suma+ 59
Noviembre 2008, pp. 31-42

Taller matemático de costura

El origen del Taller Matemático de Costura *fue los trabajos que solía hacer de pequeño en el colegio con cartón e hilo, así que decidí ponerme a hacer algo parecido con mis propios alumnos. Hemos combinado* Matemáticas *y el* Arte de coser *para llegar a ver cómo con la combinación de segmentos rectilíneos se obtiene la envolvente de ciertas figuras matemáticas como cónicas, epicicloides e hipocicloides. Las composiciones han sido hechas sobre madera con agujeros o puntas e hilos. Se ha diseñado una página web interactiva con Geogebra en la que se puede elegir diversos patrones y ver como se construyen paso a paso.*

The origin of this mathematical sewing workshop are the works I used to do at school, so I decided to start working on this with my own students. We have combined maths *with* the art of sewing beatiful mathematical patterns*. Our aim is to show how through the combination of straight segments of thread we can get the envelope of certain mathematical figures, such as conics, epicycloids and hypocycloids. Most of the compositions have been made on a wooden board with holes and thread. A web application has been created with GeoGebra where you can choose any of the 21 designs and see how to carry it out step by step.*

Introducción

Las pasadas Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas celebradas en Albacete (JAEM 2005), además de servir para contactar con muchos compañeros a los que solo se ve en eventos de este tipo y asistir a actividades formativas como conferencias, ponencias, talleres etc., me permitieron sacar diversas ideas para trabajar con los alumnos en esos momentos en que las actividades lectivas y la familia nos dejan.

Tanto el stand de la editorial británica Tarquin Publications como el zoco "Paraboloides" me hicieron recordar aquellos trabajos de pretecnología que hacía de pequeño en los Padres Escolapios de Logroño. ¡Quién me iba a decir que los trabajos hechos sobre tablerillo con puntas e hilo nos proporcionaban las gráficas de parábolas, elipses, cardioides, etc.!

Con el paso del tiempo la idea se fue difuminando hasta que la convocatoria de Divulgaciencia'07 realizada por la Fundación CajaRioja para conmemorar el Año de la Ciencia, ha subvencionado el proyecto y permitido poner en marcha un Taller en el que hemos desarrollado todas las composiciones que veremos más adelante.

El trabajo ha sido realizado por un equipo formado por cuatro alumnos de segundo de E.S.O. actuando un servidor como coordinador. Por un lado hemos utilizado tablas, puntas e hilo para hacer la parte manual; por otra, papel y boli para comprobar al estilo de la vieja escuela las fórmulas; y, en tercer lugar, el ordenador, que todo lo sabe y es más seguro y rápido que nosotros, para realizar las composiciones.

En la Exposición itinerante Divulgaciencia'07, que ha recorrido toda La Rioja desde el mes de noviembre de 2007 a abril de 2008, se han presentado las composiciones planteadas sobre madera, cartón u otros soportes con la ayuda de puntas e hilos de colores, un dossier con todo el material elaborado y un equipo informático con la aplicación diseñada al efecto.

Para llegar a este punto hemos pasado por diversos pasos intermedios como es conocer las diversas figuras mediante su definición como lugares geométricos y ver dónde se encuentran a nuestro alrededor. Así mismo, se ha hecho el desarrollo matemático que demuestra cómo las composiciones realizadas son la envolvente de las rectas tangentes a determinadas figuras.

Javier Garraleta Espinosa
IES Inventor Cosme García, Logroño
David Acha Herrera, Cristina Barrio Saralegui, Alodia Rodríguez Nájera y Guillermo Sáez Quintanilla
IES Esteban M. Villegas, Nájera

Como es posible que dé pereza ponerse manos a la obra para hacer las composiciones, se ha diseñado también una aplicación web que permite, mediante el uso del software libre Geogebra, construir cada figura. La aplicación se puede ver en http://perso.wanadoo.es/jgalarreta/index.htm y es necesario tener instalado el motor de Java.

Está claro que las matemáticas a primera vista no son tan espectaculares como otras ciencias experimentales pero, en este caso, han resultado agradables a la vista como se ha podido comprobar en la Exposición Divulgaciencia'07 donde el trabajo ha sido merecedor de uno de los premios de la convocatoria que daba derecho a visitar la agencia espacial europea en Noordwich (Holanda).

Cabe mostrar en este momento el cariño y afecto a nuestro compañero Carlos Usón, alma máter de Divulgaciencia junto a Carmen Arnedo, ya que sufrió un accidente en el viaje a Holanda al salir de París hacia Ámsterdam.

A continuación mostramos el contenido del taller aderezado con unas fotos de las distintas composiciones.

Cónicas

La circunferencia, elipse, parábola e hipérbola son curvas con las que estamos familiarizados. El descubrimiento de estas curvas llamadas cónicas es atribuido a Menecmo (350 a.C.) y su estudio detallado a Apolonio (262-190 a.C.). El nombre de cónicas es debido a que se obtienen como intersección de un doble cono con un plano.

La Parábola

¿Qué es una parábola y dónde puedo encontrarla?

El diccionario nos da como primera acepción de parábola, que es la narración de un suceso fingido, de que se deduce, por comparación o semejanza, una verdad importante o una enseñanza moral.

No parece que esto tenga mucho que ver con lo que queremos hacer, así que buscamos una segunda acepción: "Lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de una recta, llamada directriz, y de un punto fijo, llamado foco. Resulta de cortar un cono circular recto por un plano paralelo a una generatriz del mismo".

Gran variedad de cosas a nuestro alrededor muestran figuras en forma de parábola:

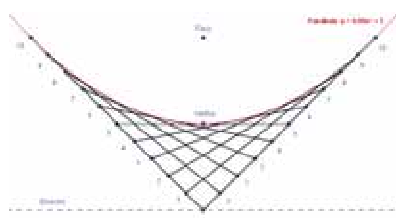
-El agua que brota de una fuente.
-La trayectoria de un balón de baloncesto en un lanzamiento a canasta.
-Una antena parabólica.

