SOLUCIÓN DE PROBLEMAS: UNA REVISIÓN DE LA IMPORTANCIA DEL USO DE HEURÍSTICOS Y UNA EVALUACIÓN DE SU UTILIZACIÓN EN MATEMÁTICAS *

por Salvador ALGARABEL, Carmen DASÍ,
Arcadio GOTOR y Manuel PEREA
Universitat de València

Desde el punto de vista educacional «el problema» es la situación estándar tanto de aprendizaje como de prueba en materias de tipo técnico, como física, química y matemáticas. Sin embargo, y a pesar de ello, la investigación experimental y de laboratorio sobre solución de problemas en el campo de la psicología del razonamiento no ha comenzado a realizarse hasta muy recientemente.

Un punto de partida para llevar a cabo este análisis tiene en cuenta tres aspectos (por ej. Schoenfeld, 1985; Mayer, 1989). Primero, el conocimiento necesario del dominio específico al que se circunscribe el problema. Este conocimiento está organizado de forma jerarquizada y en forma de esquemas, de tal forma que suministra al sujeto experto la tipología de problemas en función de los principios de conocimiento y, a partir de esta tipología, sus soluciones. En segundo lugar, y esto es más discutible, el sujeto experto posee un conjunto de reglas y estrategias, habitualmente llamadas heurísticos, que han sido desarrolladas a través del enfrentamiento con la materia, y que guían en el análisis y búsqueda de soluciones. Por último, también son necesarias una serie de habilidades para poner en juego unos procesos de decisión y plani-

---

* Este trabajo ha sido realizado con ayuda del Programa de Proyectos de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico de la Generalitat Valenciana (GV-2427/94) y con otra del Ministerio de Educación y Ciencia, Subdirección General de Promoción de la Investigación, PS94-0193.

ficación adecuados.

Nadie duda acerca de la necesidad de una estructura de conocimiento adecuada para la solución de un problema. Sin embargo, no todos los investigadores se ponen de acuerdo acerca del rol de los heurísticos en el proceso de solución. Este artículo es el inicio de una investigación con el objetivo de evaluar la importancia de este metaconocimiento en la solución de problemas. Así pues, vamos a revisar brevemente la literatura publicada sobre la efectividad del entrenamiento en heurísticos para la mejora de la habilidad de solución de problemas y, posteriormente, presentaremos una tabla de heurísticos muy utilizados en matemáticas junto con una evaluación llevada a cabo por una serie de licenciados en matemáticas. Desde el punto de vista aplicado, esta evaluación tiene utilidad como guía para la elaboración de un futuro programa de entrenamiento y para la experimentación en el desarrollo de un curso óptimo en este entrenamiento en solución de problemas. En este sentido, la detección del valor diferencial atribuido por expertos a los distintas dimensiones de los heurísticos permitirá determinar aquéllas que manifiestan valores de utilidad más grandes y en las que, por tanto, se debe incidir en mayor grado en un programa de entrenamiento. En cuanto a la experimentación en entrenamiento en solución de problemas, esta primera aproximación ayudará a clarificar extremos relevantes cuya variabilidad deberá tenerse en cuenta como posible determinante del rendimiento.

1. La utilización de heurísticos en el entrenamiento en solución de problemas.

Un heurístico puede definirse como una estrategia de aplicabilidad más allá de un problema concreto, pero específica a un dominio de conocimiento, cuyos efectos, de cara a su solución, no están claramente definidos, aunque puede utilizarse junto con los recursos de conocimiento y capacidades para coadyuvar a la búsqueda de la solución. Más concretamente, de acuerdo con Schoenfeld (1985), «Las estrategias heurísticas son reglas empíricas para la resolución ecertada de problemas, o sugerencias generales que ayudan a una persona a comprender mejor un problema, o a realizar progresos de cara a su solución» (23). Fue el matemático Polya (1957) quien primero llamó la atención sobre la importancia de estas estrategias en la solución de problemas. Polya enmarcaba la solución de problemas en cuatro fases: «Primero, tenemos que comprender el problema, es decir, ver claramente lo que se pide. Segundo, tenemos que captar las relaciones que existen entre los diversos elementos, ver lo que liga la incógnita con los datos a fin de encontrar la idea de la solución y poder trazar un plan. Tercero, poner en ejecución el plan. Cuarto, volver atrás una vez encontrada la solución, revisarla y discutirla» (Polya, 1957, 28). Una vez hecha esta exposición, Polya comenzaba a mostrar de forma socrática cómo estos principios generales se iban concretando con estrategias precisas en problemas específicos, lo que a veces se ha llamado (Lawson, 1990) estrategias específicas del dominio. Polya era matemático y no investigador empírico, por lo que no llevó a cabo ningún tipo de experimentación sobre la eficiencia de estos principios, ni tampoco los estandarizó suficientemente como para ser asumidos por educadores de menos habilidades socráticas. Sin embargo, su influencia ha permanecido y su planteamiento informal de estrategias en el campo de las matemáticas ha llegado hasta hoy día, en donde se ha sistematizado (por ej., Schoenfeld, 1985).

