

*El número de oro y el número plástico pertenecen a la clase de los números mórficos. En este artículo revisamos algunos aspectos históricos, presentamos algunas de sus propiedades y proponemos actividades sobre ellos, que permitirán trabajar transversalmente Álgebra y Geometría. Usando el lenguaje funcional como modelo de representación, los alumnos podrán conjeturar, de forma intuitiva, un resultado fundamental: “Solo existen dos números mórficos, el número de oro y el número plástico”.*

*The golden mean and the plastic number belong to the class of morphic numbers. In this paper we recall some historical aspects and we show some properties of them and we present some activities, which will allow us to work transversely Algebra and Geometry. By means of use of the functional language as a representational model, our students will can to conjecture the most fundamental result: “There exist only two morphic numbers, namely the golden mean and the plastic number”.*

Una de las manifestaciones más fructíferas de la actividad matemática es la *generalización*. Cuando generalizamos construimos matemáticas, pues definimos y relacionamos conceptos, descubrimos propiedades, confirmamos intuiciones,... y tanto en el “resultado final”, como en el “camino recorrido”, encontraremos siempre belleza y armonía. Un claro ejemplo de bella generalización es la familia de los *números metálicos*, (Spinadel, 1998). Esta familia está formada por el conjunto de las soluciones positivas de las ecuaciones de la forma :

$$x^2 - mx - n = 0, m=1, 2, 3, \dots$$

Una subfamilia relevante de ella se obtiene al considerar  $n=1$  y  $m=1, 2, 3, \dots$ . Todos sus elementos comparten propiedades que son generalización de las que cumple el *número de oro*  $\phi$  (Spinadel, 1999; Redondo, 2006; Spinadel y Redondo, 2007) y representan la extensión natural del concepto de *proporción áurea* en el plano. Pero la *divina proporción*, puede extenderse al espacio de tres dimensiones, también de forma natural, en *número plástico*  $\psi$  (Van der Laan, 1960; Alsina y García-Roig 2001; Alsina, 2007), y éste, junto con el *número de oro*, pertenece a la familia de los *números mórficos*, que aparece al considerar la posibilidad de seguir extendiendo aún más las propiedades que comparten. Este artículo está dedicado en esencia a ese proceso de generalización. La idea que organiza esta primera parte es la extensión de la “noción plana” de la *proporción áurea*  $\phi$  al espacio de tres dimensiones, en con-

exión con el problema de la búsqueda de un “sólido armonioso”.

Como sabemos que el estudio de la belleza y armonía en las formas geométricas fue abordado en la antigüedad por los griegos, será inevitable empezar con un poco de historia (Ghyka, 1978, 1979). En el plano el elemento ortogonal de superficie es el rectángulo  $a \times b$ , Platón y sus contemporáneos encontraron en las propiedades matemáticas y estéticas de la *proporción áurea*  $\phi$  motivos suficientes para considerar el rectángulo áureo, de razón  $b:a$  igual a  $\phi$ , con  $b > a$  como el elemento de armonía en el plano.

El mismo Platón consideró el concepto de proporción en los sólidos. En el espacio, el elemento ortogonal de volumen es el paralelepípedo recto rectángulo  $a \times b \times c$ . Los griegos daban nombres especiales a las diferentes formas de volumen, le llamaban *altar* cuando  $a < b < c$ , *ladrillo* si  $a = b > c$ , *viga* en el caso  $a = b < c$ , y por supuesto, *cubo* cuando  $a = b = c$ . Nosotros no usaremos esta nomenclatura, y siguiendo el ejemplo de C. Alsina<sup>1</sup>

**Antonia Redondo Buitrago**

*IES Bachiller Sabuco. Albacete*

*Sociedad Castellano Manchega de Profesores de Matemáticas*

*Asociación Internacional de Matemática y Diseño, M&D*

nos permitiremos la libertad de llamarles a todas *cajas*.

Para poder hablar de proporción en el espacio, es necesario determinar con precisión la forma de la *caja* y observamos enseguida que aunque el volumen  $a \times b \times c$  está determinado por los tres rectángulos,  $a \times b$ ,  $a \times c$ ,  $b \times c$ , en general diferentes, la caracterización de dos de ellos determina las proporciones del tercero. Por tanto la proporción en el espacio se establecerá con las razones de dos rectángulos, ya que la tercera proporción se deduce de las dos anteriores. Este hecho sugiere que para que un sólido  $a \times b \times c$  fuera *armonioso* sería suficiente con que dos de los rectángulos,  $a \times b$ ,  $a \times c$ ,  $b \times c$ , lo fueran. Esto sucede en los llamados *volúmenes egipcios* emparentados con el *número de oro*:  $1 \times 1 \times \phi$ ,  $1 \times \phi \times \phi$ ,  $1 \times \phi \times \phi^2$  y  $1 \times \phi^2 \times \phi^3$ . El segundo aparece a menudo en las construcciones del antiguo Egipto con las aproximaciones y para la proporción áurea<sup>2</sup>. El tercero, con notables propiedades geométricas, se conoce como el *sólido de oro* de Samuel Colman (Colman, 1920). El cuarto, Figura 1, tiene la propiedad de que se puede dividir en un sólido  $\phi^2 \times \phi^2 \times 1$  y un *sólido de oro*.

