos infinitos y el parámetro K representa el número máximo de individuos que pueden vivir en el hábitat considerado, es decir, la *capacidad máxima del hábitat*.

Una vez construido este segundo modelo (M_2),[7] los estudiantes intentan buscar una expresión cerrada del tipo $x_n = f(n)$ aunque, a diferencia del modelo maltusiano (M_1), la ecuación logística no la admite. La simulación numérica para algunos valores particulares de los parámetros α y K constituye un primer *medio experimental* para poder simular poblaciones que supuestamente pueden ser modelizadas a través de M_2.

Como en el caso anterior, también se pueden distinguir aquí dos etapas en el trabajo técnico con M_2. La primera fase se centra en hallar la aproximación de los parámetros α y K que proporcionen el mejor ajuste a la evolución real de la población de faisanes ($Q_{2.1}$) (como muestra la figura 7) seguida de la correspondiente puesta en común. La segunda fase corresponde al *estudio general de* M_2 ($Q_{2.2}$) mediante simulación numérica para obtener la siguiente respuesta provisional R_2 que, por ahora, queda pendiente de ser justificada:[8]

- Si $1 < \alpha < 3$, la población tiende a una *situación de equilibrio* que denotamos por L, esto es, $\lim_{n \to +\infty} x_n = L$.
- Si $\alpha > 3$, aparecen casos difíciles de analizar. Con la exploración numérica se detectan casos en que la sucesión x_n oscila entre varios valores (existencia de órbitas periódicas) o bien aparece un comportamiento que parece aleatorio y no reproducible.

La institucionalización de estas conjeturas por parte de los distintos grupos resulta muy pertinente para poner de manifiesto la aparición de dinámicas muy complejas imposibles de justificar con las herramientas matemáticas hasta ahora introducidas. Se plantean así varias cuestiones a las que no se puede dar respuesta ni con M_2 ni con M_1 y que guiarán el futuro del proceso de estudio, en particular:

$Q_{2.3}$: ¿Qué condiciones nos aseguran que la sucesión $(x_n)_{n\in x}$ esté bien definida y que converja hacia cierto límite L?

Aparece, en definitiva, la necesidad de considerar un nuevo modelo que incluya a los anteriores y permita reformular y estudiar las cuestiones que han quedado pendientes.

Un modelo funcional como generalización de los modelos maltusiano y logístico

El trabajo realizado anteriormente ha finalizado con la formulación de cuestiones problemáticas frente a las cuales los propios estudiantes solicitan más herramientas para estudiarlas. La profesora se encarga entonces de introducir un nuevo modelo M_3, que llamaremos *modelo analítico-funcional* formado por todas las ecuaciones recurrentes del tipo $x_{n+1} = f(x_n)$. Su objetivo es el de posibilitar el estudio general de la cuestión:

Q_3: ¿Cuál es la dinámica de la sucesión x_n generada por la relación $x_{n+1} = f(x_n)$ con f función de clase C^1?

La profesora hace notar que los modelos estudiados hasta ahora son casos particulares de M_3: en el caso del modelo maltusiano M_1, f es una relación lineal y, en el caso logístico M_2, una relación cuadrática.

Para poder trabajar con este modelo analítico-funcional general es necesario que la profesora introduzca técnicas de *simulación gráfica* que aparecen al considerar las curvas $y = f(x)$ e $y = x$ y simular gráficamente los iterados de x_n mediante, por ejemplo, el «método de la tela de araña». La introducción de esta técnica supone tomar en consideración un nuevo *medio experimental* al lado del numérico y el algebraico.

A partir de esta introducción, la profesora propone utilizar estas nuevas herramientas analítico-funcionales para comprobar y completar las respuestas (R_1 y R_2) que los estudiantes han dado en el estudio del modelo maltusiano (M_1) y del modelo logístico (M_2). En particular, el estudio del *modelo logístico* definido por la ecuación (1.8), lleva a los estudiantes un estudio paramétrico considerando las funciones $y = x$ y la función cuadrática:

$$f(x) = \alpha \cdot x \cdot \left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

Con el objetivo de completar el estudio de $Q_{2.3}$ que ha quedado pendiente, la profesora decide desglosar el recorrido en las siguientes :

$Q_{2.3.1}$: ¿Qué condiciones impone la capacidad máxima del hábitat K (esto es, $x_n \leq K$) sobre el valor del parámetro α ?

