Universitat de Barcelona. Institut de Ciències de l'Educació

REIRE Revista d'Innovació i Recerca en Educació

www.reire.edu

<Article>

Elogi de la visualització: l'aprenentatge del pensament visual en matemàtiques

Claudi Alsina

Data de presentació: 04/09/2009
Data d'acceptació: 30/09/2009
Data de publicació: 28/10/2009

//Resum

En l'educació matemàtica de tots els nivells es distingeixen quatre tipologies de visualització: il•lustracions, materials, grafs / diagrames i imatges geomètriques. S'analitzarà, a la llum dels mitjans visualitzadors actuals i dels resultats en aquest camp de la recerca educativa, el rol central que les imatges geomètriques poden jugar en el desenvolupament del pensament visual avançat. S'analitzarà, també, com afavorir el pensament visual a través d'aprendre les pròpies tècniques d'elaborar aquests tipus d'imatges.

//Mots Clau

Visualització, tipologies visuals, pensament visual.

//Referència recomanada

Alsina, C. (2009) Elogi de la visualització: l'aprenentatge del pensament visual en matemàtiques. *Revista d'Innovació i Recerca en Educació*, 3 (2):13-20. Consulta: mes día, any, a: http://www.raco.cat/index.php/REIRE

// Dades autor

Claudi Alsina; Catedràtic de matemàtiques UPC; claudio.alsina@upc.edu

1. Introducció

Ja l'any 1611, el pintor i arquitecte Lodovico Cardi (1559-1613), més conegut pel sobrenom de Cigoli, va escriure en una carta a Galileo Galilei (1569-1642):

> «Un matemàtic, per molt bo que sigui, sense el suport de bons dibuixos no és res més que un mig matemàtic, però també és aleshores un home sense ulls.»

El tema de la visualització en matemàtiques té una llarga tradició disciplinària, però en les darreres dècades s'ha donat una atenció especial al rol que els processos de visualització podrien jugar en l'aprenentatge de les matemàtiques. Sovint, però, hi ha certes confusions i ambigüitats en les referències a «visualització» (ZDM, 1994; Zimmerman i Cunningham, 1991). L'objectiu d'aquest article és partir de quatre tipologies de representacions, aclarir-ne la naturalesa i perspectiva sota l'actual desenvolupament tecnològic i, aleshores, a la llum de les moltes recerques fetes sobre el tema, exposar breument quines són les visualitzacions que més poden contribuir al desenvolupament d'un pensament visual avançat. (Senechal, 1991; Arnheim, 1969; Hendricks et al., 2003; Davis, 1993).

2. Les múltiples representacions en matemàtiques

Des dels seus vells inicis, les matemàtiques sempre han combinat llenguatges diferents: un llenguatge natural per descriure objectes i arguments amb paraules; un llenguatge de símbols per agilitzar l'operativa i la resolució de problemes; un llenguatge numèric lligat a l'ús dels nombres (comptar, ordenar, comparar, mesurar, calcular, resoldre...) i el llenguatge visual de les imatges.

En l'imaginari matemàtic es poden distingir aleshores diverses categories entre les quals destacarem quatre:

(i) Il•lustracions:

Són fotografies, mapes, dibuixos, etc., que complementen el discurs i ajuden a identificar formes i objectes, aclarir nomenclatures...

(ii) Materials manipulatius:

Es tracta d'objectes tangibles didàctics o de disseny quotidià, la manipulació dels quals resulta explicativa d'un fet (transformació, mesura,...) o dóna peu a determinades activitats (jocs, taulers, daus...).

(iii) Grafs i diagrames:

Són esquemes gràfics que representen relacions, dependències, seqüenciacions, mapes conceptuals, croquis, icones, etc. En aquesta categoria, es troben els grafs pròpiament dits i en particular els gràfics funcionals o estadístics. Per a una interessant aproximació de la història dels gràfics vegeu Tufte (1990 i 1997).

(iv) Gràfics geomètrics:

Són tot tipus de figures en 2D o de 3D representades en 2D (vegeu, per exemple Alsina i Nelsen, 2006).