En lo que sigue vamos a centrar esta revisión alrededor de dos puntos: primero, los problemas que plantea la definición del concepto de heurístico y, segundo, los datos experimentales que se han recogido acerca del impacto del entrenamiento en heurísticos sobre la solución de un problema.

Hay que decir que la experimentación llevada a cabo inicialmente sobre la efectividad de los heurísticos en la solución de problemas no era del todo favorable (por ejemplo, Smith, 1973; Kantowski, 1977; y Lucas, 1972). Sin embargo, parte de los problemas que surgieron anteriormente tenían que ver con la definición del concepto de heurístico. En una acepción extendida (por ej., Lawson, 1990), el concepto de heurístico se asimila a estrategia de utilidad en muy diversos campos de conocimiento, por contraposición a un concepto muy específico que sólo tiene aplicabilidad en un campo concreto (para esta distinción véase Sweller, 1989 a). De hecho, el ejemplo prototípico de esta acepción general es lo que se define como heurístico de análisis medios-fines. El análisis medios-fines (por ejemplo, Anderson, 1985) es una estrategia en uso cuando se plantean problemas en los que hay una meta definida, como por ejemplo en álgebra, o en algunos tipos de problemas de física. Consiste en analizar la meta y nuestro estado actual, con el propósito de reducir la diferencia entre ambos por medio de los operadores disponibles. A primera vista el análisis de medios-fines conlleva la utilización, en gran parte de las ocasiones, de un razonamiento hacia atrás, lo que significa que puede aplicarse en ocasiones en las que el conocimiento sobre el dominio es débil. De hecho, algunos estudios (Larkin et al., 1980) han demostrado que la utilización del análisis de medios-fines está muy extendida entre sujetos novatos que intentan la solución de un problema, mientras que los expertos utilizan siempre un enfoque mucho más deductivo, aunque no todos los estudios publicados muestran esta dicotomía (por ej., Zajchowski y Martin, 1993). Esta característica del análisis medios-fines, que podría considerarse como la razón de su amplia aplicabilidad, conlleva un aspecto muy negativo: su ineficiencia como procedimiento de adquisición de conocimiento (Sweller, 1989 b; Sweller, Chandler, Tierney y Cooper, 1990), y ya veremos, posteriormente, que esta función es esencial a todo proceso de resolución de un problema. En definitiva, la estrategia de medios-fines dificulta este proceso de afinado y adquisición de esquemas por una razón psicológicamente importante: el sujeto tiene que mantener en su memoria (Owen y Sweller, 1989; Sweller, 1988; Sweller et al., 1990) una cantidad de información que excede la capacidad de la memoria a corto plazo. Esto es, tiene que mantener los supuestos del problema, la meta, la diferencia existente entre ambos, cualquier submeta momentánea, y los operadores, redirigiendo además la atención a cualquiera de estos aspectos, en vez de centrarlos en los aspectos esenciales del problema. Esto produce una sobrecarga de memoria que es negativa para el proceso de inducción de esquemas, puesto que se elimina toda la fase deductiva que sería la que obligaría a centrarse en los principios importantes del problema. De hecho, cuando se modifican los programas de entrenamiento y se presentan distintas fuentes de información de forma integrada, se mejora sensiblemente la adquisición (por ejemplo, integrando gráficos y texto o ecuaciones), tanto en campos como la geometría (Sweller et al., 1990), como en la estadística (Paas, 1992). En definitiva, tanto el conocimiento organizado esquemáticamente como la utilización de estrategias adecuadas diferencian al experto del novato en cualquier campo (véase también Zajchowski y Martin, 1993), conduciendo a una integración más rápida y adecuada del conocimiento de todas aquellas estrategias que no produzcan una división de la atención y por tanto una sobrecarga de la memoria de trabajo.

En una segunda acepción del concepto de heurístico, èste se precisa y se circunscribe a estrategias de aplicabilidad limitada a dominios de conocimiento específicos. Esta precisión del concepto de heurístico evita alguna de las polémicas fútiles que, recientemente, se han originado en el campo de la educación acerca de la contraposición entre tener conocimientos sobre un dominio específico y la necesidad de complementarlos con un conjunto de heurísticos adecuados al dominio. No cabe duda que la cantidad de conocimiento específico es un determinante primordial en el rendimiento en solución de problemas (por ejemplo, Lawson, 1990; Sweller, 1989 a, 1990), sobre todo cuando este conocimiento se encuentra organizado en forma de esquemas eficientes (por ejemplo, Thorndyke y Hayes-Roth, 1979), pero no es menos cierto que el experto utiliza estos heurísticos, y la lógica —además de los datos que más abajo vamos a ver— nos lleva a pensar que la introducción de los mismos en una fase temprana de la adquisición debe acelerarla.

Cuando se revisa la literatura que investiga el tema en relación con esta segunda acepción, los resultados son más abundantes y algo más claros que en el caso anterior. Estos datos provienen tanto de la investigación aplicada (Lee, 1982; Schoenfeld, 1982) como básica (por ejemplo, Novick y Holyoak, 1991; Reed y Bolstad, 1991).