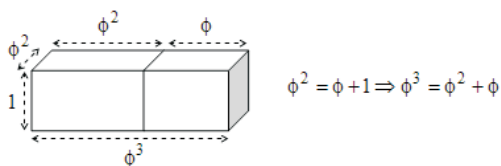


Figura 1

Ciertamente, todos estos sólidos pueden considerarse *armoniosos*, pero no puede decirse que representen una verdadera generalización, pues ninguna de las propiedades geométricas intrínsecas que caracterizan al *rectángulo de oro*, se cumplen en ellos. Tuvieron que pasar muchos siglos hasta que dicha generalización fuera descubierta o reconocida, y llegaría en relación con el estudio de determinadas sucesiones recurrentes y de la mano de los trabajos del arquitecto holandés Hans Van der Laan (1904-1991).

Los conceptos y resultados que vamos a considerar tienen una corta historia que revisaremos brevemente en esta propuesta, donde el hilo conductor será el estudio de los *números mórficos* y sus propiedades fundamentales, y el objetivo la presentación de originales actividades “ecológicas” en el entorno del Bachillerato. El estudio se ubicaría de forma natural en el marco de la formulación de conjeturas y de la generalización y podría ser un recurso didáctico más a tener en cuenta para trabajar de forma transversal contenidos de Álgebra y Geometría, considerando de forma globalizada conceptos y procedimientos tan diversos como la noción de número irracional, la resolución de ecuaciones, la proporción y la semejanza, la convergencia de sucesiones de números reales... y nos daría ocasión de ir introduciendo poco a poco a nuestros alumnos en el razonamiento por recurrencia y la demostración por el método de inducción.

En muchas ocasiones trabajaremos en el espacio de tres dimensiones y por tanto los cálculos y procedimientos serán algo más complejos que cuando nos restringíamos al rectángulo de oro en el plano, pero en modo alguno en ningún caso serán más complicados. De forma intencionada las actividades *aparecen* en el texto del artículo, en el momento en que el contexto lo sugiere, numeradas según la secuencia en que deben ser propuestas, diseñadas para que cualquier alumno de Bachillerato pueda realizarlas con autonomía sin dificultad.

Antes de empezar convendrá que recordemos algunos resultados sobre los *números metálicos*. Una colección de actividades para Secundaria sobre estos números fueron presentadas en el n° 50 de esta revista (Redondo y Haro, 2005).

El *número metálico*  $\sigma_m$  es un número mayor que 1 que se define como la solución positiva de la ecuación:

$$x^2 - mx - 1 = 0, m = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

El primero de ellos  $\sigma_1$  es, en efecto, el *número de oro*  $\phi$ . El segundo  $\sigma_2$  es conocido como *número de plata*  $\theta$ , y el tercero que corresponde al caso  $m=3$ , es el *número de bronce*. Los restantes no tienen nombre propio, simplemente se nombran  $\sigma_m$ .

La ecuación (1) puede expresarse equivalentemente de la forma  $x = m + 1/x$  por tanto reemplazando iterativamente el valor de  $x$  en el segundo término de la igualdad, obtenemos la expansión en fracción continua simple del número metálico  $\sigma_m$  considerado:

$$x^2 - mx - 1 = 0 \Rightarrow \sigma_m = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} = m + \frac{1}{m + \frac{1}{m + \dots}} = [m; m, m, \dots]$$

Una de las propiedades que caracteriza a los *números metálicos*  $\sigma_m$  es que son límite de las razones de términos consecutivos de la sucesión recurrente:

$$a_1 = a_2 = 1 \quad a_n = ma_{n-1} + a_{n-2}, n = 3, 4, 5, \dots \quad (2)$$

Esto se debe a que la sucesión de razones verifica la igualdad

$$a_{n+1}/a_n = (ma_n + a_{n-1})/a_n = m + (a_{n-1}/a_n)^{-1}$$

y por ser de Cauchy converge a un cierto número  $L$  y de esta manera se debe cumplir

$$L = m + L^{-1} \Leftrightarrow L^2 - mL - 1 = 0 \Rightarrow L = \sigma_m$$

En este razonamiento solo es relevante la relación de recurrencia, el valor de las condiciones iniciales no influye para nada en el resultado obtenido. Podríamos considerar diferentes valores para  $a_1$  y  $a_2$  y obtendríamos diferentes sucesiones, pero el límite de sus razones sería siempre el mismo. Por ejemplo, en el caso  $m=1$ , considerando  $a_1 = a_2 = 1$  la relación de recurrencia origina la clásica sucesión de los *números de Fibonacci*: 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Pero si elegimos  $a_1=1$  y  $a_2=3$  obtenemos la sucesión de los *números de Lucas*: 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... que también origina el *número de oro*. En el caso  $m=2$ , las condiciones iniciales  $a_1=1$  y  $a_2=1$  generan la sucesión de los *números de Pell*:

$$1, 2, 5, 12, 29, 70, \dots$$

De la ecuación (1) se deducen dos consecuencias inmediatas. La primera es que los *números metálicos*  $\sigma_m$  generan la progresión geométrica de razón  $\sigma_m$

$$\dots, (\sigma_m)^{-3}, (\sigma_m)^{-2}, (\sigma_m)^{-1}, 1, \sigma_m, (\sigma_m)^2, (\sigma_m)^3, \dots$$

que cumple también la relación de recurrencia (2).