Un mínim de sentit comú evidencia que cal usar a la vegada totes aquestes categories visuals, anar de l'una a l'altra, comparar-ne les conveniències i veure'n les limitacions.

3. Sobre els mitjans actuals de visualització

Una característica de l'inici del segle XXI és el triomf de la tecnologia visual i comunicativa. Mai com ara havíem gaudit de tants instruments petits, potents i assequibles per facilitar l'ús de les tecnologies visuals a classe. Els ordinadors i els canons de projecció, l'accés a les bases visuals d'Internet, els webs, les bases de miniaplicacions (*applets*), el programari per crear imatges 2D i 3D, les pissarres electròniques, les potents calculadores gràfiques... Els estris hi són. Però cal fer-ne un ús eficient. Sobre això voldríem fer tres consideracions pragmàtiques:

a) L'ús dels diversos maquinaris i programaris és, en si mateix, un valor afegit en la formació de qui els usa. Només amb experiències consolidades dels recursos d'avui podrem aspirar que la gent estigui preparada per usar els recursos nous que en el futur existiran. L'educació no pot menysprear aquesta aposta.

b) Les diverses categories visuals s'han de tenir en compte i seria un error caure en la fidelització d'un tipus. Per exemple, les visualitzacions 3D interactives de darrera generació no podran mai eliminar (o no haurien de fer-ho) la imprescindible etapa de manipular materials. És molt espectacular i seductor veure com es fa girar un cub virtual a la pantalla de l'ordinador, però descobrir que un cub té onze desenvolupaments plans, que calen pestanyes per muntar-lo, que el cub construït fa ombres diverses, que el cub de filferro submergit en aigua i sabó presenta interessants superfícies mínimes distribuïdes a l'interior, com es pot muntar el cub Soma, etc., són experiències per fer en viu i en directe. En aquest sentit, cal reivindicar l'esperit montessorià i no confondre la representació plana amb la vivència tridimensional. El cine no és el teatre. I el teatre no és la vida quotidiana.

Ho va expressar clarament el gran matemàtic Henri Poincaré (vegeu Alsina i Nelsen, 2009):

c) «Hi ha dues maneres d'ensenyar fraccions. O dividiu, de manera virtual, un pastís o talleu una poma. Amb totes les altres metodologies els estudiants continuaran sumant numeradors i sumant denominadors.»

d) En un moment de digitalització com l'actual, en què els llibres de text tradicionals aniran deixant pas a llibres electrònics i, atès el desori de les sempre canviants possibilitats tecnològiques, el paper del guiatge educatiu esdevindrà cada cop més central. S'imposa una estricta selecció marcada pels objectius educatius i no pas per l'oferta visual. Mana el fet d'entendre, no la galeria d'imatges.

La cooperació entre ensenyants ha de permetre que aquesta tasca de selecció sigui col•lectivament profitosa i no esdevingui una tasca individual desbordant. Les associacions de professorat, els serveis informàtics educatius de l'administració i les associacions lligades a les Tecnologies de la Informaciò i la Comunicaciò –TIC- (com el cas de la dedicada a l'ús del Geogebra a Catalunya) poden fer un gran servei.

4. Recerques sobre l'aprenentatge visual

Les recerques educatives que en les darreres dècades han abordat en profunditat el tema de l'aprenentatge visual de les matemàtiques han estat nombroses (Murphy, 2006) en els diversos nivells (Gardner, 1983; Armstrong, 1994; Davis, 2005). Tothom sembla coincidir en l'interès de la visualització com a component de l'aprenentatge per desenvolupar les competències de saber representar, saber usar llenguatges diversos, apreciar connexions i, el que és més important, la visualització en relació amb l'argumentació, la comunicació i el raonament (Rowan i Bourne, 1994).