Según las hipótesis formuladas en H_2, los términos de x_n deben satisfacer que $0 \leq x_n \leq K$. Así, debemos restringirnos a funciones que satisfacen $f[0, K] \subseteq [0, K]$, por lo tanto, es necesario que:

$$0 \leq \frac{\alpha K}{4} \leq K, \text{ esto es, } 0 \leq \alpha \leq 4$$

$Q_{2.3.2}$: ¿Se pueden encontrar regularidades en las trayectorias de $(x_n)_{n\in x}$ dependiendo de los valores tomados por los parámetros α y K?

Por simulación gráfica y utilizando la técnica de la «tela de araña», podemos describir diversos casos que nos permitirán dar respuestas tentativas a esta cuestión. Las figuras 8 y 9 muestran algunas de las simulaciones realizadas por los estudiantes:

Figura 8

Simulación gráfica en el caso del modelo logístico para α = 2.5 y K = 3000.

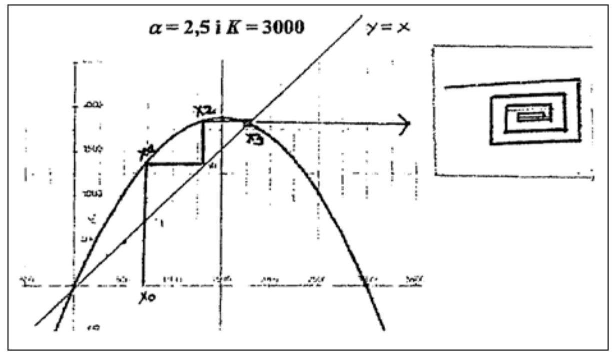
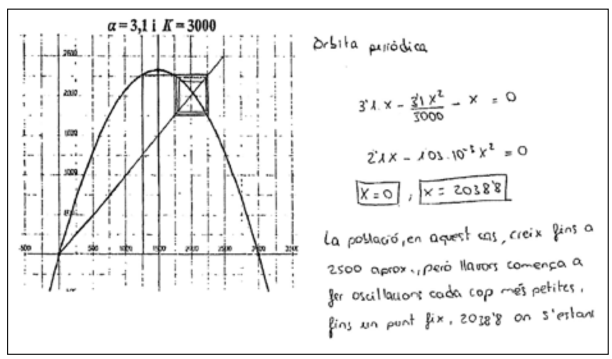


Figura 9

Simulación gráfica en el caso del modelo logístico para α = 3.1 y K = 3000.



$Q_{2.3.3}$: ¿Cómo se comporta la sucesión $(x_n)_{n\in x}$ cerca de los puntos fijos?

En el caso que estudiamos, tenemos dos puntos fijos:

$$x^*_0 = 0 \text{ y } x^*_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot K$$

Sólo tiene sentido considerar $x^*_1 > 0$, si $\alpha > 1$. Por lo tanto, debemos distinguir dos posibles casos:

- Si $0 < \alpha < 1$, la función cuadrática $f(x)$ se encuentra por debajo de la bisectriz $y = x$ y sólo tiene un punto fijo x^*_0 que, por simulación gráfica, parece ser un *punto atractor*.

- Si $\alpha > 1$, la función $f(x)$ se sitúa por encima de la bisectriz $y = x$, caso en el que aparecen dos puntos fijos (x^*_0 y x^*_1).

La simulación gráfica sugiere que x^*_0 es un punto *repulsor* y se detectan diferentes trayectorias y alrededor del segundo punto fijo x^*_1, lo que conduce a la siguiente cuestión:

$Q_{2.3.4}$: ¿Podemos asegurar localmente la convergencia de $(x_n)_{n\in x}$ hacia los puntos fijos x^*_0 y x^*_1?

Para estudiar esta cuestión, se puede utilizar la *aproximación local* de la función $f(x)$ en torno al punto fijo x^*_1 que nos proporciona su derivada en dicho punto:

$$f(x) \approx f'(x^*_1) \cdot (x - x^*_1)$$

Se obtiene así un modelo recurrente lineal del que, según el estudio que hemos desarrollado en el caso del modelo maltusiano (M_1), podemos concluir que:

- Si $f'(x^*_1) > 1$, entonces la sucesión x_n es divergente,
- Si $0 < f'(x^*_1) < 1$, entonces x_n es convergente.