La segunda es que el *gnomon*<sup>3</sup> de un *rectángulo metálico*  $a \times b$ ,  $b:a = \sigma_m$  es el rectángulo  $a \times ma$  formado por la unión de  $m$  cuadrados de lado  $a$ , Figura 2:

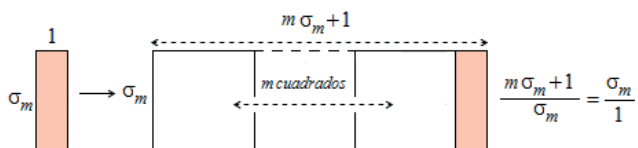


Figura 2

En consecuencia, el crecimiento *pseudo-gnomónico* por  $m$  *cuadrados* derivado de la relación de recurrencia (2) origina una sucesión de rectángulos cuyas razones tienden rápidamente a  $\sigma_m$ . La Figura 3 muestra el proceso que genera el *rectángulo de plata*.

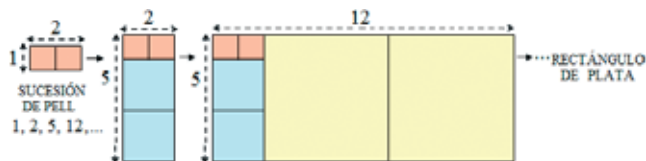


Figura 3

La siguiente actividad será el comienzo de nuestra búsqueda del paralelepípedo que sea una generalización satisfactoria de los *rectángulos metálicos*  $\sigma_m$ .

### Actividad 1

**Objetivos:** Reconocer sucesiones de números naturales definidas por recurrencia y conjeturar relaciones de recurrencia. Construir la *sucesión de Padovan*.

**Conocimientos previos:** Concepto de sucesión. Término general de una sucesión.

**Materiales:** Trama de puntos.

En la Figura 4 el triángulo inicial es equilátero y de lado 1. Le añadimos otro igual en la parte de abajo. Luego otro igual hacia la izquierda, siguiendo el sentido de las agujas del reloj.

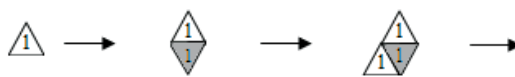


Figura 4

Seguimos girando y añadimos un triángulo equilátero de lado 2, y luego otro igual en la parte superior. Después otro de lado 3, de la forma que se ve en la Figura 5.

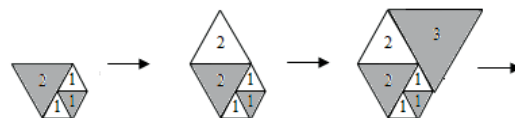


Figura 5

Girando siempre en el sentido de las agujas del reloj, añadimos un triángulo blanco de lado 4 que coincide con los de los dos sombreados de lado 1 y 3, Figura 6. Luego uno sombreado de lado 5 que coincide con los de los dos blancos de lado 1 y 4, y así sucesivamente...



Figura 6

Continúa con el proceso y dibuja más triángulos de esta *espiral de triángulos*.

- Escribe ahora las longitudes de los lados de los triángulos en el orden en que los has obtenido ¿qué relación existe entre los lados de los triángulos? Exprésala algebraicamente.
- Si continuaras indefinidamente obtendrías una sucesión. ¿Sabrías hallar su término general?

La sucesión de los lados de los triángulos es 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, ..., la *sucesión de Padovan*. Es una sucesión definida por tres condiciones iniciales,  $a_1, a_2, a_3$  y una relación de recurrencia que permite obtener los términos  $a_4, a_5, a_6, \dots$

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1 \quad a_n = a_{n-3} + a_{n-2} \quad n = 4, 5, 6, \dots \quad (3)$$

La utilización de una trama triangular como material facilita reconocer la relación de recurrencia que la define (Figura 7) y otras como:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-5} \quad n = 6, 7, 8, \dots \quad (4)$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-5} + a_{n-6} \quad n = 7, 8, 9, \dots$$

$$a_n = a_{n-4} + a_{n-5} + a_{n-6} + a_{n-7} + a_{n-8} \quad n = 9, 10, 11, \dots$$

que podrían demostrarse por inducción. La relación (4) desempeñará, como veremos más adelante, un papel fundamental.

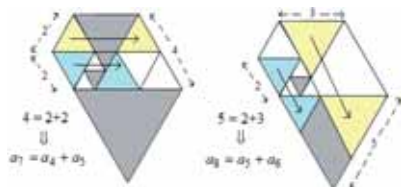


Figura 7

Al igual que los números de Fibonacci, los números de Padovan también aparecen al sumar "líneas" del triángulo de Pascal, Figura 8.

