SUMA+ 58
Junio 2008, pp. 137-143

La Música y el número siete. Historia de una relación controvertida

Una vez celebrado el Día Escolar de las Matemáticas, dedicado a la Música y las Matemáticas, al equipo de redacción de la revista SUMA le ha parecido interesante incluir una sección para tratar estos temas.

Iniciamos así la andadura de *Musymáticas* en donde pretendemos aprovechar la relación entre estas materias para incrementar los recursos en el aula. Como ocurre con el resto de la revista, se trata de una sección abierta en la que esperamos contar con la colaboración de todos vosotros.

La música es un ejercicio matemático inconsciente en el que la mente no sabe que está calculando

G. W. Leibniz (1646-1716)

¿Realmente el número siete es tan esencial para la música?

Las más de cuatrocientas mil entradas que tiene el número siete en *google* dan una muestra del interés que despierta su uso en muchas facetas de la vida cotidiana y entre ellas, cómo no, en la música.

Si dejamos aparte especulaciones numerológicas de origen incierto, la realidad es que a casi cualquier occidental que le preguntemos por el número de notas musicales, no dudará en decir que son siete y que sus nombres[1] son: do, re, mi, fa, sol, la, si. Sin embargo, como veremos más adelante, usando sólo siete notas, la producción musical quedaría muy mermada. Por otro lado, si la pregunta se hiciese a los que están habituados a la música oriental, la respuesta no sería tan contundente, puesto que desde antiguo se han utilizado escalas que no partían de siete notas, como son la javanesa (cinco tonos), la Raga Shruti de India (veintidós tonos), la tailandesa (ocho tonos), etc.

Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

Además del número de notas, para la música hay otra relación numérica en la que el número siete juega un papel fundamental: los intervalos o cocientes entre las frecuencias de dos sonidos. De entre todos los intervalos posibles, hay dos que siempre han dado lugar a la polémica, el tritono (o cuarta aumentada) y las séptimas. El tritono, intervalo que se produce, por ejemplo, entre fa-si, resulta difícil de entonar y produce un sonido algo siniestro, que en el medievo[2] se denominó *diabulus in musica* ('el diablo en la música'), y que debía evitarse a toda costa. De hecho, la Iglesia sostenía que el diablo se colaba en la música a través de este intervalo. Una manera de evitarlo era prescindir del uso de la séptima. A este intervalo, que se produce por ejemplo entre do-si, la armonía tradicional posterior al siglo XVII, no le atribuye un carácter diabólico, pero la clasifica como una disonancia absoluta, mientras que el tritono lo trata como una semiconsonancia.

Si con estos antecedentes, la popularidad del número siete en la música queda en entredicho, la situación aún se hace más interesante cuando en el centro de la polémica se sitúan grandes matemáticos que han contribuido a avivar la controversia.

Un doble interés por los números

Al menos desde el siglo VI a. C. con los pitagóricos, se establece de forma clara el doble interés de los números en la música. Por un lado, está la cantidad de notas que hay en la octava y, por otro lado, la propia esencia del número como elemento generador de las notas. Cualquier análisis del papel del número siete en la música sería incompleto si descuidase alguna de estas dos facetas.

En cuanto a que en la música occidental el número de notas por octava sea siete, no es del todo cierto. Siete es la cantidad de nombres de notas que manejamos, pero en realidad, la inmensa mayoría de la música que escuchamos surge del uso de doce notas denominadas[3]:

do – do$^{\#}$ – re – mi^{b} – mi – fa – fa$^{\#}$ – sol –sol$^{\#}$ – la – si^{b} – si

Y si esto ya pone en tela de juicio el papel fundamental del número siete, la polémica real surge al analizar la función del número 7 como generador de notas musicales.