Schoenfeld (1982), en la línea ya indicada de Polya, llevó a cabo un estudio en el que pretendió evaluar la efectividad en el entrenamiento de la utilización de un pequeño número de heurísticos y de técnicas para la toma de decisiones en el proceso de solución. Su grupo experimental constaba de 11 estudiantes que estaban tomando un curso de cálculo y que discutían y resolvían problemas desde el punto de vista de su proceso de solución, de acuerdo con un pequeño número de heurísticos. Desafortunadamente, este estudio se puede tildar de cuasi-experimental; no existe una igualación adecuada del grupo experimental y control, ni tampoco una evaluación estadística de los resultados, aunque éstos parecían indicar que el grupo experimental mejoraba significativamente respecto al de control. Un estudio similar de Lee (1982), esta vez con niños, mostró, cualitativamente, que en una situación en la que se enseñaba a los niños una serie de heurísticos, adaptados a la edad, también del tipo de los expuestos por Polya, estos mejoraban el rendimiento. Sin embargo, sólo se hizo un análisis cualitativo de los resultados, al igual que en el estudio de Schoenfeld. Mientras que los dos estudios anteriores se sitúan en la línea ortodoxa de Polya, King (1991) estructuró más bien una especie de batería de preguntas estratégicas que había que seguir a la hora de plantear el problema. Los niños sometidos al tratamiento rindieron mejor que aquéllos que no utilizaban ninguna guía en la solución. Resulta, sin embargo, difícil asimilar esta resolución guiada de problemas a lo que habitualmente se entiende como entrenamiento en heurísticos.

Los datos que apoyan más directamente la efectividad del entrenamiento en heurísticos vienen de la investigación básica, y utilizan, como ya hemos indicado, un concepto más restringido de heurístico que queda más circunscrito a una regla de utilidad a un campo concreto de conocimiento. La investigación básica, además, está más centrada en detectar los elementos que contribuyen a la mejora del rendimiento, que a comparaciones entre grupos sometidos a distintos métodos de entrenamiento, por lo que la revisión que sigue se centra en la determinación de estos aspectos, que coadyuvan a la adquisición.

Si examinamos la tabla de heurísticos del apéndice, la sección de «análisis» podría denominarse como búsqueda de soluciones por analogía, por lo que no es extraño que la investigación básica se haya centrado en el estudio de las condiciones que optimizan el razonamiento analógico (Donnelly y McDaniel, 1993; Gick y McGarry, 1992; Novick y Holyoak, 1991; Reed, 1989; Robins y Mayer, 1993). En general, existe un razonamiento analógico, en solución de problemas, cuando la solución y las estrategias puestas en juego para llegar al resultado en un problema fuente se utilizan para llegar a la solución en otro problema meta. En general, se han estudiado cuatro procesos subyacentes al establecimiento de la analogía: recuperación de la información pertinente en relación con el problema original, proyección y reestructuración de esta información en relación con el problema objetivo y, por último, aprendizaje a partir de esta aplicación.

Cuando estos procesos se facilitan explícitamente en la instrucción, el rendimiento mejora. Así, cuando se señala al sujeto la relación entre la información presente y la pasada, éste accede a esta información en la memoria más fácilmente (por ejemplo, Gick y Holyoak, 1980). De igual forma, en el esquema mental del sujeto puede haber tanto información específica como general o abstracta (Bernardo, 1994). Esta confirmación empírica reciente encaja bien con el hecho de que la similaridad superficial entre el problema fuente y el problema objeto facilita la transferencia sólo cuando los datos específicos se encuentran en la representación de la memoria del sujeto (Gick y McGarry, 1992). Por último, hay que tener en cuenta que las fases de proyección y adaptación son fases esenciales en el razonamiento analógico en la resolución de problemas (Novick y Holyoak, 1991), y que, aunque la similaridad interproblemas es esencial en la formación de esquemas, también se necesita la aplicación de principios y reglas generales que suplementen la fase inductiva anterior (Reed, 1989).

Desde un punto de vista más general, y teniendo en cuenta estudios de tipo instruccional, la efectividad del entrenamiento en heurísticos es un hecho bien documentado recientemente, si bien de forma menos analítica que la que hemos estado presentando por medio de la revisión de los estudios de investigación básica. Un estudio metanalítico (Hembree, 1992 a; aunque véanse las críticas: Goldin, 1992, y contracríticas, Hembree, 1992 b), ha recopilado y ofrece datos comparativos sobre la efectividad de tres procedimientos de instrucción en solución de problemas: instrucción en la utilización de un método, entrenamiento en habilidades específicas, y entrenamiento en campos relacionados. El entrenamiento en heurísticos se enmarca en el primer apartado, mientras que en el segundo caso se está hablando de entrenamiento en habilidades tales como entrenamiento en escribir ecuaciones y, en el tercer caso, del efecto del entrenamiento en programación de ordenador. De acuerdo con este estudio metaanalítico, se aprecia que la práctica con problemas tiene un efecto positivo, como no podía ser de otra forma. Además, aquellos estudiantes que reciben entrenamiento en heurísticos tenían una ventaja adicional sobre aquéllos que simplemente practicaban.