¿Cómo se hace la parábola?

Lejos de construir la parábola como nos describe la definición, vamos a hacerla utilizando únicamente, como en el resto de composiciones realizadas, una tabla del tamaño que consideremos oportuno, unas cuantas puntas e hilo de colores.

Dibujamos sobre la superficie de la tabla un ángulo que tenga por lados dos segmentos de, por ejemplo, diez centímetros de lado. Cada uno de los segmentos lo dividimos en diez partes iguales y clavamos una punta en cada una de las marcas, que sobresalga entre 5 y 10 milímetros. También se puede optar por hacer un agujero en cada uno de los puntos marcados en lugar de clavar una punta.

Tras sujetar mediante un nudo el hilo en el primer punto de uno de los segmentos, lo pasamos hasta el último del otro segmento, es decir, 0 con 10, a continuación pasamos el hilo al lado contiguo y unimos con el segundo del otro extremo (9 con 1), y así sucesivamente (2 con 8, 7 con 3, etc.); hasta completar todos los puntos de ambos lados del ángulo.



Habiendo tenido cuidado en que el hilo haya quedado tenso en todos los fragmentos realizados, concluimos sujetando el hilo mediante un nudo en la última de las puntas por las que ha pasado y cortando el hilo sobrante.

El perfil que deja la figura es la envolvente de las rectas tangentes a una parábola.

Visto el proceso, es obvio que cuantos más puntos se coloquen en cada uno de los lados del ángulo, la parábola queda perfilada con mayor precisión.

Con Geogebra definimos un deslizador $a \in [0,10]$ con incremento de 0.2 y un segmento al que se le activa la traza:

Segmento[(*a*, *a*),(-(10-*a*),10-*a*)]

Al actuar lentamente sobre el deslizador se va formando la misma figura que generamos en la tabla.

¿Por qué nos sale una parábola?

El desarrollo matemático requiere de ciertas destrezas en funciones, álgebra y geometría. Veamos:

Si tomamos como puntos que corresponde unir en los lados del ángulo $A(a, a)$ y $A'(a-10, 10-a)$ con $a \in [0,10]$, la recta que pasa por ambos tiene la expresión:

$$AA' \equiv \frac{x-a}{-10} = \frac{y-a}{10-2a}$$

que, quitando denominadores, nos deja:

$$AA' \equiv (5-a)x + 5y - 10a + a^2 = 0$$

Repitiendo el proceso con otro par de puntos $B(b, b)$ y $B'(b-10, 10-b)$ también con $b \in [0,10]$, nos da:

$$BB' \equiv (5-b)x + 5y - 10b + b^2 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos rectas anteriores encontramos el punto C de corte entre ambas rectas, obteniendo:

$$C\left(a+b-10,\ 10-a-b+\frac{ab}{5}\right)$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto C de corte cuando A y B están muy cercanos entre si, así como A' y B'. Por tanto llegamos a la situación límite $B \rightarrow A$ y, por tanto $b \rightarrow a$. En tal caso:

$$C\left(2a-10,\ 10-2a+\frac{a^2}{5}\right)$$

Eliminando a encontramos la relación entre x e y:

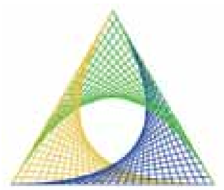
$$y = \frac{x^2+100}{20} = 0{,}05x^2 + 5$$

que es una parábola de foco el punto $F(0, 10)$, directriz la recta $d \equiv y=0$ y vértice $V(0, 5)$.

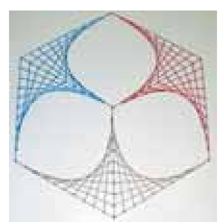
Composición de varias parábolas

A partir de este momento se nos abre un abanico tremendo de posibilidades.

Podemos optar por hacer parábolas con los lados contiguos de cualquier polígono regular (triángulos, cuadrados, hexágonos, octógonos, etc.) cambiando de color de hilo cuando se quiera.



Se puede jugar utilizando como lados del ángulo los lados de un hexágono coincidiendo cada dos en un vértice o conseguir una figura estrellada rotando la parábola varias veces sobre un punto central hasta completar los 360º.



La simetría axial o central también nos proporciona otras nuevas posibilidades.

La circunferencia

¿Qué es una circunferencia y dónde puedo encontrarla?

> Lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de un punto fijo llamado centro. Resulta de cortar un cono circular recto por un plano paralelo a la base del mismo.

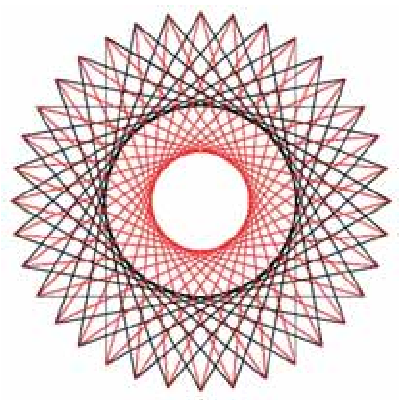
Prácticamente podemos encontrar circunferencias en cualquier dirección en la que busquemos, empezando por los botones de la camisa, el reloj que llevamos en la muñeca o uno de los mayores inventos de la historia, la rueda.

Una sola circunferencia combinando colores

Marcamos en una circunferencia puntos equidistantes que dividan la misma en 36 partes iguales y clavamos las correspondientes puntas.

Con un hilo de un determinado color unimos los puntos, por ejemplo, de once en once hasta pasar por todos ellos. Cambiamos el color y elegimos los puntos de trece en trece pasando también por todos. Vemos cómo se forman en el interior del círculo inicial dos nuevas circunferencias.

Es importante la elección del "once" y el "trece" a la hora de unir los puntos pues ambos números son primos con 36 y, de esta manera, sin cortar el hilo, podremos pasar por todos los puntos de una sola pasada.



Con Geogebra definimos un deslizador a∈ [0, 360] con incremento 10 y el segmento, con traza:

Segmento[(4+6cos(2*3.14a/360),6sin(2*3.14a/360)),(4+6cos(2*3.14a/360+220*3.14/360),6sin(2*3.14a/360+220*3.14/360))]

¿Por qué nos sale una circunferencia?