Las consonancias pitagóricas que se reducen al *tetractys* (los cuatro primeros números), son ampliadas por la Justa Entonación hasta el *senario* (los seis primeros números). A pesar de que las primeras versiones de la Justa Entonación se deben a Aristóxeno de Tarento (360-300 a.C.), un discípulo de Aristóteles que sostiene que basta con el oído para conseguir la afinación, sin duda debemos a Gioseffo Zarlino (1517-1590) su formulación rigurosa y su popularización. Zarlino, un neopitagórico convencido, estableció que los sonidos cuyas frecuencias son proporcionales a 1, 2, 3, 4, 5, 6 son consonantes y comprobó que éstos eran emitidos por cuerdas de longitudes:

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$$

Zarlino, un neopitagórico convencido, estableció que los sonidos cuyas frecuencias son proporcionales a 1, 2, 3, 4, 5, 6 son consonantes

Para Zarlino, el número 6 jugaba un papel fundamental. Desde el punto de vista matemático, se trata de un número que se obtiene como suma y producto de sus divisores propios,

$$1+2+3=6,\ 1\cdot 2\cdot 3=6$$

Además, al multiplicar por 6 cualquier número acabado en 6, nos da un número que acaba en 6. A estas propiedades añadía la presencia del senario en el mundo: el número de planetas, los signos del zodíaco en cada hemisferio, las aristas de la pirámide triangular, las superficies del cubo, etc.

Hasta bien entrado el siglo XVIII, las afinaciones que se usaban normalmente en los estudios teóricos eran la pitagórica y la Justa Entonación. En ambas, la cantidad de notas en una octava no está determinada a priori, pero normalmente este número se fija en 12 notas. En estos sistemas de afinación las notas se generan con potencias y cocientes de los números 2 y 3 o de los números 2, 3 y 5. Si consideramos una nota fija, por ejemplo el Do de frecuencia f = 264 Hz, para obtener el resto de notas afinadas hay que multiplicar por las fracciones siguientes:

	Do	Do$^{\#}$	Re	Mi^{b}	Mi	Fa	Fa$^{\#}$	Sol	Sol$^{\#}$	La	Si^{b}	Si
12 Notas Pitagóricas	1	$\frac{3^7}{2^{11}}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{2^5}{3^3}$	$\frac{3^4}{2^6}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{3^6}{2^9}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^8}{2^{12}}$	$\frac{3^3}{2^4}$	$\frac{2^4}{3^2}$	$\frac{3^5}{2^7}$
12 Notas Justa Entonación	1	$\frac{5^2}{3\cdot 2^3}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{3\cdot 2}{5}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5^2}{3^2\cdot 2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5^2}{2^4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3^2}{5}$	$\frac{3\cdot 5}{2^3}$

Si la frecuencia de la que partimos es 264 Hz, estas notas están en la octava do_2-do_3. Para trasladarlas a otra octava, no hay más que multiplicar por una potencia de 2 adecuada. Así, si queremos trasladarla *n* octavas, multiplicamos sus valores por 2^n, con *n* un número entero.

Está claro que en las dos afinaciones anteriores las potencias del número siete no se utilizan. Es decir que no se considera que estas potencias generen notas agradables. Y aquí está la clave del tratamiento musical del número siete.

Sonidos consonantes

No resulta fácil establecer una definición unánime de sonidos consonantes, de hecho debemos contentarnos con admitir que dos o más sonidos son consonantes si resultan agradables al oído. Evidentemente, se trata de un concepto que depende mucho de la situación socio-cultural y que ha evolucionado a lo largo de la Historia. Ante esta perspectiva, resulta complicado establecer una idea de consonancia que resulte operativa. Entre todos los teóricos que han estudiado el tema, nos quedaremos con la versión del físico John Tyndall (1820 – 1893):

> Cuanto más simple es la relación de las frecuencias de dos sonidos, más consonante será el intervalo que forman.

Este criterio, conocido con el desafortunado nombre de Teorema de Tyndall, no hizo más que recoger la idea con la que los musicólogos venían trabajando desde hacía siglos. Prueba de ello es la carta que L. Euler, escribió a Federica Carlota Ludovica von Brandenburg Schwedt, princesa de Anhalt Dessau (1745–1808), en la que expone de forma casi literal el resultado de Tyndall:

Carta V: Del Unísono y de las Octavas:

> “ [...] Vuestra Alteza comprenderá fácilmente que cuanto más simple sea la proporción [entre las frecuencias], o expresada con menores números, más distantemente se presenta al entendimiento y presenta un mayor sentimiento de placer [...].”

