suma+ 59
Noviembre 2008, pp.129-134

Las fracciones de la música

Tal vez sea la música la matemática del sentimiento
y la matemática la música de la razón

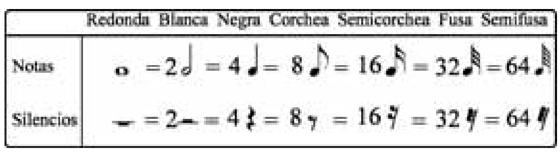
Pedro Puig Adam (1900-1960)

Analizar las proporciones numéricas que aparecen en la Música no resulta una idea original. Basta con hacer una búsqueda en *internet* de “música y fracciones” o “música y proporciones” para darse cuenta de la cantidad de autores que han escrito cosas muy interesantes al respecto. Buena parte de estas aportaciones se centran en las proporciones que aparecen en las distintas maneras de afinar, en las escalas o en la propia estética de las composiciones. Por esta razón, en esta sección no intentaremos abordar estos temas, sino que trataremos de proporcionar material e ideas para que podáis adaptarlas al aula.

La gran cantidad de situaciones en las que el músico está utilizando las fracciones, hace prácticamente imposible hacer una descripción exhaustiva. Por eso, nos conformaremos con presentar el uso de fracciones que rigen la duración de las notas musicales y las que afectan a la altura de los sonidos, ya sea en las notas de la partitura o en la elección de los mismos. Esto significa que, por el momento, no trataremos las proporciones que surgen del hecho de escuchar varios sonidos simultáneamente o de las que rigen los diferentes efectos que busca el compositor.

Las fracciones y los tiempos del pentagrama

Desde las primeras lecciones de música, el estudiante comienza, normalmente de forma inconsciente, un ejercicio de aritmética de fracciones sin el que sería imposible interpretar el pentagrama. Las figuras con las que se escriben las notas musicales guardan entre sí una relación que viene dada por potencias de 2. Así, las notas y sus respectivos silencios, verifican las equivalencias siguientes:



Se toma como unidad la redonda y en este caso, el músico cuenta con las siguientes partes de redonda para hacer las composiciones:

$$N = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}\right\}$$

Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

Aparece así una relación directa con las fracciones que, no obstante, no es la primera que aparece en la partitura. Antes de las figuras, en el pentagrama aparecen la clave (que indica el lugar en el que se sitúa una nota concreta), la armadura (que advierte sobre las notas que deben interpretarse con alteraciones) y el compás. Éste se expresa normalmente con una fracción cuyo denominador expresa cuál es la figura que se utiliza como unidad de tiempo y el numerador expresa cuántas de estas figuras completan cada una de las divisiones del tiempo en que se distribuye la música. Por ejemplo, en el pentagrama siguiente, el compás de 2/4 indica que la unidad rítmica es la negra, 1/4 de redonda, y que la música está dividida en partes iguales, *compases*, que se completan con 2 negras.

Pentagrama 1

Cada uno de los compases estará formado por fracciones del conjunto N cuya suma sea[1] 2/4. Por ejemplo, en los cuatro compases del Pentagrama 1, aparecen las siguientes formas de sumar 2/4:

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

Carolina Bertó y Jorge Sanz, estudiantes de Música interpretando un fragmento que incorpora series de fracciones y notación musical habitual.

Pero, en lo que respecta a medir los tiempos, las operaciones que hacen los músicos no se reducen a la suma de fracciones. En ocasiones, las duración de las figuras se alarga como ocurre con el *dosillo*, que hace que dos notas del mismo tipo ocupen el tiempo de tres notas de ese tipo, o se acorten. Ejemplos de esta última opción son el *tresillo,* el *cuatrillo,* que están formados por un grupo de tres y cuatro notas del mismo tipo, respectivamente, y realmente deben interpretarse en el tiempo ocupado por dos y tres notas de este tipo, respectivamente, o el *cinquillo* y el *seisillo*, formados por cinco y seis notas que en ambos casos ocupan el lugar de cuatro notas. Estas modificaciones se expresan mediante un número que indica el efecto y un corchete que abarca las notas afectadas. Veámoslo en un pentagrama:

Pentagrama 2

Aparece un tresillo, que afecta tres corcheas, y un cinquillo formado por cinco semicorcheas. Por tanto, la manera de sumar 2/4 en los tres compases del pentagrama es la siguiente:

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{4}+\frac{4}{5}\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)=$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$$

De acuerdo con esto, resultaría más sencillo definir el dosillo, tresillo, etc. advirtiendo que el valor de las notas afectadas debe multiplicarse por una de las fracciones siguientes:

DOSILLO	TRESILLO	CUATRILLO	CINQUILLO	SEISILLO
3/2	2/3	3/4	4/5	4/6

Pero, sin duda, esta forma de definirlos no resultaría cómoda para los profesores de música, sobre todo porque el estudiante de Música, muchas veces conoce el tresillo antes de conocer las fracciones.