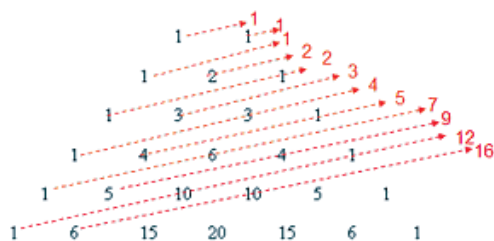


Figura 8

Sabemos que los *números metálicos* son límite de razones de términos consecutivos de ciertas sucesiones recurrentes. Parece lógico preguntarse qué ocurre con la sucesión de las razones de la sucesión de Padovan. La siguiente actividad contesta a esta pregunta y será una ocasión para resolver ecuaciones polinómicas por diferentes métodos.

## Actividad 2

**Objetivos:** Encontrar el *número plástico*, reconociendo que es un número irracional y obtener una aproximación racional de él por diferentes procedimientos.

**Conocimientos previos:** Relación entre la *sucesión de Fibonacci* y el *número de oro*. Límite de una sucesión. Resolución de ecuaciones polinómicas. Representación gráfica de funciones.

**Materiales:** Calculadora gráfica y ordenador (programa Derive).

En la Actividad 1 has encontrado una sucesión que se define de forma parecida a la *sucesión de Fibonacci*. Era la *sucesión Padovan*: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, ...

a) Utiliza la calculadora para construir la sucesión de las primeras razones de dos términos consecutivos de ella y estudia su convergencia.

b) Razona ahora de forma general teniendo en cuenta que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{a_n} = \frac{a_{n-1}/a_{n-2} + 1}{a_n/a_{n-2}} = \frac{a_{n-1}/a_{n-2} + 1}{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}}$$

La calculadora ayuda a conjeturar que la sucesión  $a_2/a_1, a_2/a_3, a_4/a_3, \dots$  es convergente. Una demostración rigurosa no sobraría, pero quizás no sea necesaria, pues nuestros objetivos son otros. Si admitimos que la sucesión es convergente a un cierto número  $L$ , evidentemente tiene que cumplir:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{L+1}{L^2} \Leftrightarrow L^3 - L - 1 = 0$$

Una primera aproximación al valor del límite pedido se puede hallar fácilmente utilizando una tabla que también servirá para descubrir la igualdad de los tres límites de la izquierda:

$n$	$a_{n+1}/a_n$	$a_n/a_{n-1}$	$a_{n-1}/a_{n-2}$
1	1/1		
2	1/1	1/1	
3	2/1	1/1	1/1
4	2/2	2/1	1/1
5	3/2	2/2	2/1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

El límite  $L$  es por tanto solución de la ecuación  $x^3 - x - 1 = 0$ . El polinomio que aparece en el miembro de la izquierda es irreducible en el cuerpo de los números racionales. Pero como es de grado impar sabemos que por lo menos tiene una raíz real, que será única, pues la gráfica de la función  $y = x^3 - x - 1$  sólo corta en un punto al eje de abscisas, Figura 9. Esa solución es  $\psi$ , el *número plástico*<sup>4</sup> de Hans van der Laan.

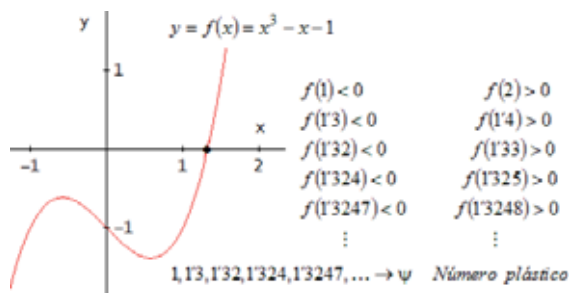


Figura 9

Van der Laan empieza sus estudios de arquitectura en 1923 y los abandona en 1927 para ingresar en la orden benedictina. En 1938 proyecta y construye una nueva ala de la abadía de Oosterhout y retoma su actividad como arquitecto, aunque realiza muy pocas obras, casi todas ellas de carácter religioso (tres conventos, un monasterio, una capilla y una casa privada). Sus estudios sobre las proporciones en las iglesias del Románico, le conducen al descubrimiento de que muchas de ellas aparecen relacionadas con la sucesión de Padovan y desarrolla un sistema de proporciones basado en el número plástico que utiliza en sus construcciones.

La sucesión de Padovan recibe este nombre por el arquitecto inglés Richard Padovan (1935-), responsable en gran medida de la difusión de su obra, al traducir en 1983 al inglés su tratados de arquitectura, "Architectonic space" en 1983 y "Modern Primitive" en 1994 (Padovan, 2002). Ian Stewart contribuyó también a su divulgación y popularidad, dedicándole en 1996 una de sus columnas de Mathematical Recreations de Scientific American, a la sucesión de Padovan (Stewart, 1996).

El *número plástico* es un número irracional, cuyo valor exacto se puede hallar aplicando la fórmula clásica de Cardano para la ecuación cúbica  $x^3 + px = q$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

tomando  $p = -1$  y  $q = 1$

$$\psi = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx 1.3247179572447460\dots$$

Es una buena ocasión para invitar a los alumnos a que busquen información en los libros de Historia para encontrar la fórmula, la apliquen y comparen la solución que proporciona, con las aproximaciones que han obtenido utilizando el modelo funcional.