3 de mayo de 1760

Según este criterio, las consonancias pueden ordenarse de la forma siguiente:

1/1 Unísono > 2/1 Octava > 3/2 Quinta > 4/3 Cuarta > > 5/4 Tercera mayor > 5/3 Sexta mayor > 6/5 Tercera menor > 8/5 Sexta menor > ...

A partir de esta ordenación, surgen problemas con las que musicólogos y matemáticos han tenido que convivir:

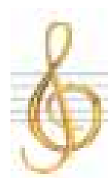
- A partir del siglo XVI, compositores y músicos empiezan a hacer uso de intervalos que habían estado prohibidos. Sirva como ejemplo un fragmento de la polémica entre C. Monteverdi (1567 – 1643), representante de la nueva música, y G. M. Artusi (1540 – 1613), partidario de la música tradicional (véase E. Fubini, 1990):

> No niego que inventar cosas nuevas esté bien; incluso es necesario. Sin embargo, decidme: ¿a qué se debe que queráis hacer uso de aquellas disonancias de la misma manera que las emplean éstos [los músicos ‘modernos’]? Si lo hacéis porque pretendéis que se oigan de modo manifiesto [...] ¿por qué no las usáis de la manera habitual, razonadamente, según en la forma en que compusieron Adriano, Cipriano, Palestrina [...]?

- Por otro lado, no resulta sencillo justificar por qué es más consonante 8/5 que 7/4 ó 7/5 si tanto el numerador como el denominador son más grandes y se alejan más del unísono.

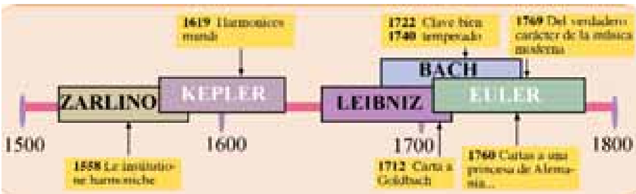
Como veremos a continuación, de nuevo el número siete está en la esencia de estas cuestiones.

Hasta bien entrado el siglo XVIII, las afinaciones que se usaban normalmente en los estudios teóricos eran la pitagórica y la Justa Entonación



Más de dos siglos de polémica

Nuestro objetivo no es hacer un análisis exhaustivo del uso del siete en la música, sino dar una visión global a través de algunos trabajos. Y para esto resultan esenciales las aportaciones de G. Zarlino (1517-1590), J. Kepler (1571-1630), G. W. Leibniz (1646-1716), J. S. Bach (1685-1750) y L. Euler (1707-1783), quienes contribuyeron de forma decisiva a reavivar la controversia. Cualquiera de estos cinco autores merecería un estudio detallado, sin embargo aquí destacaremos algunas publicaciones que reflejan de forma clara argumentos a favor y en contra del número siete en música.



La defensa del Senario: Zarlino y Kepler

Muy influido por el neoplatonismo florentino, G. Zarlino veía la esencia numérica en todas las cosas. En *Le Institutioni Harmoniche* (1558) hace una defensa del senario como límite para las consonancias, pero esto le plantea un problema: hemos dicho que la sexta menor, 8/5, se considera una consonancia, y sin embargo tiene en sus términos el ocho que no pertenece al senario. ¿Por qué no proponer el *ottonario* como recinto de las consonancias? Evidentemente, aceptar el ocho significaría dar cabida al número siete y los intervalos compuestos con este número, 7/6 y 8/7, a las que considera disonancias sin paliativos.


LE ISTITVTIONI
HARMONICHE
DI M. GIOSEFFO ZARLINO DA CHIOGGIA;
Nelle quali; oltra le materie appartenenti
ALLA MVSICA;
Si trouano dichiarati molti luoghi
di Poeti, d'Historici, & di Filosofi;
Con Priuilegio dell'Illustriss. Signoria di Venetia,
per anni X.
IN VENETIA M D LVIII.