Si tomamos como puntos que corresponde unir en la circunferencia de centro el origen y radio la unidad $A(cos\ a, sen\ a)$ y $A'(cos(a+110^o), sen(a+110^o))$ con $a\in [0^o, 360^o]$, la recta que pasa por ambos tiene la expresión:

$$AA' \equiv \frac{x - cosa}{cos(a+110^o) - cosa} = \frac{y - sena}{sen(a+110^o) - sena}$$

Utilizando diversas relaciones entre razones trigonométricas obtenemos la expresión:

$AA' \equiv xcos(a + 55^o) + ysen(a + 55^o) - cos55^o=0.$

Repitiendo el proceso con otro par de puntos B y B' de la circunferencia tenemos:

$BB' \equiv xcos(b + 55^o) + ysen(b + 55^o) - cos55^o=0.$

Resolviendo el sistema formado por las dos rectas anteriores obtenemos que las coordenadas del punto C de corte entre ambas rectas cumple que:

$$\frac{y}{x} = tan\frac{a+b+110^o}{2}$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto C de corte cuando A y B están muy cercanos entre si, así como A' y B'. Por tanto llegamos a la situación límite $B\rightarrow A$ y, por tanto $b\rightarrow a$. En tal caso:

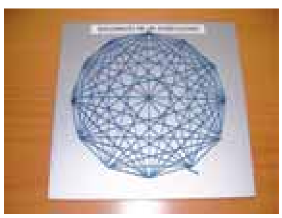
$$\frac{y}{x} = tan(a+55^o)$$

que, sustituyendo en la expresión de la recta:
$AA' \equiv xcos(a + 55^o) + xtan(a + 55^o)sen(a + 55^o) - cos55^o=0 \Rightarrow$
$x = cos55^o cos(a + 55^o)$.
Así, $y = cos55^o sen(a + 55^o)$con lo que $x^2 + y^2 = cos^2 55^o$, que es una circunferencia de mismo centro que la original y radio $cos55^o$.

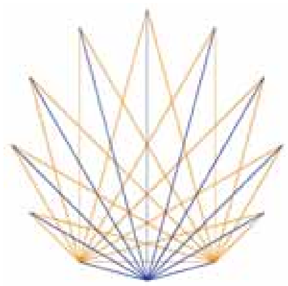
Diagonales de un polígono regular

Dibujemos sobre nuestra tabla los vértices de un polígono regular de, digamos, doce lados y hagamos en dichos puntos unos agujeros en lugar de clavar puntas. Al unir con el hilo cada vértice con todos los demás podremos observar todos los lados del polígono así como sus diagonales.

Sobre cada vértice coinciden once segmentos, número impar, así que es imposible conseguir completar la figura pasando una sola vez por cada uno de los lados o diagonales.



Si solo hacemos el proceso para alguno de los vértices y cambiamos de color en cada uno de ellos quedan figuras similares a un cactus.



Circunferencias concéntricas

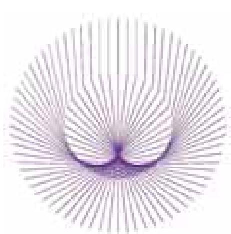
Preparemos los agujeros en dos circunferencias concéntricas de manera que la exterior tenga el doble de puntos de la interior, por ejemplo 72 y 36 respectivamente.

Unimos con el hilo el punto más alto de la circunferencia exterior con el más alto de la interior que se encuentra en el mismo radio. Pasamos por la parte posterior de la tabla el hilo al agujero contiguo al inicial en el sentido de las agujas del reloj uniéndolo con el segundo de la circunferencia interior en el mismo sentido.

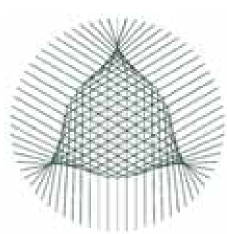
Si seguimos el proceso punto por punto hasta completar la circunferencia exterior nos fijamos que hemos pasado dos veces por todos los puntos de la circunferencia interior.
Otra variante es cambiar el sentido; mientras que en la circunferencia exterior seguimos el de las agujas del reloj, en la interior nos movemos en el sentido contrario.

Con Geogebra definimos un deslizador $a \in [1,72]$ con incremento 1 y los segmentos, con traza:

Segmento[(-1+6sin(a2*3.14/72),6cos(a2*3.14/72)),
(-1+3sin(a2*3.14/36),3cos(a2*3.14/36))]
Segmento[(12+6sin(a2*3.14/72),6cos(a2*3.14/72)),
(12+3sin(-a2*3.14/36),3cos(-a2*3.14/36))]



Mismo sentido



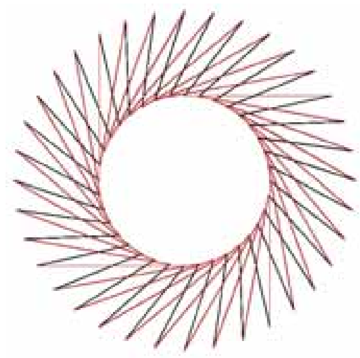
Sentido contrario

Girasol

Preparamos el mismo número de agujeros equidistantes sobre cada una de las dos circunferencias concéntricas.

Unimos con el hilo de un determinado color cada uno de los puntos de la circunferencia exterior con otro que se encuentre un par de puestos más alejado en la circunferencia interior en el sentido contrario a las agujas del reloj. Repetimos el proceso hasta haber cubierto todos los puntos de ambas circunferencias.

Repetimos el proceso con otro color de hilo pero uniendo cada punto con otro que se encuentre cinco puntos más alejado.

