

Los pitagóricos crearon una división del currículo en quadrivium (aritmética, música, geometría y astronomía) y trivium (gramática, retórica y dialéctica), esta clasificación se mantuvo durante siglos y la música permaneció como un subconjunto de las matemáticas durante la Edad Media.

The Pythagoreans established a division of the curriculum into quadrivium (arithmetic, music, geometry and astronomy) and trivium (grammar, rhetoric and dialectics). This classification was kept for centuries and music remained as a subgroup of mathematics during the Middle Ages.

Introducción

Las matemáticas están reconocidas como una ciencia, además con un valor especial pues el resto de las ciencias necesitan de ésta como base. No es tan explícito que las matemáticas sirvan como ayuda en las bellas artes, pero allí están, colaborando a que las artes sean de verdad bellas y a la vez enriqueciéndose de su presencia en la pintura, escultura, música...

La belleza y disfrute que se puede conseguir con la demostración de un teorema, la resolución de un problema, la creación de una conjetura...no tiene por qué ser menor (ni mayor) que la que obtenemos al admirar un cuadro de Miró o al escuchar una sinfonía de Beethoven.

Por tanto, si las matemáticas son el motor que hace que las ciencias funcionen y avancen pero también son imprescindibles para que las artes sean de verdad bellas, ¿por qué encasillar a las matemáticas dentro de las ciencias? Como mínimo sería igual de justo encontrarlas en la lista de las artes, o incluso con mayor fundamento aquí si reconocemos su belleza y no nos encerramos en su sentido práctico.

Centrándonos en la música, veremos alguna de las relaciones que ésta tiene con las matemáticas, cómo la música difícilmente existiría sin una base matemática que la apoye y cómo en realidad una obra musical, si es hermosa y compensada,

podría ser considerada un trabajo matemático bien resuelto. Los pitagóricos ya crearon una división del currículo en quadrivium (aritmética, música, geometría y astronomía) y trivium (gramática, retórica y dialéctica), la música permaneció como un subconjunto de las matemáticas durante la Edad Media.



Einstein tocando el violín

Albert Einstein:

Las mentes matemáticas secas como el polvo sueñan en blanco y negro, el músico clásico capaz prefiere soñar en colores, como lo hacen los grandes científicos que prefieren la música clásica.

Angel Pastor Martín
IES Valle del Alberche, Navalunga (Ávila)

La gama de frecuencias que puede percibir el oído humano comprende desde los 15 hasta los 20.000 Hz, aunque en música los sonidos más agudos suelen alcanzar los 5.000 Hz. Los sonidos por debajo de los 15 Hz se llaman infrasonidos, y por encima de 20.000 Hz ultrasonidos.

La referencia que nos sirve para medir el valor absoluto de los tonos son los 440 Hz que es la frecuencia que tiene un diapason normal y se utiliza para afinar la nota LA situada en el segundo espacio del pentagrama si leemos en clave de SOL. Esta referencia no siempre ha sido la misma y ha evolucionado desde valores más bajos de frecuencia. Aún en la actualidad, el criterio de los 440 no está completamente unificado pues hay orquestas que afinan a 438, 440, 442 o 444 Hz (hay oídos humanos capaces de distinguir un cambio en la frecuencia de vibración de un 0'03% de la frecuencia original en el rango medio, entre 500 y 8.000 Hz).

La gama de tonos que se utilizan hoy día se generalizó a partir de 1630, cuando el matemático francés Mersenne formuló con precisión las reglas para afinar en su obra "Armonía Universal". Se trata de la escala uniformemente temperada, con 12 semitonos iguales en cada octava y donde entre semitonos consecutivos se mantiene una relación constante de $\sqrt[12]{2}$ en su frecuencia y entre tonos consecutivos se tendrá como consecuencia una relación de $\sqrt[2]{2}$.

La relación que hay entonces entre dos notas a una distancia de 8ª es $(\sqrt[12]{2})^{12} = 2$ (el doble de frecuencia la más aguda).

Cabe preguntarse por qué la distancia entre dos tonos es distinta: al ser proporcional, la diferencia entre dos tonos contiguos va aumentando según subimos a notas más agudas. La escala musical es una escala logarítmica que va en progresión geométrica de razón $\sqrt[12]{2}$ y es en los valores de los logaritmos donde mantiene las distancias absolutas. Si la frecuencia de LA es 440 Hz, podemos calcular la frecuencia de SI como $440 \times (\sqrt[12]{2})^2 = 493'88$ y la frecuencia de SOL: $440 \times (\sqrt[12]{2})^{-2} = 392$.