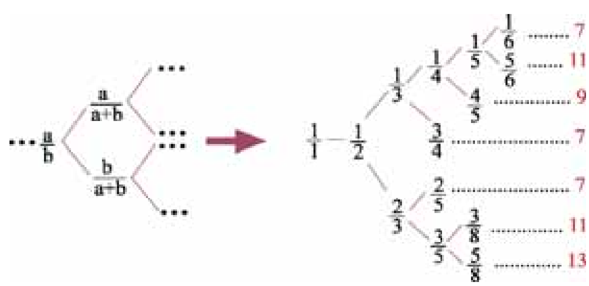
Zarlino, consciente de que el problema tenía difícil solución, recurre a argumentos filosófico-numéricos para resolverlo. Para él, las fracciones 8/5 y 7/6 contienen números de naturaleza muy diferente porque $8 = 2^3$, y esto significa que incluir 8/5 no supone incorporar números primos que no estén contenidos en el senario, mientras que aceptar el 7 escapa de los seis primeros números. Además, sus argumentos se apoyan en la distinción aristotélica entre potencia y acto. Para Zarlino, 8/5 se encuentra en el senario en potencia, pero no en acto, y aprovecha esta circunstancia para justificar que las consonancias que surgen con el senario sean "consonancias propiamente dichas" mientras que la sexta menor produce una "consonancia comúnmente dicha".

Como era de esperar, los razonamientos de Zarlino no fueron capaces de convencer a muchos musicólogos de la época, de ahí que otros autores, como F. Salinas (1513 - 1590), hicieran otro tipo de defensas, basadas en la práctica, argumentando que 8/5 era consonante por ser complementario de la tercera mayor (5/4),

$$\textbf{sexta menor} + \textbf{tercera mayor} = \frac{8}{5}\cdot\frac{5}{4} = 2$$

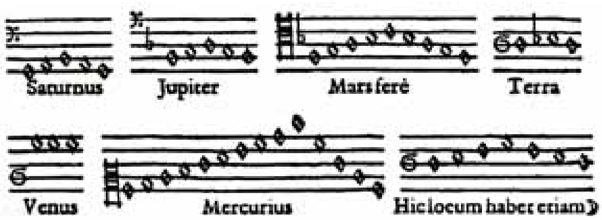
y no por estar dentro o fuera del senario.

Habrá que esperar más de medio siglo hasta que Kepler, en *Harmonices mundi* (1619) proporcione razonamientos mucho más sólidos. Convencido, como los pitagóricos, de que la armonía de la música y la del universo no eran más que dos representaciones de una misma realidad, Kepler basa las proporciones armónicas en los polígonos regulares. Para esto necesitaba quedarse con una cantidad finita polígonos. La manera de elegirlos fue relacionar la condición de ser construible con regla y compás con la capacidad de generar proporciones consonantes. Así ideó un método que, aparentemente, resolvía de una vez por todas, los problemas de rechazar 7/6 o 8/7 pero aceptar 5/8. El método consistía en generar un árbol de consonancias en el que cada fracción a/b en el paso n genera dos fracciones, a/(a+b) y b/(a+b), en el paso n+1. Se partía de la fracción 1/1 y el proceso continuaba hasta llegar a un denominador que representase los lados de un polígono regular no construible con regla y compás (los polígonos de 7, 9, 11 y 13 lados).



En este árbol aparecen todos los intervalos consonantes y no es necesario aceptar ninguna excepción.