Però també és clar (Goodman, 1976) que la visualització no és un simple complement facilitador de determinats aprenentatges (operar, moure, transformar, reconèixer patrons, etc.), sinó que les mateixes tècniques de visualització han de ser apreses i practicades i, només aleshores, cal esperar que la visualització aporti el valor afegit d'una entesa més àmplia de fets matemàtics i un nivell més alt del pensament visual. Moltes recerques educatives (vegeu, per exemple, els treballs citats a Craine i Rubenstein, 2009) mostren que si no es fa una tasca acurada amb l'ús d'imatges en matemàtiques, els estudiants no aprecien ni la necessitat de les justificacions ni tan sols quines imatges són vàlides o generals. És a dir, és provat que sense una atenció adequada a les visualitzacions, aquestes poden crear confusions. Tenim, doncs, ben coneguts els paranys del tema, els reptes i allò que cal evitar. Ara és temps d'actuar en positiu.

5. Tècniques de visualització i pensament visual avançat

M'atreviria a fer una semblança de l'aprenentatge visual amb la resolució de problemes. Resoldre problemes és un gran motor educatiu en matemàtiques, però a partir d'un moment mereixen ser abordats a classe els «mètodes de resoldre problemes» per tal de poder abordar qüestions més complexes i dominar tècniques alternatives de resolució. El mèrit no és entrenar-se a fer *exercicis* sinó ser capaç de *resoldre problemes* (Pólya, 1954 i 1981). També en la visualització el mèrit no és fer una gràfica d'una funció o una foto d'un monument cilíndric, sinó disposar de metodologies per modelitzar o resoldre situacions més ambicioses i, en definitiva, per desenvolupar solucions creatives visuals.

En els darrers anys, hem estat treballant amb Roger B. Nelsen una aproximació sistemàtica a la visualització matemàtica (Nelsen, 1993 i 2000). Els principis generals es troben a Alsina i Nelsen (2006) i una aplicació al cas de visualitzar desigualtats es dóna a Alsina i Nelsen (2009).

La clau per afavorir el desenvolupament del pensament visual avançat en el final de l'etapa de secundària i primers cursos d'universitat és, tal com hem esmentat abans, posar els mateixos processos de visualització en primer terme i explicar els processos de manera sistemàtica. Sense aquesta tasca sistemàtica, s'enfronta amb el perill que les visualitzacions semblin idees felices o imatges genials quan el que es tracta és que els estudiants disposin d'una col·lecció prou àmplia de recursos per abordar amb èxits nous reptes. Citem com a tècniques essencials les cinc següents (detalls a Alsina i Nelsen, 2006):

(i) Representació de nombres naturals per col•leccions discretes d'elements gràfics repetits disposats segons determinades figures.

(ii) Representació de nombres positius com a longituds, àrees i volums (2D o 3D) amb aplicació del principi d'additivitat en dissecions alternatives.

(iii) Aplicació de transformacions geomètriques (girs, translacions, simetries, semblances, perspectives, conservació de mesures, etc.) a determinades figures per deduir-ne les propietats geomètriques.

(iv) Generació de mosaics amb lectures alternatives de les repeticions fetes i tècniques de coloració.

(v) Representacions de 3D en 2D i de 2D en 3D per treballar a la vegada el pla, l'espai i les seves relacions.

Aquests processos permeten oferir les denominades demostracions sense paraules (*proofs without words*) que fan accessibles sense càlculs algebraics la immensa majoria de propietats bàsiques, en base a saber veure (i no sols mirar) les característiques de les imatges.

El fet crucial que la visualització permeti treballar les demostracions, basant els arguments en imatges, és rellevant (NCTM, 2000) per aprendre a argumentar i veure la necessitat de justificar fets. Però el que acaba de culminar aquest procés és el fet que les descripcions visuals fan entendre millor (Hanna i Jahnke, 1966; Lakatos, 1976) la naturalesa de les propietats, capir en un nivell de pensament avançat no sols el com, sinó el perquè d'una determinada cosa (Rotman, 1998; Rav, 1999; Mason, 2004; Hersh, 1993). Posem un exemple: seguint la clàssica demostració d'Euclides del teorema de Pitàgores o el mètode de Pappus, la seqüència de dibuixos mostra com sumar paral•lelograms sobre els costats d'un triangle: es van transformant en paral•lelograms amb la mateixa àrea i finalment en un paral•lelogram suma. A Loomis (1983) es donen desenes de proves del famós teorema pitagòric, però aquesta vella demostració de Pappus no sols justifica la propietat pitagòrica, sinó que posa en evidència de quina manera cada peça sobre un costat contribueix a omplir el paral•lelogram suma. De passada, apareixen transformacions que conserven les àrees i projeccions.