Si evaluamos la derivada en este segundo punto fijo x^*_1,

$$f'\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \cdot K\right) = 2 - \alpha$$

unido a la información que nos ha proporcionado el estudio precedente con M_1, obtenemos:

- La sucesión x_n converge hacia el punto fijo x^*_1 cuando $|2 - \alpha| < 1$, equivalente a $1 < \alpha < 3$,
- Si $\alpha > 3$, x_n es divergente con oscilaciones que, en ciertos casos, presentan cierta periodicidad.

En ninguna de las cinco experimentaciones se pudo seguir más allá de este punto. La problemática emergente requería el uso de herramientas matemáticas que quedaban bastante alejadas de los objetivos del curso definidos antes de empezar el taller. Dada la idoneidad de la temática tratada en el siguiente REI (modelos matriciales para el estudio de la dinámica de poblaciones) en relación al programa del curso, se decidió acabar aquí con el estudio de esta primera familia de modelos y pasar a tratar la problemática matricial que no detallaremos aquí. El tercer taller del curso se destinó, en todas las experimentaciones, a abordar el caso de los modelos continuos con el estudio de ecuaciones diferenciales de primer orden, ampliándolo posteriormente al estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales.

CONCLUSIONES DE LA EXPERIMENTACIÓN

Queremos distinguir dos grandes tipos de resultados que se desprenden de nuestra investigación. Describiremos en primer lugar en qué aspectos el dispositivo de los REI ha posibilitado un proceso de estudio que da mayor cabida al carácter *funcional* de la actividad matemática, lo que veremos examinando el reparto de responsabilidades entre profesor y estudiantes durante la vivencia de los diferentes *momentos didácticos* (Chevallard, 1999). En segundo lugar, daremos cuenta de algunas de las restricciones institucionales que han aparecido al intentar integrar los REI en la enseñanza universitaria y que abrirán nuevas vías para proseguir con la investigación.

Eficacia de los REI para hacer vivir la modelización matemática

Los REI que hemos experimentado introducen en el aula nuevas condiciones y nuevos gestos del estudio más acordes con la visión de la matemática como actividad de modelización. Por ejemplo, durante los momentos de *exploración del tipo de problema* y del *trabajo de la técnica,* la utilización espontánea por parte de los estudiantes de herramientas informáticas que se dio en múltiples ocasiones favoreció el trabajo con modelos cuya manipulación podía resultar muy pesada, por ejemplo con el *trabajo experimental de simulación numérica* a la que los alumnos han recurrido en numerosas ocasiones cuando se trataba de simular sucesiones recurrentes en los casos del modelo maltusiano y modelo logístico. Esta potenciación de la dimensión exploratoria y experimental del estudio permite llevar a cabo un trabajo técnico sistemático imprescindible para la vida de la modelización matemática.

El potenciar la «vivencia» de estos momentos didácticos (exploratorio y trabajo de la técnica) permitió a los alumnos responsabilizarse de muchas tareas que en la cultura pedagógica tradicional se sitúan generalmente al margen de su responsabilidad: formulación de hipótesis, planteo de cuestiones problemáticas, contraste experimental, elección de las herramientas matemáticas adecuadas, etc. Dado que todas estas tareas son imprescindibles para el desarrollo de la actividad de modelización matemática, podemos decir que los REI, al incorporarlas, hacen posible vivir las primeras etapas del proceso de modelización matemática que describe Chevallard (1989), esto es: la delimitación del sistema, la construcción del modelo matemático y el inicio del trabajo técnico dentro de éste.