Observemos las analogías entre el *número plástico* y los *números metálicos*  $\sigma_m$ . Son evidentes. En efecto, todos ellos son números irracionales mayores que uno, soluciones de ecuaciones que son generalización de la que satisface el número  $\phi$ . Por supuesto, todos admiten expansión en fracción continua simple, pero aquí encontramos una diferencia esencial. Las fracciones continuas simples de los números  $\sigma_m$  son muy sencillas y sus coeficientes son verdaderamente fáciles de recordar pues son todos iguales al correspondiente  $m$ , es decir, son periódicas puras de periodo  $m$ . Sin embargo con la fracción continua simple del *número plástico* la cosa cambia, pues no es periódica<sup>5</sup> y no parece que exista ninguna forma de predecir sus coeficientes. Como muestra, estos son los primeros 80 coeficientes:

1, 3, 12, 1, 1, 3, 2, 3, 2, 4, 2, 141, 80, 2, 5, 1, 2, 8, 2, 1, 1, 3, 1, 8, 2, 1, 1, 14, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 3, 1, 10, 4, 40, 1, 1, 2, 4, 9, 1, 1, 3, 3, 3, 2, 1, 17, 7, 5, 1, 1, 4, 1, 1, 3, 5, 1, 2, 6, 2, 2, 1, 1, 1, 4, 1, 3, 1, 2, 6, 5, 6, 49, 3, 7.

Pero podemos obtener dos expresiones infinitas diferentes para aproximar  $\psi$ :

$$x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \Rightarrow \psi = \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \dots}}}$$

$$x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 + x \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1 + x} \Rightarrow \psi = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \dots}}$$

Continuando con las analogías, de la ecuación  $x^3 - x - 1 = 0$  se deduce que el número  $\psi$  define una progresión geométrica de razón  $\psi$ : ...,  $\psi^{-3}$ ,  $\psi^{-2}$ ,  $\psi^{-1}$ , 1,  $\psi$ ,  $\psi^2$ ,  $\psi^3$ , ..., que también cumple la relación de recurrencia correspondiente, (3).

Más analogías. En la tercera actividad, al generalizar al espacio el *crecimiento pseudo-gnomónico* asociado a los números metálicos  $\sigma_m$  (ver Figura 3) nos encontraremos con el número plástico y conseguiremos el deseado "sólido armonioso"; ¡la caja plástica! (Alsina, 2007). Utilizaremos para ello un modelo geométrico que proporcionará una interpretación geomé-

trica de la sucesión de Padovan y de la sucesión que se origina al considerar las razones de los términos consecutivos.

### Actividad 3

**Objetivos:** Obtener una sucesión de cajas que “tiende” a una caja de dimensiones  $1 \times \psi \times \psi^2$ . Establecer el concepto de *caja plástica*.

**Conocimientos previos:** Sucesión de Padovan, número plástico y la relación entre ellos.

**Materiales:** Policubos. Imaginación espacial.

A partir de un cubo  $1 \times 1 \times 1$  construimos una sucesión de cajas por el procedimiento que muestra la Figura 10. Añade algunas cajas más a la sucesión.

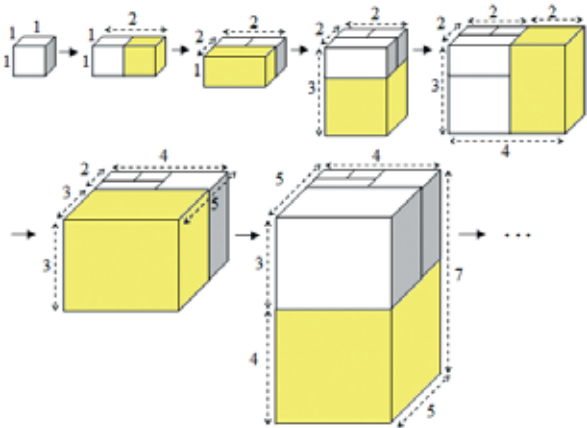


Figura 10

a) Describe con precisión el procedimiento seguido en cada una de las iteraciones.

b) Observa como varían las dimensiones  $a, b, c$  de las cajas que vamos obteniendo y como influye en la “forma de la caja” (la primera es un cubo, la segunda es “muy alargada”, la tercera es “muy ancha”,...). Describe esta variación. Te ayudará utilizar una tabla como esta:

caja inicial	caja añadida	caja final
$1 \times 1 \times 1$	$1 \times 1 \times 1$	$1 \times 1 \times 2$
$1 \times 1 \times 2$	$?$	$?$
$?$	$\vdots$	$\vdots$

Figura 11

c) Si el proceso pudiera repetirse indefinidamente, ¿qué dimensiones tendría la caja final?

La utilización del material facilita la representación mental en las primeras iteraciones, pero estamos trabajando en el espacio y el número necesario de piezas necesarias para construir la figura que se añade crece con gran rapidez y esto “afortunadamente” obligará al alumno a utilizar como recurso representaciones gráficas en el plano que pondrán a prueba su imaginación espacial. Describir la variación de la forma de la caja conduce a reconocer que la idea de “alargada”, “ancha”,...solo puede precisarse comparando las razones  $b/a$  y  $c/b$ .