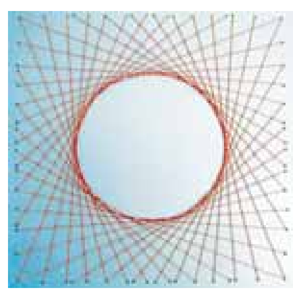


Con Geogebra definimos un deslizador $a \in [1,36]$ con incremento 1 y los segmentos, con traza:

Segmento[(4+8cos(a2*3.14/36),8sin(a2*3.14/36)),
(4+4cos((a+2)2*3.14/36),4sin((a+2)2*3.14/36))]
Segmento[(4+8cos(a2*3.14/36),8sin(a2*3.14/36)),
(4+4cos((a+6)2*3.14/36),4sin((a+6)2*3.14/36))]

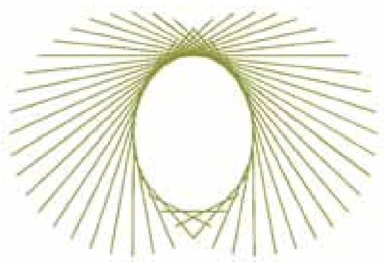
La cuadratura del círculo

La resolución de este problema trató de abordarse, sin éxito, repetidas veces desde la antigüedad. Pero, tras haberse demostrado que es imposible hallar, con sólo regla y compás, un cuadrado que posea un área que sea igual a la de un círculo dado, nosotros ¡lo hemos conseguido!, eso sí, con un poco de trampa.

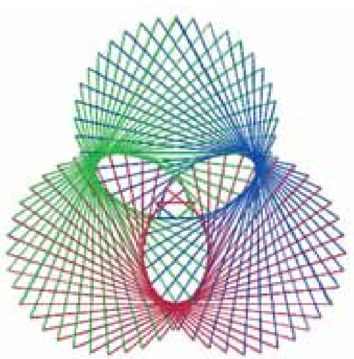


Otras posibilidades

Otras tablas podemos preparar con:
Dos circunferencias del mismo radio uniendo de forma ordenada un punto de una de ellas con uno de la otra.



Tres circunferencias formando triángulos con un vértice en cada una de ellas.



La elipse

¿Qué es una elipse y dónde puedo encontrar elipses?

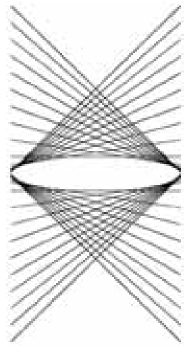
> Lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a otros dos fijos llamados focos es constante. Resulta de cortar un cono circular recto por un plano que encuentra a todas las generatrices del mismo lado del vértice.

La trayectoria que sigue la Tierra alrededor del sol es elíptica, de manera que el Sol se encuentra en uno de sus focos. Por otra parte, a veces el diseño también se acuerda de la geometría afrontando formas elípticas.

¿Cómo se hace la elipse?

Veamos una de las posibilidades para elaborar una elipse a partir de dos rectas paralelas.

Dibujamos en nuestra tabla dos rectas verticales paralelas separadas unos diez centímetros la una de la otra. A su vez se divide la tabla por la mitad con una recta horizontal. Está línea corta a las dos primeras en dos puntos que consideraremos como 0.



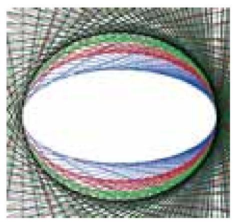
A partir del 0 simulamos una regla que nos indique en centímetros la medida por encima y por debajo de cada recta vertical y hacemos agujeros en los puntos 5, 4, 3, 2, 1, ½, ⅓, ¼ y un quinto.

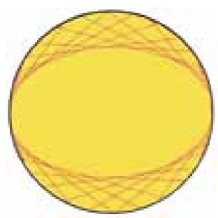
Ahora unimos cada punto de una de las paralelas con su inverso en la otra paralela. Es decir, 1 con 1, 2 con ½, 3 con ⅓, 4 con ¼, y 5 con un quinto.

El perfil que deja la intersección de dos líneas consecutivas es la envolvente de las rectas tangentes a una elipse.

Cambiando la distancia entre las rectas paralelas así como la unidad de medida utilizada en las mismas se obtienen elipses de distintas excentricidades.

Se puede generar también elipses de distinta excentricidad mediante otros métodos.





Con Geogebra definimos un deslizador $a \in [1,10]$ con incremento 1 y los segmentos, con traza:

Segmento[(5, a), (-5, 1 / a)]   Segmento[(-5, a), (5, 1 / a)]
Segmento[(5, -a), (-5, -1 / a)]   Segmento[(-5, -a), (5, -1 / a)]

¿Por qué nos sale una elipse?

De nuevo el desarrollo matemático requiere de ciertas habilidades. Veamos:

Si tomamos como puntos que corresponde unir en las rectas verticales $A(5, a)$ y $A'(-5, 1/a)$ y $B(5, b)$ y $B'(-5, 1/b)$ con $a, b \in (0, \infty)$ las rectas que los unen tienen la expresión:

$AA' \equiv \frac{x-5}{10} = \frac{y-a}{a-1/a}$ y $BB' \equiv \frac{x-5}{10} = \frac{y-b}{b-1/b}$ respectivamente.

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones anteriores encontramos el punto C de corte entre ambas rectas, obteniendo:

$$C\left(5\frac{1-ab}{1+ab}\,,\ \frac{a+b}{1+ab}\right)$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto C de corte cuando las rectas *AA'* y *BB'* están muy cercanas o, lo que es lo mismo, $b \rightarrow a$. En tal caso

$$C\left(5\frac{1-a^2}{1+a^2}\,,\ \frac{2a}{1+a^2}\right)$$

Eliminando a encontramos la relación entre x e y: $x^2+25y^2=25$ que, si la escribimos de la forma:

$$\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{1^2}=1$$

nos muestra que es una elipse centrada en el origen y con semiejes 5 y 1.

La hipérbola

¿Qué es una hipérbola y dónde puedo encontrar hipérbolas?