6. Conclusions

La visualització en l'aprenentatge de les matemàtiques és un repte actual i l'ensenyament de les seves tècniques pot resultar tan profitós com en la resolució de problemes ho és parlar dels mètodes generals a l'abast. Les demostracions en matemàtiques que facin entendre millor el que prediquen es poden recuperar gràcies a la visualització. I tot plegat, al servei de millorar el pensament visual.

<Referències bibliogràfiques i per ampliar>

Alsina, C.; Nelsen, R.B. (2006). *Math Made Visual: Creating Images for Understanding Mathematics*. Washington: Mathematical Association of America.

Alsina, C.; Nelsen, R.B. (2009). *When Less is More. Visualizing Basic Inequalities.* Washington: Mathematical Association of America.

Armstrong, T. (1994). *Multiple Intelligences in the Classroom.* Association for Supervision and Curriculum Development (ASCD).

Arnheim, R. (1969). *Visual Thinking*. Nova York: Faber & Faber.

Craiven, T.V.; Rubenstein, R. (Eds.) (2009). *Understanding Geometry for a Changing World*, Reston: NCTM.

Davis, P.J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 333-344.

Gardner, H. (1983). *Frames of Mind: The Theory of Multiple Intelligences*. Nova York: Basic Books.

Goodman, N. (1976). *Languages of Art: An Approach to a Theory of Symbols*. Oxford: Oxford University Press.

Hanna, G., Jahnke, H.N. (1996). Proof and proving. A A.J. Bishop et al. (Eds) *International Handbook of Mathematics Education*, Dordrecht: Kluwer, pp. 877-908.

Hendricks, V.F. et al. (Eds.) (2003). *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 389-399.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations.* Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Laspina, J.A. (1998). *The Visual Turn and the Transformation of the Textbook*. Nova York: Lawrence Erlbaum Associates.

Loomis, E.S. (1969). *The Pythagorean Proposition.* Washington: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Malkevitch, J. (Ed.) (1991). *Geometry's Future.* Lexington: COMAP.

Mason, J. H. (2004). *Mathematics Teaching Practice. A Guide for University and College Lectures*, Chichester: Horwood Pub.

Murphy, S.J. (2006). Pictures + Words + Math = Story. *Book Links*. Volume 16, núm. 2. (November), 34–35.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics Inc.

Nelsen, R.B. (1993). *Proofs without Words: Exercises in Visual Thinking,* Washington: Mathematical Association of America (Proyecto Sur, Granada, 2001).

Nelsen, R. B. (2000). *Proofs without Words II: More Exercises in Visual Thinking.* Washington: Mathematical Association of America.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics.* Vol. I, Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1981). *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning and Teaching Problem Solving* (2 vols., combined ed.) New York: John Wiley & Sons.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 7 volume 3, 5-41.

Rotman, J. (1998). *Journey into Mathematics: An Introduction to Proofs*. New York: Prentice Hall.

Senechal, M. (1991). Visualization and visual thinking, in: *Geometry's Future,* J. Malkevitch, ed., pp. 15-22.

Tufte, E. R. (1990). *Envisioning Information*. Cheschire: Graphics Press.

Tufte, E. R. (1997). *Visual Explanations: Images and Quantities, Evidence and Narrative.* Cheschire: Graphics Press.

ZDM (1994). *Analyses: Visualization in Mathematics and Didactics of Mathematics,* Vol. 1, Karlsruhe: ZDM.

Zimmermann, W.; Cunningham, E. (Eds.) (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Notes 19, Washington: Mathematical Association of America.