En lo que se refiere al *momento tecnológico-teórico* y al de la *institucionalización*, cabe señalar que, desde las primeras sesiones de los talleres, se trabajaba con objetos del proceso de modelización que anteriormente los estudiantes no podían nombrar ni, por tanto, reconocer como tales, como, por ejemplo, «sistema», «modelo», «trabajo dentro del modelo», «hipótesis que caracterizan el sistema», etc. A lo largo del desarrollo de los REI la comunidad de estudio fue pactando una forma común de nombrar dichas nociones y, en consecuencia, fue otorgando un «papel oficial» a todos estos elementos tan importantes para mantener viva la actividad de modelización matemática. También aquí, la implicación de los alumnos fue mayor que en el contrato didáctico tradicional que deja bajo la exclusiva responsabilidad del profesor el trabajo teórico, de institucionalización y de evaluación. Podemos citar tres dispositivos didácticos que facilitaron este cambio fundamental:

- La *exposición en grupos* del trabajo realizado, seguida de la *entrega y defensa* de los informes en cada una de las sesiones de los talleres.
- La *entrega individual de un informe global* del «taller».
- La *utilización del dossier* de trabajo sin contenido fijado a priori y redactado en función de la evolución de la problemática tratada, junto con la tarea del «*secretario de la semana*» que se encargaba de sintetizar las cuestiones y respuestas que

habían sido tratadas, semana tras semana, tanto por su propio grupo como por el resto. Este informe semanal debía situar en qué punto se estaba del proceso de estudio, explicitando las cuestiones que habían quedado pendientes de estudiar y a las posibles nuevas cuestiones que se habían planteado.

La incidencia sobre la vida de la modelización matemática de este cambio de contrato es bien clara: el hecho de que los estudiantes asuman estas responsabilidades (aunque sea de forma parcial) facilita las etapas de *producción e interpretación de los conocimientos sobre el sistema* así como el trabajo relativo al *contraste* y *estudio de las limitaciones* de los sucesivos modelos construidos y las relaciones entre ellos. Dada la importancia de estas etapas o fases de la actividad de modelización y la dificultad que muestra el sistema de enseñanza tradicional para hacerlas vivir, se pone de manifiesto una vez más el papel de los REI como dispositivo didáctico que impone condiciones muy favorables para potenciar el papel de la modelización.

Restricciones institucionales a la integración de los REI en la enseñanza universitaria

La aparente facilidad con la que se han podido integrar los REI en la asignatura de matemáticas de primer curso de ingeniería técnica química industrial no debería esconder la aparición de importantes restricciones que han afectado la realización de los REI, modificando así algunas de las funciones que éstos debían asumir.

Situándonos en el nivel genérico de la organización de la enseñanza (*nivel pedagógico*), destacamos el voluntarismo tanto de la profesora del taller como de los estudiantes para trabajar una vez por semana, durante dos horas fuera del horario lectivo. Establecer los REI como una actividad «normalizada» supondría romper con la distribución horaria actual de las asignaturas para poder dar cabida a sesiones de más larga duración, además de crear grupos más pequeños de no más de 20 alumnos. Se comprende así el carácter local de la modificación realizada y la «revolución» que significaría generalizar talleres como los experimentados, con la consiguiente reacción «homeostática»[9] que provocaría en el sistema de enseñanza universitaria.

En relación a las restricciones didácticas que surgen en el *nivel de la disciplina* matemática, se debe observar que el primer REI que hemos descrito en este trabajo, quedó parcialmente «truncado» debido a la necesidad de avanzar al mismo ritmo y tratando contenidos «semejantes» a los que se estudiaban en las clases de teoría y en las clases de problemas. Así, por ejemplo, en ninguna de las experimentaciones se ha podido seguir con el estudio de polinomios interpoladores (a pesar de que ésta era la dirección propuesta por varios grupos de alumnos y constituía una alternativa interesante para responder a la cuestión planteada) porque seguir por este camino hubiese apartado el taller del resto de los dispositivos. Ésta es una restricción que fue aceptada a priori por los profesores de la asignatura y por la propia investigadora puesto que se pretendía vincular tanto como fuese posible la actividad matemática desarrollada en los REI a la programación oficial de la asignatura entregada a los estudiantes a principio de curso.

Si nos centramos en el *reparto de responsabilidades* durante la gestión de los recorridos, tenemos que destacar el cambio enorme que se produjo en comparación con un curso tradicional. Desde el principio, la profesora intentó actuar como una verdadera directora del proceso de estudio, cediendo la máxima autonomía y responsabilidad a los alumnos y negociando explícitamente muchos de los aspectos que suelen quedar implícitos y bajo la responsabilidad exclusiva del profesor: planificación del estudio, tiempo dedicado a cada una de las actividades, selección de las herramientas matemáticas supuestamente apropiadas, uso de herramientas informáticas y bibliográficas, institucionalización de las respuestas parciales, evaluación de los resultados, etc.