En conclusión, de acuerdo con la revisión anterior existen datos que podíamos calificar más bien como de tipo cualitativo, que indican que el entrenamiento en heurísticos específicos puede ser un método instruccional útil para mejorar el rendimiento en solución de problemas. Aunque también se ha intentado evaluar el transfer de esta mejora a otros problemas y otras situaciones (por ejemplo, Schoenfeld, 1982), los resultados aquí son menos concluyentes. A nivel de investigación básica existe un nivel de investigación considerable sobre el razonamiento analógico. Si consideramos este razonamiento analógico como el núcleo de la mayor parte de los heurísticos definidos por Polya, estos resultados apoyan de forma indirecta la utilidad del desarrollo de métodos instruccionales en heurísticos para la solución de problemas.

2. *Evaluación de heurísticos.*

Vista la anterior panorámica general, se presenta seguidamente la evaluación de un conjunto de heurísticos bien contrastados en la literatura experimental y teórica en cuatro campos distintos de las matemáticas. Estos heurísticos se agrupan (véase Schoenfeld, 1985) en tres aspectos del enfoque de un problema: el análisis del planteamiento, la exploración y búsqueda de una solución, y la comprobación de la solución encontrada. La evaluación de estos heurísticos tiene como objeto recabar su utilidad diferencial a partir de los juicios de «expertos» para poder posteriormente utilizarlos en aplicaciones concretas.

2.1 Método

2.1.1 Sujetos

Participaron 41 licenciados en matemáticas, la mayoría de los cuales habían accedido recientemente a su titulación. Estos licenciados participaban en un curso en el que se les explicaban técnicas de estudio y, posteriormente a la realización de esta encuesta, se les dio una panorámica general de la enseñanza de técnicas de solución de problemas. La aplicación de este cuestionario fue anterior a cualquier exposición teórica o práctica asociada con el curso de técnicas de estudio.

2.1.2 Procedimiento

Al comienzo del curso sobre técnicas de estudio y solución de problemas, y sin que los sujetos hubieran recibido ninguna información sobre el mismo, se les pidió que respondieran a un cuestionario en el que se solicitaba su opinión sobre diversos factores tales como los aspectos que consideraban más difíciles de estudiar durante su carrera, su posible utilización de técnicas de memoria para mejorar la retención, y la utilización de heurísticos en distintos campos de las matemáticas. En el presente trabajo sólo se presentarán datos sobre la evaluación de heurísticos. Las instrucciones en relación con la sección de heurísticos era: «Como sabes, el matemático experto utiliza una serie de mecanismos muy diversos para resolver problemas. Parte de ellos son estrategias generales, alguna de las cuales se enumeran a continuación. En relación con estas estrategias, evalúa su utilidad para resolver problemas en: (álgebra lineal, o geometría, o cálculo diferencial e integral, o estadística, según corresponda)».

La tabla de heurísticos que se dio a evaluar se ha hecho clásica y proviene en forma definitiva de Schoenfeld (1985), aunque su origen hay que situarlo en los trabajos del matemático Polya (1957), que fue presentando de forma no sistemática muchas de estas técnicas en su libro «Cómo plantear y resolver problemas». Previamente al paso del cuestionario se explicó a los sujetos el significado del término heurístico, puesto que éste a veces no se utiliza con el mismo significado con que se hace en el campo de la solución de problemas.

2.1.3 Diseño

La tabla de heurísticos que se incluye en el Apéndice 1, fue presentada a los sujetos repetidamente para ser evaluada en los cuatro campos ya mencionados: álgebra lineal, geometría, cálculo diferencial, y estadística. El sujeto emitía una respuesta sobre una escala de cinco puntos, en la que 1 representaba una utilización nula de ese heurístico en el campo concreto, y 5 representaba una utilización generalizada. Los datos de este tipo se representan adecuadamente por una escala de orden, por lo que el tratamiento estadístico se ha adecuado a esta característica. Además, dado que los mismos sujetos evaluaban las distintas materias (cálculo, álgebra...), se han tratado éstas como valores de una variable intrasujeto. El resultado es un diseño de tipo intrasujeto tratado ordinalmente con las pruebas ji-cuadrado de Friedman, para las comparaciones que implican varios grupos, y T de Wilcoxon, para las comparaciones entre pares.

2.2 Resultados

Puesto que se trata de un acercamiento exploratorio se ha realizado un análisis detenido y jerarquizado de diversas posibles comparaciones, procediendo de unas más generales a otras más específicas en la utilización de los heurísticos en los siguientes campos de matemáticas: álgebra, cálculo diferencial, estadística, y geometría. La tabla de heurísticos así como los resultados para cada uno de ellos, presentados como promedios de rangos directos que tienen como valor superior 5, se ofrecen en el Apéndice 1. Por su parte, las gráficas que se presentan seguidamente, se realizan sobre el promedio de rangos de la prueba de Friedman, cuyo valor máximo es 4, al ser cuatro los campos de comparación.

2.2.1 Comparación general

Primeramente se obtuvo el promedio de cada sujeto en su juicio sobre todos los ítems de los heurísticos, para cada uno de los campos de matemáticas evaluados. Si bien esto es una medida muy general y gruesa, permite comparar en conjunto la valoración que cada sujeto hace de la utilidad de los heurísticos en dependencia de la materia.