Lo primero que observamos es que las cajas se añaden siguiendo la secuencia: “a la derecha”, “por delante”, “por abajo”, “a la derecha”, “por delante”, “... Empezamos con un cubo. Añadimos otro cubo a la derecha y obtenemos una caja  $1 \times 1 \times 2$ . A éste le añadimos por delante otra  $1 \times 1 \times 2$  y obtenemos una caja  $1 \times 2 \times 1$ . Y así sucesivamente...

El enunciado sugiere describir las cajas ordenando sus dimensiones en orden creciente, es decir de la forma  $a \times b \times c$  con,  $a \leq b \leq c$  independientemente de su disposición. Es imprescindible admitir este convenio si queremos descubrir el patrón seguido en las sucesivas transformaciones. Esta actividad es un claro ejemplo de la relevancia en Matemáticas de la elección de una notación y codificación apropiada (Figura 12).

caja inicial	caja añadida	caja final	$b/a$	$c/b$
$1 \times 1 \times 1$	$1 \times 1 \times 1$	$1 \times 1 \times 2$	$1/1$	$2/1$
$1 \times 1 \times 2$	$1 \times 1 \times 2$	$1 \times 2 \times 2$	$2/1$	$2/2$
$1 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 3$	$2/2$	$3/2$
$2 \times 2 \times 3$	$2 \times 2 \times 3$	$2 \times 3 \times 4$	$3/2$	$4/3$
$2 \times 3 \times 4$	$3 \times 3 \times 4$	$3 \times 4 \times 5$	$4/3$	$5/4$
$3 \times 4 \times 5$	$4 \times 4 \times 5$	$4 \times 5 \times 7$	$5/4$	$7/5$
$?$	$?$	$?$	$\vdots$	$\vdots$

Figura 12

La tabla ayuda a reconocer lo que sucede y descubrir la ley de recurrencia: “Con excepción de las 4 primeras, todas las cajas iniciales son  $a \times b \times c$  con  $a < b < c$ , siendo por tanto todas las caras rectángulos. En cada paso adosamos a una de las caras de mayor área, es decir a una de las dos  $b \times c$ , una caja de dimensiones  $b \times b \times c$ . El resultado obtenido es una caja final  $b \times c \times (a+b)$ , que se convierte en la caja inicial de la fila siguiente”.

Observamos ahora la columna de las figuras finales... Efectivamente, si eliminamos el primer término de la sucesión de Padovan obtenemos precisamente la sucesión de las dimensiones menores. Si eliminamos los dos primeros, obtenemos la de las dimensiones intermedias. Y si eliminamos los tres primeros, la de las dimensiones mayores. Por tanto, las cajas finales siempre tienen sus dimensiones iguales a tres términos consecutivos de la sucesión de Padovan, de esta forma, al hacer tender a infinito el número de iteraciones, los

cocientes y convergen al *número plástico*. Podríamos decir que las cajas que vamos obteniendo son cada vez “*más parecidas*” a una caja determinada por dos “*rectángulos plásticos*”, Figura 13, lo que se conoce como “*caja plástica*”.

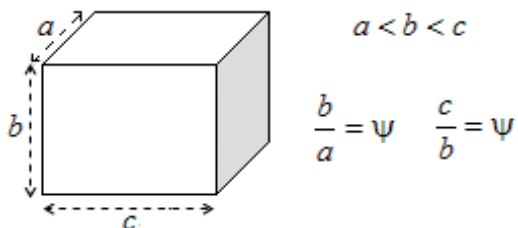


Figura 13

¿Cumple la “*caja plástica*” las condiciones de la generalización que estamos buscando? La relación algebraica  $\phi^2 = \phi + 1 \Leftrightarrow \phi / (\phi + 1) = 1 / \phi$  se traduce geoméricamente en la construcción de la Figura 14, donde los puntos A, B y C están alineados y solamente puede generalizarse al espacio con la que muestra la Figura 15, si en ella los tres puntos señalados también están alineados. Esto ocurre.

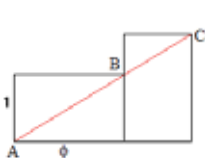


Figura 14

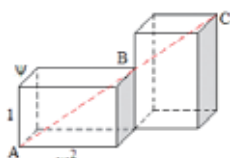


Figura 15

La comprobación es especialmente sencilla, si consideramos un sistema de referencia adecuado, como el de la Figura 16, en donde el eje de abcisas sería la perpendicular por A al plano del papel.

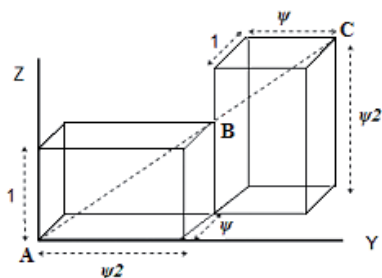


Figura 16

En este caso  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(\psi, \psi^2, 1)$  y  $C(\psi+1, \psi^2+\psi, \psi^2)$  y expresamos la noción de proporcionalidad en términos de vectores, por tanto bastará comprobar que los vectores:

$$[\vec{AB}] = (\psi, \psi^2, 1) \text{ y } [\vec{BC}] = (1, \psi, \psi^2 - 1)$$

y tienen la misma dirección. En efecto:

$$\psi^3 - \psi - 1 = 0 \Leftrightarrow \psi = \frac{1}{\psi^2 - 1} \Leftrightarrow \frac{\psi}{1} = \frac{\psi^2}{\psi} = \frac{1}{\psi^2 - 1}$$

¿Hay algún otro “parecido” entre el *número de oro* y el *número plástico*? La respuesta es, sí. La presencia y protagonismo de la *proporción áurea* en Arquitectura y Diseño se debe especialmente a que se puede definir un sistema de medidas basado en el número de oro. Un *sistema de medidas* es una sucesión de segmentos con longitud en progresión geométrica de razón  $p = \phi$  con la condición de que al “*sumar*” o “*restar*” dos medidas consecutivas del sistema, se obtiene otra medida del sistema. Eligiendo se cumplen las dos condiciones, Figura 17, pues  $\phi + 1 = \phi^2 \Leftrightarrow \phi - 1 = \phi^{-1}$ .