A pesar de las reticencias iniciales mostradas por los estudiantes, los cambios introducidos con los REI – trabajo en grupo, formulación de cuestiones, redacción y defensa de los resultados obtenidos en base a las cuestiones estudiadas y las respuestas obtenidas – fueron progresivamente aceptados por éstos. Esta *autonomía asumida por los estudiantes* durante el transcurso de los REI es una condición imprescindible para poder desarrollar la actividad de modelización matemática y, en consecuencia, constituye un resultado importante en relación al problema didáctico abordado.

Señalemos para acabar que la implantación generalizada de los REI en la enseñanza universitaria no debería suponer únicamente un *cambio de la estructura* del sistema de enseñanza universitario –lo que Watzlawich (1974, p. 31) considera como un «cambio de primer orden», cuya única finalidad es, en realidad, la de que «no cambie nada». Al contrario, dicha implantación debería *transformar las funciones* de dicho sistema superando la «ilusión de las alternativas» que se presentan al sentido común y aparecer como un cambio paradójico para la lógica interna del sistema (lo que Watzlawich denomina «cambio de segundo orden»). No es de extrañar, por lo tanto, la existencia de múltiples restricciones, que emergen incluso a *nivel social*, y que dificultan enormemente la implantación generalizada de los REI.

AGRADECIMIENTOS

Trabajo realizado en el marco del proyecto I+D+i EDU2008-02750/EDUC del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

NOTAS

1. Por cuestiones de espacio no describiremos otras posibles propuestas para abordar este problema (enseñanza por proyectos, prácticas y talleres de matemáticas, resolución de problemas, etc.). Diremos únicamente que los REI, al ser una noción situada en una teoría didáctica como la TAD, aparecen estrechamente vinculados a un modelo epistemológico detallado de la estructura y dinámica de la actividad matemática en términos de la ampliación y completación progresivas de praxeologías.
2. En el anexo 1 se incluye el dossier de trabajo que se entregó a los estudiantes en la sesión inaugural del denominado «Taller de modelización matemática».
3. El nombre hace referencia al economista y demógrafo inglés, Thomas Robert Malthus (1766-1834) conocido principalmente por su teoría de poblaciones (Malthus, 1798).
4. En adelante, utilizaremos la palabra «población» para referirnos al número total de individuos o tamaño de la población *X*.

5. La relación descrita en (1.8) se obtiene después de un cambio de variable $N_n = (a / a{+}1) \cdot x_n$. Para seguir con la notación utilizada hasta el momento, seguiremos designando esta nueva variable por x_n.
6. El nombre hace referencia a Pierre François Verhulst (1804-1849) que, en el año 1838, propusa una respuesta a la paradoja maltusiana en forma de ecuación logística.
7. La construcción de M_2 suele requerir bastante tiempo aunque, finalmente, el trabajo ayuda a entender la relación entre el «modelo maltusiano» M_1 con el nuevo modelo M_2: M_1 corresponde al caso particular $K = \mu$.
8. No describiremos el caso $\alpha < 1$ que corresponde a la *extinción de la población*.
9. La homeostasis es la tendencia que tienen algunos sistemas por mantenerse en estado estacionario o de equilibrio dinámico, gracias a determinados mecanismos de retroalimentación. La reacción del sistema a la implantación de los *Talleres de Prácticas Matemáticas* en el Departament de Matemàtiques de la UAB durante los cursos 1991-1998 es una buena ilustración de este fenómeno (Bosch y Gascón, 1994).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. (2001). What can we learn from educational research at the university level?, en Holton, D. (ed.). *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study*, pp. 207-220. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

BARQUERO, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Tesis doctoral. Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona. Versión digital disponible en: http://www.tesisenxarxa.net/TESIS_UAB/AVAILABLE/TDX-0615110-153200/

BLOMHØJ, M. y KJELDSEN, T.H. (2009). Project organised science studies at university level: exemplarity and interdisciplinarity. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 41(1-2), pp. 183-198.

BLUM, W. (2002). ICMI study 14: Applications and modelling in mathematics education – Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 51, pp. 149–171.