Kepler intentó comprender las leyes del movimiento planetario durante la mayor parte de su vida. En un principio, considerando que este movimiento debía cumplir las leyes pitagóricas de la armonía, aprovechó que el número de planetas fuese uno más que el número de poliedros perfectos para intentar demostrar que las distancias de los planetas al Sol venían dadas por esferas en el interior de poliedros perfectos (anidadas sucesivamente unas en el interior de otras). Cuando advirtió que este modelo no explicaba el movimiento de los astros tuvo que recurrir, con gran decepción, a las elipses. Esta falta de simplicidad en el Universo, que Kepler vivió como un fracaso, fue compensada por la perfección de la Armonía Universal al comprobar que las proporciones entre las velocidades angulares de los astros en su afelio y su perihelio reproducían fielmente las proporciones de los intervalos consonantes. Una vez efectuadas las mediciones, la *Música de las Esferas* de los pitagóricos dejan de ser sólo una idea para plasmarse en unos pentagramas que el propio Kepler escribió.



Durante más de siglo y medio, los argumentos de Kepler parecían sólidos, pero después, en menos de veinticinco años, sus justificaciones se desmoronaron. Por un lado, W. Herschel, precisamente un músico de la corte del rey Jorge III de Inglaterra, descubrió Urano en 1781 y, pocos años después, C. F. Gauss (1777 – 1855) demostró que se podía construir con regla y compás el polígono regular de 17 lados.

Leibniz, Bach y Euler

A pesar de que Leibniz no escribió mucho sobre música, además de ser el autor de varias de las frases más citadas en Música y Matemáticas, participó en la polémica del número siete. Su producción en este tema se reduce a algunas cartas dirigidas a C. Goldbach (1690 – 1764). En una de éstas, fechada el 17 de abril de 1712, a pesar de que concede la posibilidad de que el número siete sea capaz de generar sonidos agradables, no deja de verlo como algo anecdótico:

> En música, no contamos más allá del cinco, similares en esto a esta gente que, hablando también de aritmética, no pasaban del número tres y dieron lugar al dicho alemán sobre los simples:'es tan simple que no sabe contar más de tres'. Todos nuestros intervalos en uso vienen en efecto de razones formadas por los pares de los números primos 1, 2, 3, 5. Si tuviéramos la suerte de un poco más de finura, podríamos llegar hasta el número primo 7. Y pienso que realmente hay gente en este caso. Esta es la razón por la que los antiguos no rechazaban completamente el número 7. Pero apenas habrá gente, que llegaría hasta los números primos [siguientes] más cercanos, 11 y 13.

A pesar de que varios autores del siglo XVIII utilizan la séptima en sus composiciones, y de la innegable revolución que supone *El clave bien temperado* (1722, 1740) de J. S. Bach en el que, por supuesto aparecen séptimas y otros intervalos considerados disonantes, los científicos y teóricos de la música se mantienen fieles en su renuncia al número siete como generador de consonancias. Una prueba contundente de ello es la última frase de la carta que Euler escribió a la princesa de Anhalt Dessau en 1760 (Euler, 1990):

Carta VII: De los doce tonos del clavecín:

> "Mi intención era presentar a Vuestra Alteza el verdadero origen de los sonidos empleados en la música. [...] Los principios de la Armonía se reducen en último término a números, [...] el número 2 produce sólo octavas [...]. Después el número 3 produce los tonos que difieren de los anteriores en una quinta. Pero introduzcamos también el número 5 y veamos cuál sería el tono que produce 5 vibraciones, mientras que el F no hace más que una. [...]. Es llamado una tercera mayor y produce una consonancia muy agradable, estando contenido en una proporción de números bastante pequeña, 4 y 5. [...] (Así) tendréis las teclas principales del clavecín que según los antiguos, constituye la escala llamada diatónica que deriva del número 2, del número 3 repetido tres veces y del número 5 [...].
> Si se quisiera también introducir el número 7, el número de tonos de una octava sería mayor, y se llevaría toda la música a un grado más alto. Pero aquí la Matemática abandona la armonía a la Música."

3 de mayo de 1760

Pero el ingenio de Euler no podía permanecer ajeno a la música que se estaba haciendo en su época, y seis años después de haber escrito la carta anterior, en su *Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* (Euler, 1766a), no sólo se desdice de la última frase de esta carta y propone el número 7 como uno de los artífices de la música, sino que aprovecha la ocasión para rectificar a Leibniz.