GRÁFICA 1ª: *Consideración general de los heurísticos en su conjunto*

Los resultados muestran, ver gráfica 1, una valoración diferencial significativa de la utilidad general de los heurísticos (χ_r^2 (3) de Friedman = 11,7, p<0,0085), la valoración de la utilidad es menor en álgebra que en estadística y geometría y en cálculo diferencial menor que en Geometría (p<0,05, T de Wilcoxon, en ambos casos). En este sentido parece que hay dos bloques. Por un lado, geometría y estadística y, por el otro, álgebra y cálculo diferencial. Cabe decir que, particularmente, la geometría hace uso amplio de diagramas y utilización de relaciones simétricas, que se recogen fielmente en la tabla de heurísticos y se reflejan en las evaluaciones.

2.2.2 Análisis

Igualmente, los heurísticos generales del apartado de análisis se promediaron según el mismo procedimiento. Sus resultados se muestran en la gráfica 2. Se aprecia, en este caso que el juicio de los sujetos sobre la diferente utilidad de los heurísticos es también muy acusado y las diferencias significativas (χ_r^2 (3) de Friedman = 24,46, p<0,0001).

GRÁFICA 2ª: *Consideración global de los heurísticos de Análisis*

También aquí la utilización de los heurísticos en el caso del álgebra frente a estadística y geometría, y en el caso del cálculo diferencial frente a geometría es valorada como significativamente menor ($p<0,01$, T de Wilcoxon, en ambos casos).

El primer ítem del apartado de análisis se refiere a la utilización de dibujo de diagramas. Las diferencias, que se presentan en la gráfica 3, apuntan en la dirección de su mayor utilidad en estadística y geometría y son claramente significativas (χ^2_r (3) de Friedman = 27,88, $p<0,0001$).

GRÁFICA 3ª: *Heurístico de Análisis referido a la representación diagramática*

En este caso, como en los anteriores, se mantiene una menor valoración de los heurísticos en álgebra y cálculo frente a estadística y geometría ($p<0,003$, T de Wilcoxon, en todo caso).

La valoración de los heurísticos se equilibra cuando se trata de examinar casos especiales (ítem 2 de análisis). Las diferencias entre materias que se presentan en la gráfica 4 no son significativas (χ_r^2 (3) de Friedman = 5,07, p<0,167).

GRÁFICA 4ª: *Heurístico de Análisis referido al examen de casos especiales*

No obstante, se valora más positivamente el uso de heurísticos de este tipo en estadística que en álgebra (p<0,04, T de Wilcoxon).

El último heurístico del apartado de análisis se refiere al intento de ejemplificar el problema. Los resultados se presentan en la gráfica 5. Las diferencias que allí se observan son significativas (χ_r^2 (3) de Friedman = 10,78, p<0,013).

GRÁFICA 5ª: *Heurístico de Análisis referido a la ejemplificación del problema*

Efectivamente, este heurístico es más valorado por los sujetos en su aplicación a la materia de geometría frente al cálculo ($p<0,03$, T de Wilcoxon), pero, sobre todo, frente a estadística ($p<0,004$, T de Wilcoxon), materias estas donde recibe una valoración significativamente menor.

2.2.3 Exploración

El segundo grupo de heurísticos re refiere a la exploración. En la gráfica 6 se presentan los resultados de comparar las cuatro materias en los promedios de todos los heurísticos que se integran en este apartado.

GRÁFICA 6ª: *Consideración global de los heurísticos de Exploración*

Las diferencias que se observan entre materias se presentan a simple vista como menores y, evidentemente, no alcanzan el nivel de significación previsto (χ^2_r (3) de Friedman = 3,88, p<0,275). Tampoco las comparaciones entre pares de materias resultaron significativas. En términos generales la exploración es valorada de modo semejante en las diversas materias.

El primer heurístico del apartado exploración se refiere a la consideración de problemas esencialmente equivalentes.

Los resultados se presentan en la gráfica 7 y permiten apreciar que la valoración de este heurístico es muy semejante en todas las materias y, evidentemente, las diferencias que se presentan son meramente aleatorias (χ^2_r (3) de Friedman = 0,82, p<0,8437). Ninguna comparación uno a uno resultó significativa

GRÁFICA 7ª: *Heurístico de Exploración referido a problemas esencialmente equivalentes*

Tampoco se presentan diferencias significativas (χ^2_r (3) de Friedman = 4,86, p<0,1826) entre materias cuando se trata del heurístico 'considera los problemas ligeramente modificados', aunque en este caso, como se puede apreciar en la gráfica 8, la diferencia entre cálculo diferencial y estadística se aproxima al nivel de significación (p=0,058, T de Wilcoxon).

GRÁFICA 8ª: *Heurístico de Exploración referido a problemas modificados ligeramente*

La consideración de 'los problemas ampliamente modificados', el tercer heurístico del apartado Exploración, cuyos resultados se ofrecen en la gráfica 9, tampoco presenta diferencias significativas (χ_r^2 (3) de Friedman = 2,63, p<0,4529) al comparar el conjunto de materias.