Las proporciones y la altura de las notas

Si centramos nuestro interés en la altura de las notas, de nuevo aparecen las proporciones y las operaciones con fracciones.

Las frecuencias de las notas que forman parte de la octava se obtienen multiplicando una frecuencia fijada f por números que están en el intervalo [1, 2[. A estas notas se les llama *sistema de afinación* o simplemente *afinación.* Desde luego, la forma de elegir los sonidos afinados no es única y, de hecho, en la orquesta clásica conviven varias afinaciones diferentes (Goldáraz Gaínza (2004), Liern (2005)). De entre éstas, nos quedaremos con dos: el temperamento igual de doce notas, que es la afinación que se utiliza como patrón en prácticamente toda la música occidental, y la afinación pitagórica, en la que continúan afinando los instrumentos de cuerda sin trastes.

Si partimos de la nota Do, con f = 264.6265 Hz, para obtener las notas del sistema temperado o doce notas de la afinación pitagórica, basta con multiplicar f por las fracciones o potencias que aparecen en la tabla siguiente:

	Do	Do$^{\#}$	Re	Mi^{b}	Mi	Fa	Fa$^{\#}$	Sol	Sol$^{\#}$	La	Si^{b}	Si
12 NOTAS PITAGÓRICAS	1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$
TEMPERAMENTO IGUAL	1	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$	$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$

Teniendo en cuenta esto, un instrumento que afina en el sistema pitagórico, al interpretar el Pentagrama 2 produce la siguiente serie de notas:

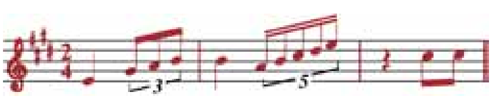
$$f, \frac{81}{64}f, \frac{4}{3}f, \frac{3}{2}f; \quad \frac{3}{2}f, \frac{4}{3}f, \frac{3}{2}f, \frac{27}{16}f, \frac{243}{128}f, 2f; \quad 0f, \frac{27}{16}f, \frac{27}{16}f$$

Sin embargo, para los instrumentos que afinan en el sistema temperado, la serie sería la siguiente:

$$f, 2^{\frac{4}{12}}f, 2^{\frac{5}{12}}f, 2^{\frac{7}{12}}f; 2^{\frac{7}{12}}f, 2^{\frac{5}{12}}f, 2^{\frac{7}{12}}f, 2^{\frac{9}{12}}f, 2^{\frac{11}{12}}f, 2f;$$
$$0f, 2^{\frac{9}{12}}f, 2^{\frac{9}{12}}f$$

Aunque el intérprete no tenga necesidad de pensarlo, de nuevo en la propia esencia de las notas vuelven a aparecer las fracciones. Pero este hecho aún se hace más patente cuando el músico se encuentra con que tiene que interpretar la música a una altura diferente de la original, por ejemplo cuando forma parte de un grupo instrumental o acompaña a algún cantante. Esto significa que debe subir o bajar cada nota de la partitura original un intervalo fijo. Este efecto se conoce como *transporte* o *transposición*.

Como un intervalo musical es un cociente entre las frecuencias de dos notas musicales, desde el punto de vista matemático, la transposición no es más que la multiplicación por una fracción. Por ejemplo, si queremos subir las notas que aparecen en el Pentagrama 2 una tercera mayor[2] (intervalo que se da entre las notas Do y Mi), el músico interpretará lo siguiente:



Pentagrama 3

Lo que ha hecho el músico es multiplicar las frecuencias de las notas que aparecen en el Pentagrama 2 por la fracción

$$\frac{\textit{frecuencia del mi}}{\textit{frecuendia del do}}$$

que en el caso de la afinación pitagórica es 81/64 y en el del sistema temperado $2^{1/3}$. Por lo tanto, para la afinación pitagórica tendremos la serie:

$$\frac{81}{64}\left[f, \frac{81}{64}f, \frac{4}{3}f, \frac{3}{2}f; \frac{3}{2}f, \frac{4}{3}f, \frac{3}{2}f, \frac{27}{16}f, \frac{243}{128}f, 2f; \quad 0f, \frac{27}{16}f, \frac{27}{16}f\right]$$

y para el sistema temperado, la serie estaría formada por:

$$2^{\frac{1}{3}}\left[\begin{array}{l} f, 2^{\frac{4}{12}}f, 2^{\frac{5}{12}}f, 2^{\frac{7}{12}}f; 2^{\frac{7}{12}}f, 2^{\frac{5}{12}}f, 2^{\frac{7}{12}}f, 2^{\frac{9}{12}}f, 2^{\frac{11}{12}}f, 2f; \\ 0f, 2^{\frac{9}{12}}f, 2^{\frac{9}{12}}f \end{array}\right]$$

La solución a un problema secular: las fracciones continuas

De entre todas las formas de elegir los sonidos afinados, nos quedaremos con la más antigua: la afinación pitagórica. Este sistema de afinación puede describirse de la forma siguiente:

> **Afinación pitagórica**: Dada una frecuencia f, que consideramos como nota patrón, estará afinada cualquier nota que se obtenga subiendo o bajando f cualquier número de quintas justas, es decir las que sean de la forma $f\,(3/2)^n$, siendo n un número entero.

En general, cuando se describe una afinación, se divide el conjunto de las frecuencias audibles en subconjuntos que tienen una octava de amplitud, es decir

$$[2^n f,\ 2^{n+1} f\,[, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Con esto, si analizamos el intervalo $[f, 2f\,[$, para saber lo que ocurre en el resto de intervalos basta con multiplicar por una potencia de 2 adecuada. Por esta razón se habla del número de notas afinadas que hay en una octava. Y los cálculos aún se pueden simplificar más si hacemos f =1.

Con lo dicho, la afinación pitagórica está formada por los sonidos $(3/2)^n$ transportados a la octava [1, 2[. Para este transporte no hay más que dividir $(3/2)^n$ por una potencia de 2 adecuada, de modo que se verifique:

$$1 \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{1}{2^k} < 2, \quad n, k \in Z$$

En esta desigualdad, para cada valor *n*, el valor de *k* está determinado unívocamente. Basta multiplicar por 2^k y tomar logaritmos en base 2 para obtener las inecuaciones siguientes:

$$2^k \leq \left(\frac{3}{2}\right)^n < 2^{k+1} \rightarrow k \leq \log_2\left(\frac{3}{2}\right)^n < k+1$$

Ahora bien, como *k* es un número entero, se trata de la parte entera por defecto de $\log_2(3/2)^n$, es decir $k = E[n\log_2(3/2)]$. Así, podemos expresar la afinación pitagórica con la sucesión siguiente:

Afinación pitagórica: $a_n = 2^{n\log_2(3/2) - E[n\log_2(3/2)]}, n \in Z$

La gran cantidad de situaciones en las que el músico está utilizando las fracciones, hace prácticamente imposible hacer una descripción exhaustiva

Planteando el problema

Tal y como la hemos descrito, en la afinación pitagórica aparecen infinitas notas en una octava. Sin duda, esto haría que no pudiese utilizarse en la práctica. A lo largo de muchos siglos, los musicólogos han tratado de fijar cuál debería ser el número óptimo de notas en una octava. Esto significa que para llegar al consenso de que sean doce las notas que utiliza la mayoría de la música occidental a partir del siglo XVIII, ha habido muchos intentos fallidos (Goldáraz Gaínza (2004)). Y la solución, como podíais esperar, estaba en las fracciones.

Si conseguimos aproximar $\log_2(3/2)$ por una fracción irreducible *p/q*, los términos de esta sucesión aparecen repetidos a partir de *q*, es decir

$$a_0 = a_q,\ a_1 = a_{q+1}, \ldots$$

por tanto, si aceptamos la aproximación, sólo son necesarias *q* notas por octava:

$$\{a_n\}_{n=0}^{q-1}$$

Pero, además de reducir las notas a una cantidad finita, debemos asegurarnos de que están bien distribuidas. Sabemos que la fracción que elegimos para aproximar a $\log_2(3/2)$ marca la cantidad de notas en una octava, pero al reducir toda la afinación a *q* notas, no debemos pasar por alto ninguna cantidad de notas que, siendo menor que *q*, aproxime mejor a $\log_2(3/2)$.