> Se sostiene generalmente que no nos servimos en la música más que de las proporciones compuestas por estos tres números primos 2, 3 y 5 y el gran Leibniz ha advertido ya, que en la música no se ha aprendido aún a contar más allá del 5; lo cual es incontestablemente cierto en los instrumentos afinados según la armonía. Pero, si mi conjetura se cumple, se puede decir que en

> la composición se cuenta ya hasta el 7 y que el oído está ya acostumbrado; es un nuevo género de música, que se ha comenzado a usar y que era desconocida por los antiguos. En este género el acorde 4, 5, 6, 7 es la armonía más completa, puesto que contiene los números 2, 3, 5 y 7; pero también resulta más complicado que el acorde perfecto en el género habitual que no contiene más que los números 2, 3 y 5. Si ésta es una perfección en la composición, quizá se hará lo posible por llevar los instrumentos al mismo grado.

Posteriormente, Euler, cuando aborda el carácter de la Música Moderna (Euler, 1766b) presenta un sistema de afinación en el que aparece el número siete, aunque quizá por parecerle excesivamente atrevido, a los tonos en los que aparecen potencias de 7 les denomina "extraños", frente a los tonos "principales" en los que sólo aparecen potencias de 2, 3 y 5.

A pesar de que varios autores del siglo XVIII utilizan la séptima en sus composiciones ... los científicos y teóricos de la música se mantienen fieles en su renuncia al número siete como generador de consonancias

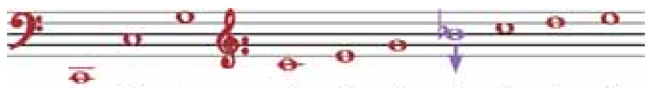
Pero, ¿puede estar desafinada la Naturaleza?

En el siglo XIX, J. B. Fourier (1768 – 1830) abre una nueva brecha en la cuestión del número siete. Uno de sus resultados más célebres y, sin duda, el más utilizado en música, es que cualquier función periódica continua se puede descomponer en funciones periódicas simples.

Esto significa que si un instrumento produce una nota, la onda sonora se puede descomponer en ondas simples con frecuencias 1f, 2f, 3f, ..., denominadas armónico primero, segundo, etc. La amplitud de cada uno de los armónicos es lo que configura el timbre del instrumento y hace que distingamos el do de un piano del do de una trompeta. Así, si tomamos como nota fundamental, o primer armónico, el do_2 con una frecuencia f=132 Hz, los diez primeros armónicos que se producen son los siguientes:

Armónico	Frecuencia	Nota	Intervalo
1º=1 × f	132 Hz	do_2	tono fundamental
2º=2 × f	264 Hz	do_3	octava
3º=3 × f	396 Hz	sol_3	quinta
4º=4 × f	528 Hz	do_4	octava
5º=5 × f	660 Hz	mi_4	tercera mayor
6º=6 × f	792 Hz	sol_4	quinta
7º=7 × f	924 Hz	$si^b{}_4$	séptima menor (desafinada)
8º=8 × f	1056 Hz	do_5	octava
9º=9 × f	1188 Hz	re_5	segunda mayor
10º=10 × f	1320 Hz	mi_5	tercera mayor

Normalmente, al expresar estos armónicos en un pentagrama, al séptimo armónico se le adjunta una flecha, o un cambio de grafía, que indica la desafinación.



Sin duda, puede hacerse un sistema de afinación en la que el 7º armónico esté afinado, por ejemplo el siguiente:

	Do	Do$^\#$	Re	Mi^b	Mi	Fa	Fa$^\#$	Sol	Sol$^\#$	La	Si^b	Si
Una posibilidad	1	$\frac{3\cdot 5}{2\cdot 7}$	$\frac{3^2}{2^3}$	$\frac{7}{2\cdot 3}$	$\frac{5}{2^2}$	$\frac{2^2}{3}$	$\frac{5\cdot 2}{7}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3^2\cdot 5}{2^2\cdot 7}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{2^2}$	$\frac{3\cdot 5}{2^3}$

Pero, esto no zanja la cuestión. En primer lugar, en este sistema se modifica ligeramente la afinación habitual de todas las notas y, en segundo lugar, ¿por qué quedarnos en el séptimo armónico y no seguir con el 11º, 13º, etc. que también están desafinados?