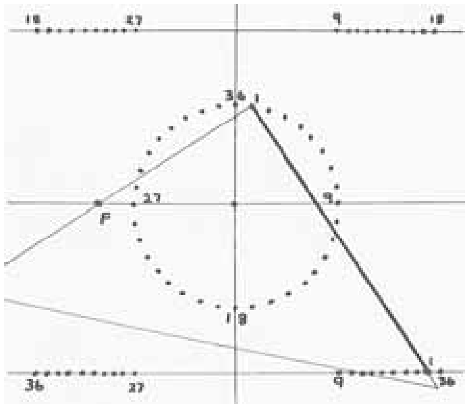
> Lugar geométrico de los puntos de un plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante. Resulta de cortar un cono circular recto por un plano paralelo a la altura del cono.

En los sistemas de posicionamiento de barcos, aviones, etc., se utilizan sistemas hiperbólicos en los que dos estaciones emisoras situadas en tierra se encuentran en los focos. También podemos encontrar hipérbolas en las chimeneas de las centrales térmicas, en determinadas construcciones civiles y quizá, también, en el ala de las mariposas.

¿Cómo se hace la hipérbola?

Veamos cómo elaborar una hipérbola a partir de una circunferencia y dos rectas paralelas.

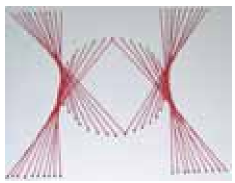
Dibujamos tres rectas paralelas igualmente espaciadas en nuestra tabla. Hacemos agujeros en los 36 puntos equidistantes de una circunferencia centrada en la recta central que tenga el radio menor que la distancia entre las rectas paralelas. Por último, elegimos un punto F que esté en la recta central fuera del círculo.

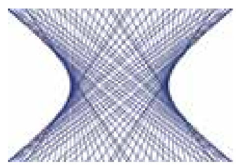


Colocamos una escuadra o cartabón que alinee el punto F con el punto más alto de la circunferencia y hacemos la perpendicular por el mismo. Ésta corta a la recta inferior en un punto que se va marcando para hacer en él el correspondiente agujero.

Seguimos el proceso con el siguiente punto de la circunferencia en el sentido de las agujas del reloj hasta acabar con el punto que está más a la derecha de la circunferencia. El resto de agujeros se pueden marcar por simetrías llevando las medidas con un compás. Los segmentos que unen los puntos de la circunferencia con los que nos han aparecido en las rectas paralelas iniciales nos configura la composición deseada.

El perfil que nos deja a derecha e izquierda la intersección de las rectas son las ramas de una hipérbola. Distintas excentricidades se pueden conseguir acercando o alejando el punto F a la circunferencia.





Con Geogebra definimos un deslizador $a \in [0,360]$ con incremento 10 y las rectas con traza:

Recta[(5cos(2*3.14a/360),5sin(2*3.14a/360)),
(5cos(2*3.14a/360)+5sin(2*3.14a/360),5sin(2*3.14a/360)-5cos(2*3.14a/360)-7)]
Recta[(-5cos(2*3.14a/360),-5sin(2*3.14a/360)),
(-5cos(2*3.14a/360)-5sin(2*3.14a/360),-5sin(2*3.14a/360)+5cos(2*3.14a/360)+7)]

¿Por qué nos sale una hipérbola?

Si tomamos como puntos con $F(-7, 0)$, $A(5\cos\alpha, 5\operatorname{sen}\alpha)$ y $B(5\cos\beta, 5\operatorname{sen}\beta)$, con $\alpha, \beta \in [-\pi/2, \pi/2]$, tenemos que las rectas perpendiculares a $\overline{FA}$ y $\overline{FB}$, pasando por A y B son:

$$r_1 \equiv \frac{x-5\cos\alpha}{5sen\alpha} = \frac{y-5sen\alpha}{-5\cos\alpha-7} \text{ y } r_2 \equiv \frac{x-5\cos\beta}{5sen\beta} = \frac{y-5sen\beta}{-5\cos\beta-7}$$

respectivamente.

Tenemos el sistema:

$$\begin{cases} r_1 \equiv 5x\cos\alpha + 7x + 5ysen\alpha = 25 + 35\cos\alpha \\ r_2 \equiv 5x\cos\beta + 7x + 5ysen\beta = 25 + 35\cos\beta \end{cases}$$

y, trabajando sobre él, obtenemos :

$$\frac{y}{7-x} = \frac{cos\alpha - cos\beta}{sen\alpha - sen\beta} \text{ de donde } \frac{y}{x-7} = tan\frac{\alpha+\beta}{2}$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto de corte $C(x,y)$ cuando los puntos A y B están muy cercanos o, lo que es lo mismo, $\alpha \to \beta$. En tal caso $y/(x-7) = tan\alpha$.

Así:

$$sen\alpha = \frac{y}{\sqrt{(x-7)^2+y^2}} \text{ y } \cos\alpha = \frac{x-7}{\sqrt{(x-7)^2+y^2}}$$

y por lo que, sustituyendo en la recta r_1:

$$\frac{-5(x-7)^2-5y^2}{\sqrt{(x-7)^2+y^2}} = 7x-25 \Rightarrow -5\sqrt{(x-7)^2+y^2} = 7x-25$$

Quitando la raíz cuadrada se obtiene , que es la hipérbola
Notar que el 24 que aparece es el resultado de $7^2 - 5^2$

Epicicloides

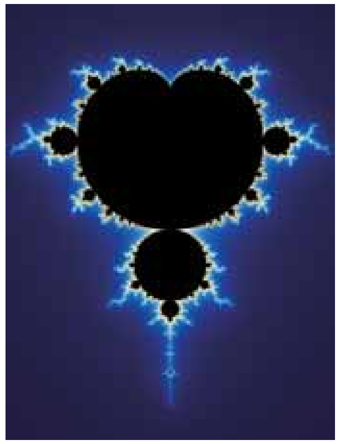
La epicicloide es la curva que sigue la trayectoria de un punto unido a una circunferencia que rueda, sin deslizamiento, por el exterior de otra circunferencia. Estas curvas, al igual que las hipocicloides, fueron estudiadas entre otros por Durero, Desargues, Huygens, Leibniz, Newton, L'Hôpital, Jacob Bernoulli, la Hire, Johann Bernoulli, Daniel Bernoulli y Euler entre los siglos XVI y XVIII.