Figura 17

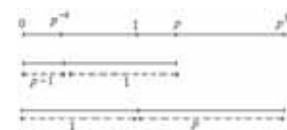


Figura 18

Pero tomando  $p = \psi$ , Figura 18, conseguimos también un sistema de medidas. De la igualdad  $\psi + 1 = \psi^3$  se deduce que cumple la “*condición suma*” y la “*condición resta*” también por verificarse  $\psi - 1 = \psi^4$ , pero a diferencia del caso anterior, ahora las dos igualdades no son equivalentes, la segunda es una consecuencia de la relación de recurrencia (4). En efecto:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-5} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 = \frac{a_{n-5}}{a_{n-1}} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} - 1 = \frac{1}{\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \frac{a_{n-3}}{a_{n-4}} \cdot \frac{a_{n-4}}{a_{n-5}}}$$

y los cinco cocientes que aparecen en la igualdad convergen a  $\psi$ , por tanto  $\psi - 1 = \psi^4$ .

Tenemos de esta forma dos números mayores que 1,  $\phi$  y  $\psi$ , que son solución de la ecuación  $x + 1 = x^r$ ,  $r = 2, 3$ , y que son también solución de la ecuación para algún valor entero positivo de  $s$ . Intentemos dar un paso más en el proceso de generalización considerando también los valores  $s = 4, 5, 6, \dots$ . Las soluciones que obtengamos podrán definir también un sistema de medidas y formarán la familia de los *números mórficos* (AArts, J. Fokkink, R. J. y Kruijtzter, G, 2001):

La ecuación polinómica  $x + 1 = x^r$ , no tiene solución para  $r = 1$ , pero para  $r = 2, 3, 4, \dots$  tiene siempre una única solución positiva, irracional, mayor que 1, por tanto para encontrar más *números mórficos* sólo hay que hallar el parámetro  $s$  que

Un número mórfico es un número real  $p > 1$  que es solución del sistema:

$$\begin{cases} x+1 = x^r \\ x-1 = x^{-s} \end{cases}, \text{ para algún valor natural de } r \text{ y } s.$$

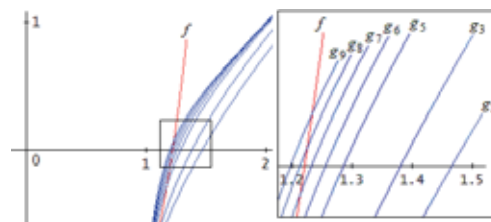


Figura 19

determine una ecuación de la forma  $x-1 = x^{-s}$ , que comparta esa solución. En este caso no podremos apoyarnos en modelos geométricos, pero si podemos recurrir al lenguaje funcional...

#### Actividad 4

**Objetivos:** Obtener elementos de la familia de los números mórficos.

**Conocimientos previos:** Concepto de número mórfico. Aproximación de soluciones irracionales de una ecuación polinómica. Resolución gráfica de sistemas.

**Materiales:** Calculadora gráfica y ordenador (programa Derive).

Los números mórficos son números irracionales mayores que 1 que son solución del sistema formado por dos ecuaciones, una de la forma  $x+1 = x^r$  y otra como  $x-1 = x^{-s}$  donde  $r$  y  $s$  son dos números enteros positivos. Al considerar  $r=2$  y  $s=1$  tenemos el número de oro. Para  $r=3$  y  $s=4$  tenemos el número plástico.

a) ¿Sabrías encontrar el número mórfico asociado al valor  $r$ ? ¿Y al  $s$ ?

b) Investiga otras posibilidades para el valor  $r$ ; ¿Cuántos números mórficos encuentras?

Empezamos por  $r = 4$ . Gracias a la calculadora gráfica, podemos hallar rápidamente y sin dificultad la solución aproximada de la ecuación  $x^4 - x - 1 = 0$ . Es 1'220744084... Ahora el problema es inverso, hay que reconocer, cual de las ecuaciones  $x-1 = x^{-1}$ ,  $x-1 = x^{-2}$ ,  $x-1 = x^{-3}$ ,  $x-1 = x^{-4}$ ,  $x-1 = x^{-5}$ ,... tiene esa misma solución. Tampoco es tarea difícil, si representamos en un mismo sistema de coordenadas las funciones:

$$f(x) = x^4 - x - 1, g_s(x) = x - 1 - x^{-s}, s = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$$

Todas las gráficas pasan por el punto (1, -1). No necesitamos evidentemente representar  $g_1$  ni  $g_4$  pues sus soluciones ya sabemos que son  $\phi$  y  $\psi$ .