	SOL	LA	SI
Frecuencia	392	440	493'88
Log ₂ de la frecuencia	8'61	8'78	8'95

Diferencia de las frecuencias:

$$440 - 392 = 48$$

$$493'88 - 440 = 53'88$$

Diferencia del logaritmo de las frecuencias:

$$8'78 - 8'61 = 0'17$$

$$8'95 - 8'78 = 0'17$$

Si escuchamos simultáneamente dos notas musicales, el resultado será un sonido más o menos agradable. Los sonidos que se consideran más "agradables" de oír conjuntamente son los que están a una distancia de 8ª, 5ª justa y 4ª justa, las frecuencias relativas de dos notas a estas distancias son 2/1, 3/2 y 4/3 respectivamente y las frecuencias absolutas de estos sonidos tienen muchos de sus divisores comunes (todos en el caso de la 8ª y dos terceras partes de ellos en el caso de 4ª y 5ª). Los intervalos de 3ª y 6ª, tanto mayor como menor, todavía se consideran "agradables"; la frecuencia relativa de sus notas está en razón 5/4 y 6/5 respectivamente para las 3ªs y en razón de 5/3 y 8/5 respectivamente para las 6ªs, y sus frecuencias absolutas tienen como divisores comunes en torno a la mitad de sus divisores.

El resto de los intervalos (2ªs y 7ªs, o cualquier otro intervalo, si es aumentado o disminuido), se considera disonante y puede resultar como mínimo extraño de escuchar para quien no esté habituado a ello. Las frecuencias absolutas de dos notas disonantes son números *casi* primos entre si.

Cuando escuchamos una obra musical, se suelen escuchar simultáneamente varias notas, estas notas deben estar cuidadosamente elegidas para conseguir un sonido agradable. "Cualquier sucesión melódica o harmónica que no produzca una sensación tonal forma un conjunto incoherente de notas que el buen gusto rechazará siempre" (Arin y Fontanilla 1981). Cuando un estudiante comienza los estudios de armonía, antes de hacer los primeros ejercicios a cuatro voces se encuentra con una serie de definiciones sobre acordes consonantes y disonantes, movimientos directos, inversos y oblicuos, etc. A continuación aparecen una serie de proposiciones o normas de obligado cumplimiento para que el ejercicio se pueda considerar bien resuelto, como son: "se prohíben dos octavas seguidas si se producen entre dos mismas voces", "igualmente quedan prohibidas dos quintas seguidas si se producen de la misma forma", "se prohíbe también llegar a una octava o a una quinta por movimiento directo"... (Arin y Fontanilla, 1981)

La armonía es entonces un conjunto de normas y reglas que deben respetarse para conseguir un sonido coherente basado en acordes consonantes, y esto no se consigue tanto escuchando la música como contando los intervalos que se forman en cada acorde y los saltos que va produciendo la melodía.

Notación musical y funciones

La notación musical se compone de una serie de signos con los que se fija gráficamente el sonido. Cada uno de los signos escritos en un pentagrama tiene dos variables que nos indican duración y sonido. La duración viene indicada por la figura musical (redonda, blanca, negra, etc.) y el sonido por la colocación en el pentagrama de esta figura (do, re, mi, etc.). Si una

partitura musical depende de dos magnitudes, éstas se pueden expresar en unos ejes cartesianos donde pondríamos el tiempo (en segundos) en el eje de abscisas y el sonido (en hercios) en el eje de ordenadas.



En el compás anterior existen los siguientes datos:



Indica que la duración de 60 negras es un minuto (una negra por segundo).



Es la clave, que siempre debe estar al comienzo de todos los pentagramas, en este caso clave de SOL, que indica que en la 2ª línea se coloca la nota SOL y a partir de ésta las demás, una en cada espacio y una en cada línea, tanto ascendente como descendentemente.



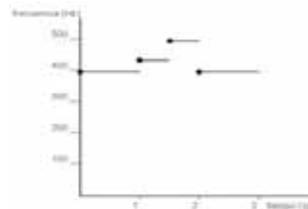
El numerador 3 indica que cada compás tiene 3 partes, el denominador nos indica qué figura vale una parte, en este caso el 4 dice que es la negra la figura que vale una parte.



Las negras indican que van a durar un segundo cada una y al estar situadas en la segunda línea nos dice que ambas son la nota SOL. Las corcheas indican que cada una de ellas dura

medio segundo, y al estar situadas en el segundo espacio y la tercera línea nos dice que las notas que deben sonar son LA y SI.