A continuación veremos que estas condiciones son las que se consiguen con las fracciones continuas.

NOTA: El razonamiento que hemos seguido para la afinación pitagórica sigue siendo válido para cualquier afinación que esté generada por un sólo intervalo. Por ejemplo, en el temperamento mesotónico de 1/4 de coma, generado por la quinta $\sqrt[4]{5}$, deberíamos aproximar $\log_2\left(\sqrt[4]{5}\right)$ por una fracción continua.

Fracciones continuas simples

A partir de que en el siglo XVIII[3] se estableciesen las bases teóricas de las fracciones continuas, han sido muchos sus campos de aplicación dentro y fuera de las Matemáticas (Redondo Buitrago, Haro Delicado, 2005). A esto se añade que son fáciles de calcular. De hecho, las fracciones continuas, hasta no hace demasiado tiempo, formaban parte de los programas oficiales de Matemáticas de enseñanza secundaria, especialmente de los de Formación Profesional.

Una fracción continua (simple) es una expresión de la forma siguiente:

$$c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 \ldots}}$$

donde los números c_i, $i \geq 1$ son números enteros positivos

En realidad, las fracciones continuas son una sucesión de números racionales, llamados convergentes, que se obtienen de la forma siguiente:

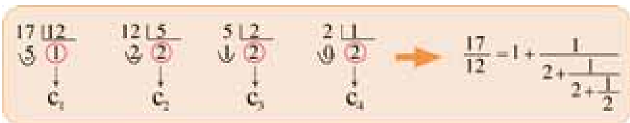
$$\frac{n_1}{d_1} = c_1,\ \frac{n_2}{d_2} = c_1 + \frac{1}{c_2},\ \frac{n_3}{c_3} = c_1 + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3}}, \ldots$$

Esta sucesión converge a un número real α que queda determinado por la fracción continua, y la forma con la que los convergentes van aproximándose a α es alternativamente por defecto y por exceso, es decir

$$\frac{n_1}{d_1} < \frac{n_3}{d_3} < \ldots \leq \alpha \leq \ldots < \frac{n_4}{d_4} < \frac{n_2}{d_2}$$

Pero a nosotros, lo que nos va a interesar es que cualquier número real tiene asociada una fracción continua que será finita o infinita, dependiendo de que el número sea racional o irracional, respectivamente.

Veamos en un ejemplo cómo se calculan estas fracciones. Para obtener la fracción continua de 17/12, no hay más que hacer divisiones sucesivas de la forma siguiente:



Los convergentes son los siguientes:

$$1 < \frac{7}{5} < \frac{17}{12} \leq \frac{17}{12} < \frac{3}{2}$$

Cuando hay muchos convergentes, en lugar de calcularlos operando directamente con fracciones, se suelen obtener por recurrencia mediante las siguientes fórmulas (Ivorra (2006)):

$$\frac{n_1}{d_1} = \frac{c_1}{1},\ \frac{n_2}{d_2} = \frac{n_1 c_2 + 1}{c_2},\ \frac{n_i}{d_i} = \frac{n_{i-1} c_i + n_{i-2}}{d_{i-1} c_i + d_{i-2}},\ \ i \geq 3$$

Entre las muchas propiedades de las fracciones continuas, para nosotros será fundamental la siguiente (Baker, (1984), Ivorra (2006)):

> **Propiedad:** Dado n_i/d_i un convergente de la fracción continua del número real positivo α, cualquier fracción a/b de manera que
>
> $$\left|\frac{a}{b} - \alpha\right| < \left|\frac{n_i}{d_i} - \alpha\right|$$
>
> verifica que $d_i < b$

Es decir , que si una fracción a/b aproxima a α mejor que un convergente, su denominador b debe ser mayor que el denominador del convergente.

La solución a dos problemas

En primer lugar, calculamos algunos convergentes de la fracción continua asociada a $\log_2(3/2)$. Esto puede hacerse, bien con la ayuda de alguna aplicación informática como MATHEMATICA® o bien dando un valor aproximado de $\log_2(3/2)$ y tratándolo como un número racional. Por ejemplo, podemos suponer que

$$\log_2(3/2) \approx 0.5849625$$

En cualquier caso, los 10 primeros convergentes de su fracción continua son los siguientes:

$$1 < \frac{1}{2} < \mathbf{\frac{7}{12}} < \frac{31}{53} < \frac{389}{665} < \ldots < \log_2\left(\frac{3}{2}\right) < \ldots < \frac{9126}{15601} < \frac{179}{306} < \frac{24}{41} < \frac{3}{5} < 1$$

El denominador de cada uno de los convergentes nos indica cuál es el número de notas por octava para una cierta precisión. Por ejemplo, como 5 notas resultan insuficientes, se recurre a 12 notas por octava. Esta es la razón matemática por la que casi toda la música actual utiliza doce notas. Si quisiéramos mayor precisión deberíamos recurrir 41, 53, etc., pero estas divisiones son poco habituales en la práctica.