GRÁFICA 9ª: *Heurístico de Exploración referido a problemas modificados ampliamente*

A pesar de estas pequeñas diferencias la comparación de álgebra con estadística alcanza el nivel de significación previsto (p=0,0245, T de Wilcoxon) con una valoración más favorable de este heurístico en la materia estadística.

2.2.4 Verificación de la solución

El tercer grupo de heurísticos hace referencia a la verificación de la solución.

En este caso las diferencias ya se hacen patentes en la aproximación general, como puede apreciarse en los resultados que se muestran en la gráfica 10.

GRÁFICA 10ª: *Consideración global de los heurísticos de Verificación*

Estas diferencias son significativas (χ_r^2 (3) de Friedman = 14,51, p<0,0023) y más generalizadas. La utilización de heurísticos de verificación es menos valorada en álgebra tanto cuando se la compara con estadística (p=0,0026, T de Wilcoxon) como cuando se la compara con geometría (p=0,0029, T de Wilcoxon).

Una reproducción de los resultados generales se presenta en el estudio de cada uno de los heurísticos de verificación.

El heurístico primero de verificación se refiere a las pruebas específicas que pasa una solución. Los resultados para las distintas materias se muestran en la gráfica 11, las diferencias que ahí se aprecian son significativas (χ_r^2 (3) de Friedman = 11,53, p<0,0092). Las comparaciones uno a uno aclararan el significado de esas diferencias, para este heurístico se da una mayor valoración de su utilidad en las materias de estadística (p=0,0006, T de Wilcoxon) y geometría (p=0,0191, T de Wilcoxon) frente a álgebra y, en menor grado, pero también de forma significativa al comparar estadística (p=0,0487, T de Wilcoxon) frente a cálculo diferencial.

GRÁFICA 11ª: *Heurístico de Verificación referido a pruebas específicas que pasa la solución*

Item	**vF**	**pF**	**AD**	**AE**	**AG**	**DE**	**DG**	**EG**
a2a	20,8	0,01	#	0,01	0,05	0,01	0,01	#
a2b	4,95	0,18	#	0,05	#	#	#	#
a2c	1,38	0,71	#	#	#	#	#	#
a3a	9,56	0,02	#	#	0,01	#	0,03	0,01
a3b	6,22	0,1	#	#	#	#	#	0,05
b1a	2,84	0,42	#	#	#	#	#	#
b1b	2,45	0,48	#	#	#	#	#	#
b1c	5,82	0,01	#	#	#	#	#	#
b1da	2,46	0,48	#	#	#	#	#	#
b1db	12,6	0,01	0,05	0,01	#	#	#	0,01
b1dc	0,26	0,97	#	#	#	#	#	#
b2a	3	0,39	#	#	#	#	#	#
b2b	10,6	0,01	#	0,05	#	0,01	#	#
b2c	1,01	0,8	#	#	#	#	#	#
b3a	2,92	0,4	#	#	#	0,04	#	#
b3b	13,4	0,01	0	0,01	#	#	0,02	#
b3ca	5,7	0,13	#	#	#	#	#	#
b3cb	3,44	0,33	#	#	#	#	#	#
b3cc	6,39	0,09	#	#	#	#	#	#
c1a	2,94	0,4	#	#	#	#	#	#
c1b	13,7	0,01	#	0,01	0,02	0,04	#	#
c1c	8,74	0,03	#	0,05	#	#	#	#
c2a	8,75	0,03	0,02	#	0,01	#	#	#
c2b	7,31	0,06	#	0,02	0,03	#	#	#
c2c	1,64	0,65	#	#	#	#	#	#
c2d	5,71	0,13	#	#	#	0,05	#	#

Finalmente, el último heurístico de verificación se refiere a las pruebas generales que pasa una solución. La gráfica 12 presenta los resultados, en ellos que se aprecia una fuerte igualdad entre materias, si se excluye álgebra que ofrece un valor más reducido, no obstante, las diferencias globales no son significativas, (χ_r^2 (3) de Friedman = 5,05, p<0,1681).

GRÁFICA 12ª: *Heurístico de Verificación referido a pruebas generales que pasa la solución*

Las comparaciones uno a uno de las materias confirman la visión intuitiva que ofrece la gráfica, la valoración que se hace de la utilidad de este heurístico desde álgebra es significativamente menor que la que se hace desde geometría, estadística y calculo diferencial ($p=0,05$, T de Wilcoxon en todo caso).

Finalmente, de modo complementario se presenta, en la Tabla 1, un detallado análisis de la significatividad de los ítems individuales, donde la primera letra se refiere al apartado general (a= ANÁLISIS, b= EXPLORACIÓN y c= VERIFICACIÓN) el número se refiere al ítem general dentro del apartado y la otras letras a los ítems concretos dentro del general. Además, las columnas de la tabla indican vF, valor del estadístico de Friedman, pF, valor de probabilidad asociado al mencionado estadístico, AD, AE..., son comparaciones uno a uno entre álgebra, diferencial, estadística y geometría , en el cuerpo se indican los valores de probabilidad cuando son significativos (para T de Wilcoxon) asociados a la comparación de que se trate.