BLUM, W. y LEIß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems?, en Haines, C. et al. (eds). *Mathematical Modelling. Education, Engineering and Economics,* pp. 222-231. Chichester, UK: Horwood.

BLUM, W., GALBRAITH, P.L., HENN, H.-W. y NISS, M. (2007). Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study. New ICMI Study Series Volume 10. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 40(2), pp. 337-340.

BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 12(3), pp. 314-332.

BURKHARDT, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), pp. 178-195.

CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège - Deuxième partie: Perspectives curriculaires: la notion de modélisation. *Petit x,* 19, pp. 45-75.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), pp. 221-266.

CHEVALLARD, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire*, APMEP, pp. 239-263.

CHEVALLARD, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education, en Bosch, M. (ed.). *Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4),* pp. 21-30. Barcelona: FUNDEMI-IQS.

CHEVALLARD, Y. (2009). La TAD face au professeur de mathématiques. Toulouse, France. <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162>.

GARCÍA, F. J. (2005). *La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén.

GARCÍA, F., GASCÓN, J., RUÍZ, L. y BOSCH, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education,* 38(3), pp. 226-246.

GASCÓN, J. (1999). Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas, en Ortega, T. (ed.). *Actas del III Simposio de la SEIEM*, pp. 129-150. Valladolid.

GÓMEZ, J.V. (2003). La modelización matemática: una herramienta válida en la enseñanza de las matemáticas universitarias. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 42, pp. 37-46.

GÓMEZ, J. V. y FORTUNY, J. (2002). Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias. *UNO: Revista de didáctica de las matematicas*, 31, pp. 7-23.

HOLTON, D. (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level – An ICMI Study (NEW ICMI STUDY SERIES Volume 7)*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

LACK, D. (1967). *The Natural Regulation of Animal Numbers*. Oxford: Clarendon Press.

MALTHUS, T.R. (1798). *An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society, with Remarks on the Speculations of Mr Godwin, M. Condorcet, and Other Writers (Reprint)*. Londres: Macmillan.

NISS, M. (1989). Aims and Scope of Applications and Modelling in Mathematics Curricula, en Blum, W. y et al. (eds.). *Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics,* pp. 22-31. Chichester, UK: Horwood.

NISS, M. (2001). University mathematics based on problem-oriented students projects: 25 years of experience with the Roskilde Model. En D. Holton, *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study,* pp. 153-165. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

WATZLAWICH, P. (1974). *Cambio*. Barcelona: Herder. (Traducción de Alfredo Guera Miralles).

[Artículo recibido en julio de 2010 y aceptado en diciembre de 2010]

ANEXO 1

Dossier 0 (Unidad introductoria)

ENGINYERIA TÈCNICA QUÍMICA INDUSTRIAL – Fonaments Matemàtics de l'Enginyeria

Taller de Modelització Matemàtica – Curs 2009/2010

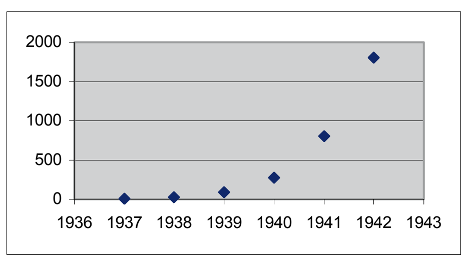
Estudio del crecimiento de una población de faisanes en una isla

Comparando predicción y realidad

Los humanos han introducido muchas especies en nuevos hábitats, por accidente o intencionadamente, para poder estudiar su evolución. Algunas de éstas se han convertido en experimentos ecológicos muy interesantes. Por ejemplo, en 1937 ocho hembras faisán, de la especie *Phasianus colchicus torquatus*, fueron introducidas en una isla protegida delante de la costa del estado de Washington[*]. La isla tenía abundante comida y no vivía en ella ninguna especie predadora. Además, esta isla estaba suficientemente lejos de otras tierras para que los faisanes pudiesen escapar.