La cardioide

¿Qué es una cardioide y dónde puedo encontrarla?

> Lugar geométrico descrito por un punto de una circunferencia rodante que gira exteriormente, sin deslizamiento, sobre otra circunferencia fija del mismo radio.

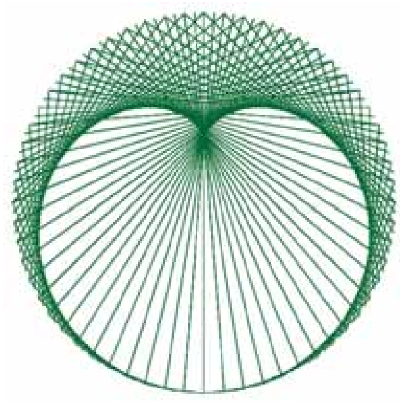
La cardioide toma su nombre de su similitud con el corazón. Se puede encontrar el patrón polar cardioide en algunos modelos de micrófonos ya que reducen la captación de sonidos laterales y posteriores. También podemos generar gráficamente la cardioide mediante el Conjunto Mandelbrot (figura fractal).



¿Cómo se hace la cardioide?

Marcamos en el panel de madera una circunferencia mediante 72 puntos equidistantes haciendo los correspondientes agujeros. Supuesto que hemos numerado estos del 1 al 72, unimos con el hilo cada uno con el que ocupa la posición doble, es decir, 1 con 2, 2 con 4, 3 con 6, 4 con 8, etc.

1	2	19	38	37	2	55	38
2	4	20	40	38	4	56	40
3	6	21	42	39	6	57	42
4	8	22	44	40	8	58	44
5	10	23	46	41	10	59	46
6	12	24	48	42	12	60	48
7	14	25	50	43	14	61	50
8	16	26	52	44	16	62	52
9	18	27	54	45	18	63	54
10	20	28	56	46	20	64	56
11	22	29	58	47	22	65	58
12	24	30	60	48	24	66	60
13	26	31	62	49	26	67	62
14	28	32	64	50	28	68	64
15	30	33	66	51	30	69	66
16	32	34	68	52	32	70	68
17	34	35	70	53	34	71	70
18	36	36	0	54	36	72	0



Con Geogebra definimos un deslizador a ∈ [0,360] con incremento 3 y un segmento con traza:

Segmento[(4+6cos(2*3.14a/360),6sin(2*3.14a/360)),
(4+6cos(4*3.14a/360),6sin(4*3.14a/360))]

¿Por qué nos sale una cardioide?

Si tomamos como puntos en la circunferencia $A(cos\alpha, sen\alpha)$ y $A'(cos2\alpha, sen2\alpha)$ con $\alpha \in [0^o,360^o]$, la recta que pasa por ambos tiene la expresión:

$$AA' \equiv \frac{x - cos\alpha}{cos2\alpha - cos\alpha} = \frac{y - sen\alpha}{sen2\alpha - sen\alpha}$$

que, con diversas transformaciones trigonométricas se nos queda en:

$$AA' \equiv xcos\frac{3\alpha}{2} + ysen\frac{3\alpha}{2} - cos\frac{\alpha}{2} = 0$$

Repitiendo el proceso con otro par de puntos $B(cos\beta, sen\beta)$ y $B'(cos2\beta, sen2\beta)$ nos da:

$$BB' \equiv xcos\frac{3\beta}{2} + ysen\frac{3\beta}{2} - cos\frac{\beta}{2} = 0$$

Buscando el punto C de corte entre ambas rectas:

$$\left(-xsen\frac{3\alpha+3\beta}{4} + ycos\frac{3\alpha+3\beta}{4}\right)\left(4cos^2\frac{\alpha-\beta}{4} - 1\right) + sen\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto de corte cuando A y B están muy cercanos así como A' y B'. Así es que llegamos a la situación límite B→A y, por tanto β→α.

En tal caso:

$$3\cdot\left(-xsen\frac{3\alpha}{2} + ycos\frac{3\alpha}{2}\right) + sen\frac{\alpha}{2} = 0$$

Resolviendo el sistema formado por:

$$\begin{cases} xcos\frac{3\alpha}{2} + ysen\frac{3\alpha}{2} - cos\frac{\alpha}{2} = 0 \\ xsen\frac{3\alpha}{2} - ycos\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{3}sen\frac{\alpha}{2} = 0 \end{cases}$$

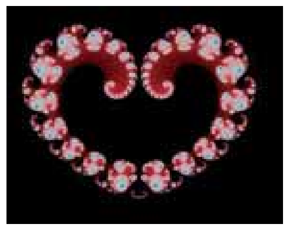
nos da como solución:

$$\begin{cases} xcos\frac{3\alpha}{2} + ysen\frac{3\alpha}{2} - cos\frac{\alpha}{2} = 0 \\ xsen\frac{3\alpha}{2} - ycos\frac{3\alpha}{2} - \frac{1}{3}sen\frac{\alpha}{2} = 0 \end{cases}$$

Buscando expresión polar:

$$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{9}\left(1 + 8cos^2\frac{\alpha}{2}\right) \text{ y, por tanto } r = \frac{1}{3}\sqrt{5 + 4cos\alpha}$$

que es una cardioide desplazada del eje vertical un tercio.



La nefroide

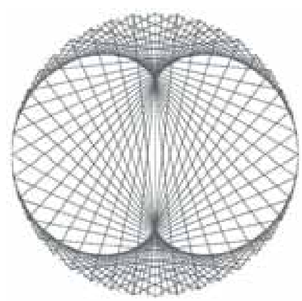
¿Qué es una nefroide y dónde puedo encontrarla?

> Lugar geométrico descrito por un punto de una circunferencia rodante que gira exteriormente, sin deslizamiento, sobre otra circunferencia fija de doble radio.

La nefroide toma su nombre de su similitud con el riñón y de ahí la especialidad en medicina interna de nefrología.