Este compás se podría escribir de la siguiente manera:



Frecuencia de Sol = 396 Hz; La = 440 Hz; Si = 495 Hz

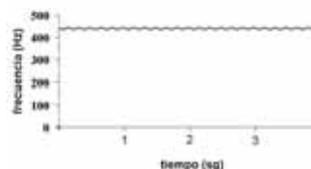
Una partitura musical se puede entonces escribir como una función definida a trozos en la que cada trozo representa a una figura distinta de la partitura, la función resultante es continua por la derecha y discontinua de salto finito por la izquierda coincidiendo con el momento de cambio de nota en la partitura. Cada trozo de la función es constante y su valor es la frecuencia de la nota que tiene que sonar en ese momento.

No siempre tiene por qué ser constante cada intervalo continuo de la función, pues existen algunos recursos musicales que expresados en la función harían que ésta creciera o decreciera, como son por ejemplo el vibrato o el glisando.

El vibrato es un recurso que enriquece la música haciendo que una nota no suene lineal sino que su sonido oscila levemente en torno a la altura exacta de la nota. La nota LA (con una frecuencia de 440 Hz) ante un vibrato, sonaría regularmente más o menos entre 435 y 445 Hz. Esto se puede representar de la siguiente manera.



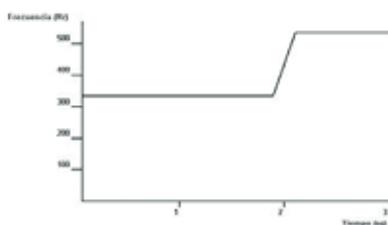
La nota LA (440 Hz) si estamos en la misma pieza del ejemplo anterior se representaría con la función:



Un glissando, (resbalando en italiano, que es el idioma en el que se expresan los términos musicales) en los instrumentos de cuerda, consiste en deslizar el dedo sobre la cuerda desde una nota inicial a otra final, en notación musical se suele emplear una línea oblicua ondulada que va desde la nota inicial a la final.



En forma de función sería:



Se ha visto que, de forma teórica, la escritura musical podría ponerse en forma de función, pero en la práctica resulta mucho más simple la notación musical, creada expresamente para transcribir la música a un lenguaje escrito.

Composición y juegos

W. A. Mozart, a los 21 años, compuso un vals de 16 compases al que tituló "Juego de dados musical" (K 294), que consistía en escribir vales con la ayuda de dos dados. En cada lanzamiento de dados se suma el valor de éstos y tenemos 11 resultados posibles (de 2 a 12). Mozart compuso entonces once compases diferentes para cada una de las 16 posiciones, es decir, $11 \times 16 = 176$ compases en total. Tras los 16 lanzamientos se escogen los 16 compases elegidos en el sorteo y sale un vals. Un buen problema de combinatoria es calcular cuántos vales distintos se pueden formar y razonar por qué no tienen todos la misma probabilidad de aparecer. En total son 11^{16} o lo

que es lo mismo (redondeando) 45.000 billones. Aunque lógicamente no se han podido escuchar más que una mínima parte de ellos, confiando plenamente en la genialidad de Mozart, es seguro que todos pueden pasar por ser una pieza musical al nivel de su autor.

John Cage también utiliza dados para alguna de sus obras y, siguiendo con el azar, pero ya con materiales más acordes a lo que es el siglo XX, el propio John Cage, Iannis Xenakis y cualquiera de los compositores de música estocástica utilizan el ordenador con algoritmos programados para crear sus composiciones.

J. S. Bach escribió el canon del cangrejo, una partitura a dos voces en la que el acompañamiento repite a la voz principal con exactitud, pero en sentido inverso, mantiene una simetría tal que si se tocara de forma invertida el único cambio sería que una de las voces tomaría la melodía de la otra y viceversa.



Un juego parecido al anterior lo crea J. Haydn en la sonata para piano en Do: el 2º movimiento es igual al primero, pero interpretado al revés.

P. Hindemith escribe en 1942 "Ludus tonales" (Juego tonal), una serie de preludios y fugas con intenciones didácticas sobre el clave bien temperado de J. S. Bach y en su posludio una música que también puede tocarse leyendo al derecho o al revés. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARÍN, V. y FONTANILLA, P. (1981): *Estudios de Harmonía*. Alberdi, Madrid.
 CARDÚS, C. (1996): *Estructura y sonoridad de los instrumentos de arco: el arco y el violín pieza por pieza*. Real Musical- Carisch España. Madrid
 HALFFTER, C. y PARADA, L.I. (2004): *El placer de la música*. Síntesis. Madrid

Internet:

<http://www.musicaperuana.com/espanol/mm.htm>
http://www.larouchepub.com/spanish/lhl_articles/2006/0714_ataque_india.htm
<http://acapriccio.iespana.es/historia.html>
<http://es.wikipedia.org/wiki/Monocordio>
<http://www.epsilon.com/paginas/t-musica.html>