TABLA 1ª: *Análisis de la significatividad de los ítems individuales*

3. *Conclusiones*

La primera conclusión general apunta a que nuestros sujetos valoran diferencialmente la utilización de heurísticos en función del campo de que se trate. Tentativamente se puede afirmar que ven menor utilidad, comparativamente hablando, en los heurísticos aplicados a álgebra y cálculo diferencial que cuando se aplican a estadística y geometría.

La segunda conclusión plausible apunta que nuestros sujetos aplican la utilidad de los heurísticos de forma diferencial a los distintos tres aspectos del enfoque de un problema: el análisis del planteamiento, la exploración y búsqueda de una solución, y la comprobación de la solución encontrada. De modo general, los aspectos relacionados con el análisis del planteamiento y los relacionados con la comprobación son más susceptibles de producir diferencias significativas, por tanto, son diferencias en la valoración de la utilidad, entre los distintos campos, mientras que en el aspecto referido a la exploración y búsqueda de una solución la valoración de la utilidad de los heurísticos es más homogénea entre los diversos campos. Curiosamente, este aspecto de la división de heurísticos es la más relacionada con los aspectos esenciales del razonamiento analógico. En la introducción se indicaba que en éste se producen tres fases: recuperación de la información fuente, proyección y reestructuración de esta información con la presente, e inducción de esquema a partir del resultado (aprendizaje). La mayoría de los heurísticos a evaluar se centran en estos dos primeros aspectos del razonamiento analógico, y esto es común a cualquier rama de las matemáticas o de la ciencia en general. Por lo tanto, resulta lógico que no existan diferencias de evaluación de los heurísticos en relación con los distintos dominios de conocimiento.

Conclusiones más específicas señalan que la valoración de los heurísticos como más útiles en el cálculo diferencial que en álgebra aparecen principalmente en la comprobación de la solución y, en concreto, referido al uso de test generales. Mientras que la valoración de una mayor utilidad de los heurísticos en geometría que en estadística se corresponde con el análisis del planteamiento y, en concreto, al referirse a la ejemplificación del problema.

Es importante que la valoración de expertos introduzca matices diferenciales en la utilidad de los heurísticos en relación con campos diferenciados dentro de la matemática. Ello alienta a plantear estudios sobre la utilidad de entrenar en actividades heurísticas, además de lo que es el propio aprendizaje de conocimientos. Sin embargo, este entrenamiento será mucho más útil y mejor planificado si se tienen en cuenta tanto los datos de la investigación básica como aplicada. Aquélla acostumbra a ser mucho más analítica, como se ha demostrado en la revisión de la introducción. Por ello, la planificación de un curso de entrenamiento en heurísticos debe tenerlos en cuenta, puesto que no siempre los datos globales, por las condiciones difíciles en que se obtienen, tienen la contundencia necesaria, y aquéllos marcan el camino por dónde debe orientarse la investigación general educativa.

Dirección de los autores: Salvador Algarabel. Área de Metodología, Facultad de Psicología. Av. Blasco Ibáñez, 21. 46010-Valencia. e-mail: Salvador.Algarabel@uv.es y Arcadio Gotor. Dpto. Psicología Básica, Facultad de Psicología. Av. Blasco Ibáñez, 21. 46010-Valencia. e-mail: Arcadio.Gotor@uv.es

Fecha de recepción de la versión definitiva de este artículo: 20.III.1996

BIBLIOGRAFÍA

ANDERSON, J. (1985) *Cognitive Psychology* (San Francisco, Freeman).

BERNARDO, A. B. I. (1994) Problem-specific information and the development of problem-type schemata, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition,* 20, pp. 379-395.

DONNEELLY, C. M. y MCDANIEL, M. A. (1993) Use of analogy in learning scientific concepts, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition,* 19, pp. 975-987.

GICK, M. L. y HOLYOAK, K. (1980) Analogical problem solving, *Cognitive Psychology*, 12, pp. 306-355.

GICK, M. L. y MCGARRY, S. J. (1992) Learning from mistakes: Inducing analogous solution failures to a source problem produces later successes in analogical transfer, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition,* 18, pp. 623-639.

GOLDIN, G. A. (1992) Meta-analysis of problem-solving studies: A critical response, *Journal for Research in Mathematics Education,* 23, pp. 274-283.

HEMBREE, R. (1992a) Experiments and relational studies in problem solving: A Meta-Analysis, *Journal for Research in Mathematics Education,* 23, pp. 242-273.

HEMBREE, R. (1992b) Meta-Analysis of problem-solving studies: A critical response, *Journal for Research in Mathematics Education,* 23, pp. 284-289

KANTOWSKI, M. G. (1977) Processes involved in mathematical problem solving, *Journal for Research in Mathematics Education*, 8, pp. 163-180.

KING, A. (1991) Effects of training in strategic questioning on children's problem-solving performance, *Journal of Educational Psychology*, 83, pp. 307-317.

LARKIN, J.; MCDERMOTT, J.; SIMON, D. y SIMON, H. (1980) Expert and novice performance in solving physics problems, *Science,* 208, pp. 1335-1342.

LAWSON, M. J. (1990). The case for instruction in the use of general problem-solving strategies in mathematics teaching: A comment on Owen and Sweller, *Journal for Research on Mathematical Education,* 20, pp. 401-410.