En la siguiente tabla, y su correspondiente gráfico, se muestran los datos referentes a la evolución del tamaño de esta población entre los años 1937 y 1942 que se tomaron cada año en el mismo periodo:

Año	Tamaño de la población
1937	8
1938	26
1939	85
1940	274
1941	800
1942	1800



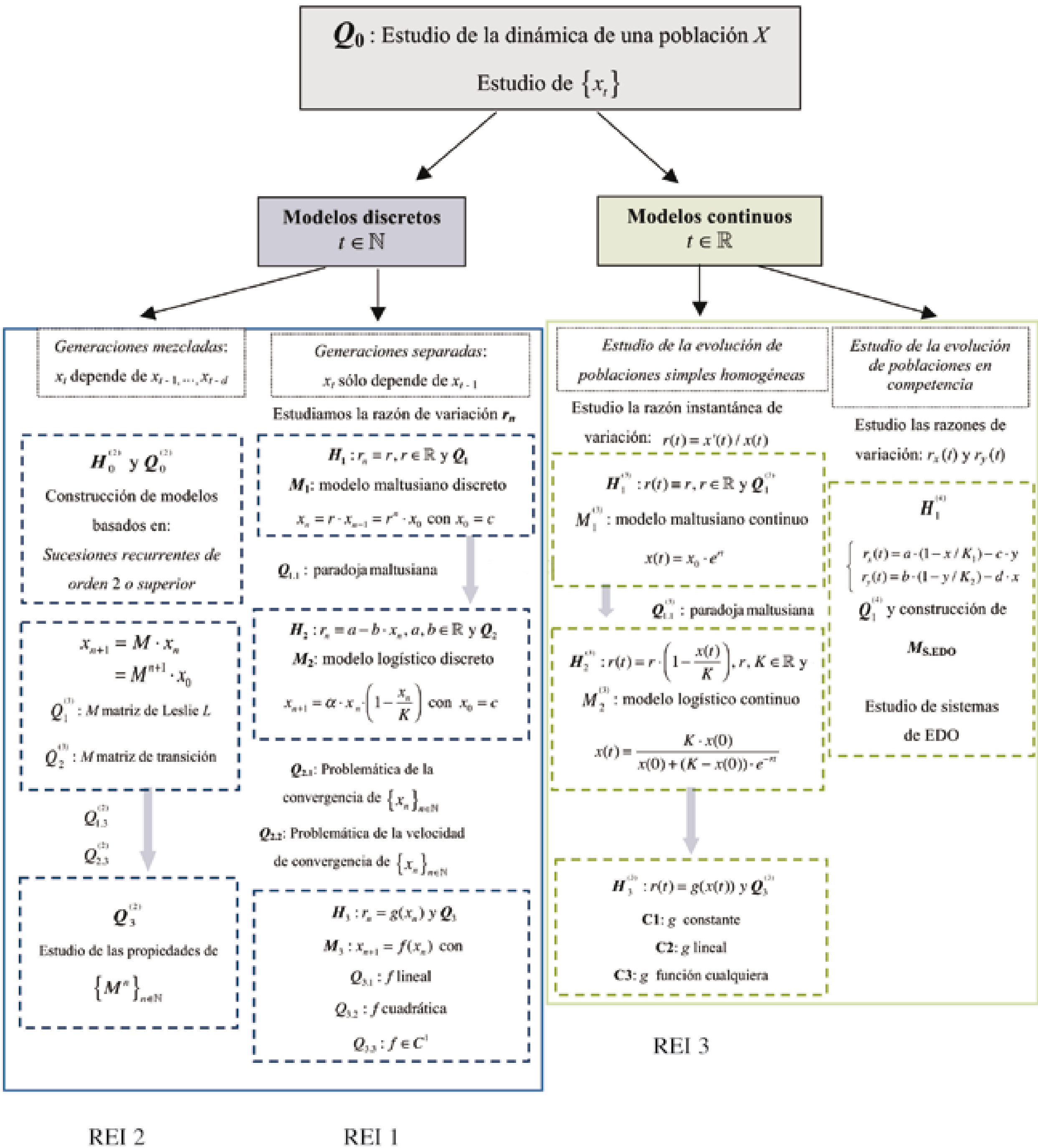
PRINCIPALES CUESTIONES A ESTUDIAR

Dada una población de la que conocemos su tamaño en algunos periodos de tiempo, ¿Podemos predecir cómo evolucionará el tamaño de esta población después de *n* periodos? ¿Será siempre posible predecir el tamaño de la población a largo plazo? ¿Qué tipo de hipótesis sobre el entorno, sobre la población y sobre su crecimiento se pueden asumir? ¿Cómo podemos hacer estas predicciones y cómo las podemos validar?