¿Cómo se hace la nefroide?

De forma análoga a como se ha elaborado la cardioide, unimos con el hilo cada punto con el que ocupa la posición triple, es decir, 1 con 3, 2 con 6, 3 con 9, 4 con 12, etc.



Con Geogebra definimos un deslizador a ∈ [0,360] con incremento 3 y un segmento con traza:

Segmento[(4+6cos(2*3.14a/360),6sin(2*3.14a/360)),
(4+6cos(6*3.14a/360),6sin(6*3.14a/360))]

¿Por qué nos sale una nefroide?

Si tomamos como puntos en la circunferencia $A(cos\alpha, sen\alpha)$ y $A'(cos3\alpha, sen3\alpha)$ con $\alpha\in[0^o,360^o]$, la recta que pasa por ambos tiene la expresión:

$$AA' \equiv \frac{x-cos\alpha}{cos3\alpha - cos\alpha} = \frac{y-sen\alpha}{sen3\alpha - sen\alpha}$$

que, con diversas transformaciones trigonométricas, se nos queda en:

$$AA' \equiv xcos2\alpha + ysen2\alpha - cos\alpha = 0$$

Repitiendo el proceso con otro par de puntos $B(cos\beta, sen\beta)$ y $B'(cos3\beta, sen3\beta)$ nos da:

$$BB' \equiv xcos2\beta + ysen2\beta - cos\beta = 0$$

Buscando el punto C de corte entre ambas rectas:

$$(-xsen(\alpha+\beta) + ycos(\alpha+\beta))2cos\frac{\alpha-\beta}{2} + sen\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto de corte cuando A y B están muy cercanos así como A' y B'. Así es que llegamos a la situación límite $B\to A$ y, por tanto $\beta\to\alpha$.

En tal caso $2(-xsen2\alpha + ycos2\alpha) + sen\alpha = 0$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} xcos2\alpha + ysen2\alpha - cos\alpha = 0 \\ xsen2\alpha - ycos2\alpha - \frac{1}{2}sen\alpha = 0 \end{cases}$$

nos da como solución:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}sen\alpha sen2\alpha + cos\alpha cos2\alpha \\ y = -\frac{1}{2}sen\alpha cos2\alpha + cos\alpha sen2\alpha \end{cases}$$

Buscando la expresión polar:

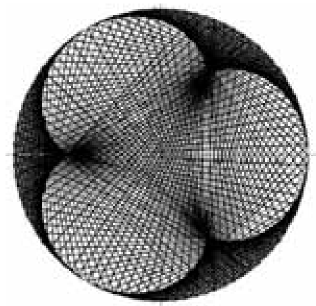
$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\left(1+3cos^2\alpha\right)$ y, por tanto:

$r^2 = x^2 + y^2 = \frac{1}{4}\left(1+3cos^2\alpha\right)$, que es una nefroide.

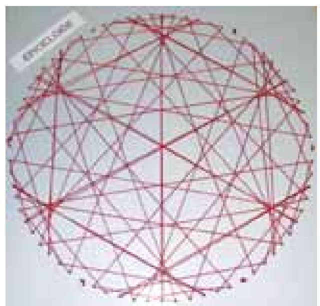
Otras epicicloides

En el momento que hemos visto cómo elaborar la cardioide y la nefroide, la cuestión es echarle ganas e imaginación y ver lo que pasaría al unir cada punto de la circunferencia:

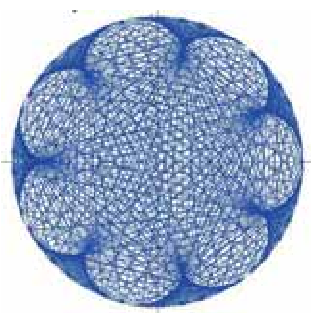
- con su cuádruple (epicicloide de Cremona);



- con el que sea siete veces mayor;



- con el que sea ocho veces mayor; etc.



Hipocicloides

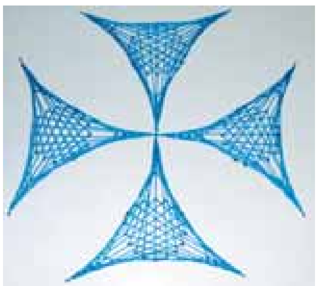
La hipocicloide es una curva generada por la trayectoria que describe un punto situado sobre una circunferencia que rueda, sin deslizamiento, por el interior de otra circunferencia.

La deltoide

¿Qué es una deltoide y dónde puedo encontrarla?

> La deltoide es una curva que se obtiene por un punto de una circunferencia rodante que gira interiormente, sin deslizamiento, sobre otra circunferencia fija de radio tres veces mayor.

Es la forma que tiene el músculo del mismo nombre o, por ejemplo, el ala delta, que a su vez toman el nombre de la letra griega delta mayúscula. La Cruz de Malta también tiene una figura semejante.

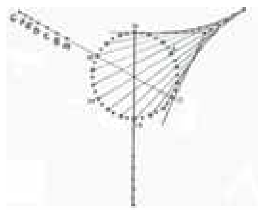


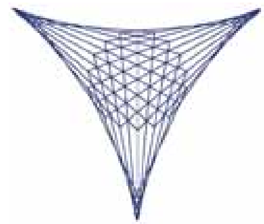
¿Cómo se hace la deltoide?

Marcamos en el panel de madera una circunferencia mediante 36 puntos haciendo los correspondientes agujeros. Supuesto que hemos numerado los agujeros del 1 al 36, veamos como construir cada una de sus tres puntas o cuernos.

Dibujamos los diámetros que unen los puntos 6 y 24, 12 y 30 así como 18 y 36 y los prolongamos a partir del 6, 18 y 30 el doble de su longitud respectivamente. Hacemos las siguientes parejas: 1 - 34, 2 - 32, 3 - 30, 4 - 28 y así sucesivamente, prolongándolas hasta donde cortan a los tres diámetros anteriores marcando dichos puntos de corte con unos agujeros.