LEE, K. S. (1982) Fourth graders' heuristic problem-solving behavior, *Journal for Research in Mathematical Education,* 13, pp. 110-123.

LUCAS, J. F. (1972) *An exploratory study on the diagnostic teaching of heuristic problem solving strategies in calculus*. Dissertation Abstract International, 6825-A (University microfilms No 72-15, 368).

MAYER, R. E. (1989) Introduction to the special section, *Journal of Educational Psychology,* 81, pp. 452-456.

NOVICK, L. R. y HOLYOAK, K. J. (1991) Mathematical Problem solving by analogy, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition,* 17, pp. 398-415.

OWEN, E. y SWELLER, J (1989) Should problem solving be used as a learning device in Mathematics?, *Journal for Research in Mathematics Education,* 20, pp. 322-328.

PAAS, F. G. W. C. (1992) Training strategies for attaining transfer of problem-solving skill in Statistics: A cognitive-load approach, *Journal of Educational Psychology*, 84, pp. 429-434.

POLYA, G. (1957) *How to solve it* (Princeton, N. J.: Princeton University Press) (ref. de la 14ª reimpresión española 1987: *Cómo plantear y resolver problemas*. México, Trillas).

REED, S. K. (1989) Constraints on the abstraction of solutions, *Journal of Educational Psychology,* 81, pp. 532-540.

REED, S. K. y BOLSTAD, CH. A. (1991) Use of examples and procedures in problem solving, *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory and Cognition,* 17, pp. 753-766.

ROBINS, S. y MAYER, R. E. (1993) Schema training in analogical reasoning, *Journal of Educational Psychology,* 85, pp. 529-538

SCHOENFELD, A. H. (1982) Measures of problem-solving performance and of problem-solving instruction, *Journal for Research in Mathematical Education*, 13, pp. 31-49.

SCHOENFELD, A. H. (1985) *Mathematical Problem Solving* (San Diego, Cal, Academic Press).

SMITH, J. P. (1973) *The effects of general versus specific heuristics in mathematical problem solving tasks*. Dissertation Abstracts International, 2400-A (University Microfilms No. 73-26, 637).

SWELLER, J. (1988) Cognitive load during problem solving: Effects on learning, *Cognitive Science*, 12, pp. 257-285.

SWELLER, J. (1989a) On the limited evidence for the effectiveness of teaching general problem-solving strategies, *Journal for Research on Mathematical Education*, 1989, 30, pp. 411-415.

SWELLER, J. (1989b) Cognitive Technolgy: Some procedures for facilitating learning and problem solving in Mathematics and Science, *Journal of Educational Psychology*, 81, pp. 457-466.

SWELLER, J.; CHANDLER, P.; TIERNEY, P. y COOPER, M. (1990) Cognitive load as a factor in the structuring of technical material, *Journal of Experimental Psychology: General,* 119, pp. 176-192.

THORNDYKE, P.W. y HAYES-ROTH, B. (1979) The use of schemata in the acquisition and transfer of knowledge, *Cognitive-Psychology*, 11, pp. 82-106.

ZAJCHOWSKI, R. y MARTIN, J. (1993) Differences in the problem solving of stronger and weaker novices in Physics: Knowledge, strategies, or knowledge structure?, *Journal of Research in Science Teaching,* 30, pp. 459-470.

SUMMARY: PROBLEM SOLVING: A REVIEW OF THE IMPORTANCE OF HEURISTICS USE, AND AN ASSESMENT OF THEIR USEFULNESS IN MATHEMATICS.

A heuristics is a strategy, sometimes not very well structured, whose purpose is to help to find a problem solution. In the present paper, a group of mathematicians rated a set of heuristics rules for their usefulness in four fields: Geometry, differential calculus, algebra and statistics. The heuristics are structured in three groups: those associated with the analysis of the problem; those associated with the search for a solution, and those asociated to the checking of the solution. Results may be taken as a guide for the design of a training course in problem solving.

KEY WORDS: Heuristics, Problem-solving.

APÉNDICE 1: *Tabla de heurísticos con sus respectivos valores de rango promediados para las materias analizadas*

	Álg	Geo	CálD	Est
A.- ANÁLISIS				
a1.- Dibujar un diagrama, si es posible	3,00	4,03	3,30	3,95
a2.- Examinar casos especiales:				
a2a.- Tantear el problema con valores extremos para ejemplificarlo y tantearlo..	3,41	3,73	3,30	3,93
a2b.- Examinar casos límites para explorar el rango de posibilidades.	3,24	3,43	3,40	3,65
a2c.- Igualar cualquier entero a 1, 2, 3,...., en secuencia y buscar un patrón inductivo..	3,15	3,13	3,20	3,23
a3.- Intentar ejemplificar el problema:				
a3a.- Haciendo uso de la simetría..	3,05	3,60	3,08	2,98
a3b.- Haciendo uso de argumentos «sin pérdida de generalidad» (incluyendo el escalado)..	3,34	3,31	3,13	2,90
B.- EXPLORACIÓN				
b1.- Considera problemas esencialmente equivalentes:				