[*] Lack, D. (1967). *The Natural Regulation of Animal Numbers.* Oxford: Clarendon Press.

ANEXO 2

Esquema de los tres REI experimentados



Study and research courses and mathematical modelling in the natural sciences university teaching

Barquero i Farràs, Berta[1]; Bosch i Casabò, Marianna[2] y Gascón Pérez, Josep[3]
[1] Departamento de Matemáticas. Universitat Autònoma de Barcelona
[2] Universitat Ramon Llull. IQS School of Management, Universitat Ramon Llull
[3] Departamento de Matemáticas. Universitat Autònoma de Barcelona
bertabf@gmail.com
marianna.bosch@iqs.url.edu
gascon@mat.uab.cat

Summary

This paper focuses on the role of mathematical modelling in first-year courses of Natural Sciences university degrees. The didactic problem treated here confronts some important difficulties from 'traditional' university teaching, which regularly creates teaching and learning difficulties due to the 'disconnection' and 'lack of sense' of the mathematical contents taught. This leads us to set forth a first formulation of our research problem: how to avoid the mathematical knowledge taught in the first university courses of Natural Sciences to be reduced to a *set of disconnected concepts and techniques lacking sense*, appearing instead in a *functional way* as a tool to offer answers to *problematic questions* arising in Natural Sciences?

In front of this problem, several authors have proposed a more instrumental approach to Mathematics as a modelling tool. This shared vision suggests a second formulation of our research problem: how can mathematics be taught as a *modelling tool of scientific situations or facts*, in such a way that teaching is not organized depending on the mathematical contents but around the problems or projects that students have to accomplish?

According to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD), which constitutes our conceptual and methodological framework, mathematical modelling cannot be considered as an aspect or modality of mathematical activity but has to be placed at the core of it, 'teaching mathematical modelling thus becoming a synonym of functional teaching of Mathematics'. As a result, the didactic problem of mathematical modelling is formulated in terms of search for new didactic devices, which favours the integration of mathematical modelling in university education. This approach requires studying the necessary conditions for mathematical modelling to 'survive' as 'healthy activities' in this institutional environment and exploring the restrictions hindering the evolution of these activities.

To approach the didactic problem, we propose the design and implementation of a new didactic device, the *Study and Research Courses* (SRC), set forth by the ATD and used here as an 'ideal' didactic organization for integrating mathematical modelling into current teaching systems. One of the main objectives of the proposed SRC is to introduce a new school epistemology that replaces the school paradigm of 'inventorying' knowledge by a paradigm of questioning the world.

The experimental part of our research consists in the design and experimentation of a SRC based on the study of population dynamics for first year students of Natural Science degrees. It was implemented during five academic years with first year students of a technical engineering degree (3-year programme), in the Industrial Chemical Engineering department, at the Universitat Autònoma de Barcelona (UAB). The SRC starts from a generative question Q_0 about population dynamics, which constitutes the thread of the entire learning process. During the nine-month long modelling workshop, the students are asked to produce an answer to this question by constructing different mathematical models. When studying the links between the systems (the growth of a population) and the initial model, new questions appear that can only be addressed through the construction of more comprehensive mathematical models that, in turn, generate new questions. A sequence of successive enlargements of the considered mathematical models is thus built. The complete didactic process experimented shows how the official traditional curriculum of a first university course of Mathematics for Natural Sciences can 'be covered' by means of a small set of SRC all related to the study of different populations growth. It also illustrates how this process helps connect and make functional the different mathematical contents that are programmed in the course.

We can distinguish two important results from our research. First, we show how the proposal of the SRC has made possible to introduce a more 'functional' mathematical activity. In fact, our empirical observations allow us to analyse and specify some necessary conditions and new gestures that affect the 'local' implementation of the SRC and, thus, have an influence on the integration of mathematical modelling in current university teaching. Second, we find that some strong restrictions appear along the process of the 'local' integration of SRC. Hence, a 'large-scale' integration of SRC at university level beyond this local experimentation needs to extend this *ecological study* and consider restrictions that appear at different levels of generality, especially affecting the prevailing way with which Mathematics and its teaching are currently considered in university institutions.