Realmente, que estas cuestiones permanezcan sin resolver no supone ningún problema práctico, pero afirmar que algunos armónicos de una nota emitida por un cantante están desafinados, es admitir que la naturaleza está desafinada. Está claro que en los criterios para elegir las notas musicales, los argumentos basados en la física del sonido se entremezclan con los netamente socio-culturales, y éstos no tienen por qué coincidir. Esta desafinación no impide seguir disfrutando de la belleza de la Música, pero, ¿no rompe esto con una tradición de más de veinticinco siglos por la que armonía de la Naturaleza (el Universo) y la armonía musical eran una misma cosa?

Quizás, no admitir esta ruptura ha hecho que algunos compositores del siglo XX, como Z. Kodály, B. Bartók, I. Xenakis o W. R. Lutoslawski, por ejemplo, no sólo hagan intervenir el número siete en la afinación de muchos de sus acordes, sino que realmente den un paso adelante hacia una relación explícita, que no ha cesado, entre las Matemáticas y la composición musical.

MUSYMATICAS

NOTAS

[1] El nombre de las notas se debe a Gido D'Arezzo, un monje benedictino del siglo XI, que tomó las primeras sílabas del Himno a San Juan Bautista como nombre de las notas. A parir de ahí, los nombres se han mantenido, excepto en el caso del do, cuyo nombre original, ut, sólo se conserva en Francia. Sin embargo, estos nombres no son unánimes, ni siquiera en la música occidental. En la notación inglesa, las notas se llaman C, D, E, F, G, A, B y en la alemana las notas se denominan C, D, E, F, G, A, H..

[2] En los antiguos modos griegos no ocurría esto, ya que el canto solía empezar en la. El problema empezó a manifestarse en la Edad Media cuando Guido D'Arezzo redistribuyó la escala y puso el do en primer lugar.

[3] En el temperamento igual, que es el sistema de afinación que se utiliza mayoritariamente en la actualidad, do$^{\#}$=re^{b}, re$^{\#}$=mi^{b}, fa$^{\#}$=sol^{b}, sol$^{\#}$=la^{b}, la$^{\#}$=si^{b}.

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

CASPAR, M. (2003): *Johannes Kepler*, Acento Editorial, Madrid.

EULER, L. (1766a): "Conjecture sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique", *Memoires de l'Académie des Sciences de Berlin 20*, pp. 165-173.

EULER, L. (1766b): "Du véritable caractère de la musique moderne", *Memoires de l'Académie des Sciences de Berlin 20*, pp. 174-199.

EULER, L. (1990): *Cartas a una princesa de Alemania sobre diversos temas de Física y Filosofía*, Ed. Universidad de Zaragoza, Zaragoza.

FUBINI, E. (1990), *La estética musical desde la Antigüedad hasta el siglo XX*, Alianza Editorial, Madrid.

GOLDÁRAZ GAÍNZA, J. J. (2004): *Afinación y temperamentos históricos,* Alianza Editorial, Madrid.

NEUBAUER, J. (1986): *The Emancipation of Music from Languaje. Departure from Mimesis in Eigteenth-Century Aesthetics*, Yale University Press, New Haven.

RANDEL, D. (1999): *Diccionario Harvard de música,* Alianza Editorial, Madrid.

Internet

BAILHACHE, P. (1995): *La musique, une pratique cachée de l'arithmétique?*,

http://umb-www-01.u-strasbg.fr/lexis/html/cinscription/Leibniz.html.

http://es.wikipedia.org/wiki/Microtonalismo.

IVORRA, C. (2006): *Geometría*

http://www.uv.es/~ivorra/Libros/Geometria.pdf .