...para llegar al consenso de que sean doce las notas que utiliza la mayoría de la música occidental a partir del siglo XVIII, ha habido muchos intentos fallidos. Y la solución, como podíais esperar, estaba en las fracciones.

La ventaja de haber utilizado fracciones continuas es que tenemos garantizado (por la Propiedad) que cualquier valor intermedio entre dos denominadores de los convergentes no mejoraría la aproximación a la quinta justa, porque si n_i/d_i es un convergente, no existe ninguna fracción p/q con $q < d_i$ que verifique

$$\left|\frac{p}{q} - \log_2\left(\frac{3}{2}\right)\right| < \left|\frac{n_i}{d_i} - \log_2\left(\frac{3}{2}\right)\right|$$

Queda así zanjada la cuestión de encontrar un número óptimo de notas por octava.

Pero aún se puede ir más allá. Si nos quedamos con 12 notas, la aproximación a $\log_2(3/2)$ es 7/12. Con esto, si en la expresión de la afinación pitagórica sustituimos el logaritmo por su valor aproximado, obtenemos

$$\left\{2^{n\frac{7}{12}-E\left[n\frac{7}{12}\right]}\right\}_{n=0}^{11}=\left\{2^{\frac{n}{12}}\right\}_{n=0}^{11}$$

y éste es exactamente el sistema de afinación que utiliza en la gran mayoría de la música occidental: el temperamento igual de doce notas.

MUSYMÁTICAS ■

NOTAS

[1] No conviene simplificar la fracción que expresa el compás porque, a pesar de que dos fracciones equivalentes representan la misma duración, rítmicamente no responden a la misma realidad. Por ejemplo, el compás de 3/4 está formado por tres tiempos y cada uno de ellos lo ocupa una negra, mientras que el compás de 6/8 tiene seis tiempos y cada uno está ocupado por una corchea.

[2] Las denominaciones de los distintos intervalos pueden encontrarse, por ejemplo, en Randel (1999) o en:

http://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo_musical#Tipos_de_intervalos

[3] El origen de las fracciones continuas se remonta a Euclides (siglo III a. C.) quien estudió por primera vez este tipo de fracciones en el Libro 8 de los Elementos. En la Edad Moderna la teoría fue retomada por Bombelli, en su libro L'Algebra parte maggiore dell' aritmética, Bolonia 1572, en donde se utilizan fracciones continuas para calcular raíces cuadradas. Posteriormente, Leonhard Euler en De fractionibus continuis, 1737, dio los primeros pasos en la teoría, tal como se conoce en la actualidad. Finalmente, fue Joseph Louis Lagrange quien en 1768 formalizó esta teoría en su memoria Solution d'un problème d'arithmétique.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKER, A. (1996): *Breve introducción a la teoría de números*, Alianza Editorial, Madrid.

GOLDÁRAZ GAÍNZA, J. J. (2004): *Afinación y temperamentos históricos*, Alianza Editorial, Madrid.

HALL, R. W., JOSIC, K. (2001): "The Mathematics of Musical Instruments", *The American Mathematical Mothly 150*, pp. 347-357.

LIERN, V. (2005): "Fuzzy tuning systems: the mathematics of musicians", *Fuzzy Sets and Systems 150*, pp. 35-52.

RANDEL, D. (1999): *Diccionario Harvard de música*, Alianza Editorial, Madrid.

REDONDO BUITRAGO, A., HARO DELICADO, M. J. (2005): "Fracciones continuas, números metálicos y sucesiones generalizadas de Fibonacci", *Suma 50*, pp. 53-63.

Internet

BENSON, D. (2007): Mathematics and Music,

http://www.maths.abdn.ac.uk/~bensondj/html/maths-music.html
http://es.wikipedia.org/wiki/Dosillo
http://es.wikipedia.org/wiki/Intervalo_musical#Tipos_de_intervalos

IVORRA, C. (2006): Teoría de números,

http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Numeros.pdf