1	34	13	10	25	22
2	32	14	8	26	20
3	30	15	6	27	18
4	28	16	4	28	16
5	26	17	2	29	14
6	24	18	36	30	12
7	22	19	34	31	10
8	20	20	32	32	8
9	18	21	30	33	6
10	16	22	28	34	4
11	14	23	26	35	2
12	12	24	24	36	36





Con Geogebra definimos un deslizador a∈ [0,360] con incremento 10 y una semirrecta con trazo:

Semirrecta[(3+2cos(-4*3.14a/360+3.14/2), 2sin(-4*3.14a/360+3.14/2)), (3+2cos(2*3.14a/360+3.14/2), 2sin(2*3.14a/360+3.14/2))]

¿Por qué nos sale una deltoide?

Si tomamos como puntos en la circunferencia $A(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$ y $A'(\cos(-2\alpha), \operatorname{sen}(-2\alpha))$ con $\alpha \in (0^\circ, 360^\circ)$, la recta que pasa por ambos tiene la expresión:

$$AA' \equiv \frac{x-\cos\alpha}{\cos(-2\alpha)-\cos\alpha} = \frac{y-\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(-2\alpha)-\operatorname{sen}\alpha}$$

que, con diversas transformaciones trigonométricas se nos queda en:

$$AA' \equiv x\cos\frac{\alpha}{2} - y\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{3\alpha}{2}$$

Repitiendo el proceso con otro par de puntos $B(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta)$ y $B'(\cos(-3\beta), \operatorname{sen}(-3\beta))$ nos da:

$$BB' \equiv x\cos\frac{\beta}{2} - y\operatorname{sen}\frac{\beta}{2} = \cos\frac{3\beta}{2}$$

Buscando el punto C de corte entre ambas rectas:

$$x\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{4} + y\cos\frac{\alpha+\beta}{4} = \operatorname{sen}\frac{3\alpha+3\beta}{4}\left(4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{4} - 1\right)$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto de corte cuando A y B están muy cercanos así como A' y B'. Así es que llegamos a la situación límite $B \to A$ y, por tanto $\beta \to \alpha$. En tal caso:

$$x\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} + y\cos\frac{\alpha}{2} = 3\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2}$$

Resolviendo el sistema formado por:

$$\begin{cases} x\cos\frac{\alpha}{2} - y\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{3\alpha}{2} \\ x\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} + y\cos\frac{\alpha}{2} = 3\operatorname{sen}\frac{3\alpha}{2} \end{cases}$$

Encontramos que

$$\begin{cases} x = 3sen\frac{3\alpha}{2}sen\frac{\alpha}{2} + cos\frac{3\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2} \\ y = 3sen\frac{3\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2} - cos\frac{3\alpha}{2}sen\frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

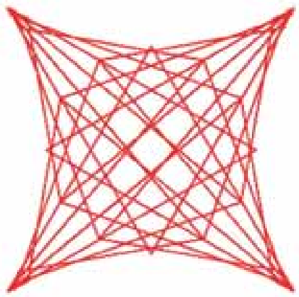
que, con diversas transformaciones se queda en:

$$\begin{cases} x = 2cos\alpha - cos2\alpha \\ y = 2sen\alpha + sen2\alpha \end{cases}$$

que es una deltoide.

La astroide y otras hipocicloides

Con la ayuda del ordenador podemos dibujar una hipocicloide con el número de cuernos deseados.



Con Geogebra conseguimos una astroide definiendo un deslizador a∈ [0,360] con incremento 10 y una semirrecta con trazo:

Semirrecta[(3+3cos(-6*3.14a/360), 3sin(-6*3.14a/360)),
(3+3cos(2*3.14a/360),3sin(2*3.14a/360))]

¿Por qué nos sale una astroide?

Si tomamos como puntos en la circunferencia $A(cos\alpha, sen\alpha)$ y $A'(\cos(-3\alpha), sen(-3\alpha))$ con $\alpha \in (0^{o}, 360^{o})$, la recta que pasa por ambos tiene la expresión:

$$AA' \equiv \frac{x - cos\alpha}{cos(-3\alpha) - cos\alpha} = \frac{y - sen\alpha}{sen(-3\alpha) - sen\alpha}$$

que, con diversas transformaciones trigonométricas se nos queda en

$$AA' \equiv xcos\alpha + ysen\alpha = cos2\alpha$$

Repitiendo el proceso con otro par de puntos $B(cos\beta, sen\beta)$ y $B'(cos(-3\beta), sen(-3\beta))$ nos da:

$$BB' \equiv xcos\beta + ysen\beta = cos2\beta$$

Buscando el punto C de corte entre ambas rectas:

$$xsen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + ycos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 2cos\frac{\alpha-\beta}{2}sen(\alpha+\beta)$$

El lugar geométrico que buscamos es el que genera el punto de corte cuando A y B están muy cercanos así como A' y B'. Así es que llegamos a la situación límite $B \to A$ y, por tanto $\beta \to \alpha$.

En tal caso $xsen\alpha + ycos\alpha = 2sen2\alpha$

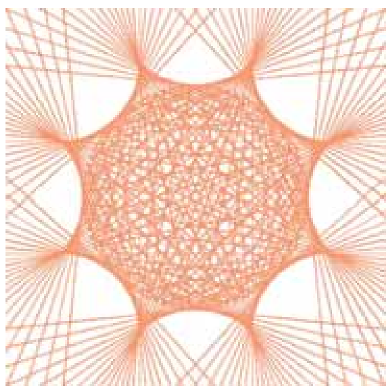
Resolviendo el sistema formado por:

$$\begin{cases} xcos\alpha + ysen\alpha = cos2\alpha \\ xsen\alpha + ycos\alpha = 2sen2\alpha \end{cases}$$

Encontramos que:

$$\begin{cases} xcos\alpha + ysen\alpha = cos2\alpha \\ xsen\alpha + ycos\alpha = 2sen2\alpha \end{cases}$$

que es una astroide. ■



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MILLINGTON, J. (2004): *Curve Stitching*, Tarquin Publications. Norfolk (Inglaterra)