La representación gráfica, Figura 19, muestra que las soluciones de las ecuaciones  $x-1 = x^{-s}$  son mayores que 1'220744084... y la correspondiente a  $s=8$  es ya menor. No necesitamos seguir buscando pues la sucesión de funciones  $g_s$  corta al eje de abscisas en puntos que originan una sucesión estrictamente decreciente y las otras soluciones serían también menores. Luego no existe ningún número mórfico asociado a  $r=4$ . Tampoco lo encontraremos para  $r=5$ , ni para valores superiores. Es inútil seguir buscando, Jan Aarts, Robbert Fokkink y Godfried Kruijtzter demostraron en 2001 que solo hay dos, el número de oro y el número plástico. Por tanto son los únicos números que generan un sistema de medidas ideal.

Entonces, ¿los números metálicos no son una buena generalización del número de oro? Sí, lo son en el plano, si somos menos exigentes en la noción de sistema de medidas. Los requisitos exigidos tienen su razón de ser en garantizar la armonía de las composiciones realizadas con las medidas de la escala y esto puede darse cuando por yuxtaposición (suma) o superposición (resta) de los segmentos obtengamos otro de la sucesión. Por tanto también podrían diseñarse composiciones armoniosas si acumulamos o superponemos "varias veces" un segmento a otro consecutivo. Se relajarían las condiciones exigidas admitiendo que "al sumar o restar a un elemento de la sucesión  $m$  veces el anterior se obtenga otro de la sucesión" y eso sucede cuando consideramos como base los números metálicos  $\sigma_m$ . Obviamente la "condición suma" se sigue de la relación de recurrencia asociada: "el elemento del lugar  $n$  de la progresión geométrica es suma de  $m$  veces el término del lugar  $n-1$  y el del lugar  $n-2$ ". Y la "condición resta" también pues "al restar a un elemento de la sucesión,  $m$  veces el anterior se obtiene otro de la sucesión (justo el anterior al que está restando)":

$$x^2 - mx - 1 = 0 \Leftrightarrow x - m = x^{-1} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - mx = 1, x^3 - mx^2 = x, \dots \\ 1 - mx^{-1} = x^{-2}, x^{-1} - mx^{-2} = x^{-3}, \dots \end{cases}$$

No deja de ser curioso que los cercanos parientes planos del número de oro sean tan numerosos y su familia espacial sea tan reducida...



El número plástico aparece esencialmente vinculado a la tercera dimensión, pero también lo encontramos en situaciones geométricas planas. Como ejemplo, este problema que podría también proponerse en la opción B del cuarto curso de la ESO.

**Problema:** Tenemos que descomponer un cuadrado de lado 1 cm. de acuerdo con las siguientes reglas:

(i) Hacemos un corte paralelo a uno de los lados para obtener dos rectángulos con un lado común. (ii) En uno de los dos rectángulos hacemos un corte perpendicular al anterior de manera que obtengamos un rectángulo y un cuadrado con un lado común.

a) ¿De qué forma se puede hacer, si queremos que los rectángulos obtenidos sean semejantes? ¿Cuáles serían las dimensiones de las partes que se obtienen?

b) Modificamos la regla (i) haciendo 2 cortes paralelos al lado para obtener dos rectángulos iguales adosados y la norma (ii) haciendo 2 cortes perpendiculares para dividirlo en un cuadrado y dos rectángulos. ¿Cómo lo haríamos para que los rectángulos sigan siendo semejantes? ¿Cuales son ahora las dimensiones de las figuras obtenidas?

c) Generaliza el apartado b) admitiendo n cortes en (i) y en (ii).

d) Mantenemos la regla (i) inicial y modificamos la (ii) para obtener dos rectángulos estrictos ¿De qué forma conseguimos que los tres rectángulos obtenidos sean semejantes? ¿Qué dimensiones tendrían los rectángulos?

En el apartado a), salvo giros y simetrías, solo podemos descomponer el cuadrado de una forma, Figura 20.

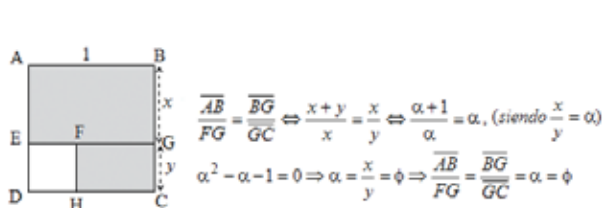


Figura 20

El primer corte solo puede realizarse de manera que  $(x+y)/x = x/y = \phi$ . Como  $x+y=1$ , tenemos que  $x = \phi^{-1} = \phi - 1$  y por tanto  $y = 2 - \phi$ . Los rectángulos son  $1 \times (\phi - 1)$ ,  $(\phi - 1) \times (2 - \phi)$  y  $(2 - \phi) \times (2 - \phi)$ : “Un cuadrado puede descomponerse en dos rectángulos áureos y un cuadrado”.

En el caso del segundo apartado, la situación del cuadrado blanco es irrelevante. Lo supondremos a la izquierda, y salvo giros o simetrías, la descomposición es la Figura 21.

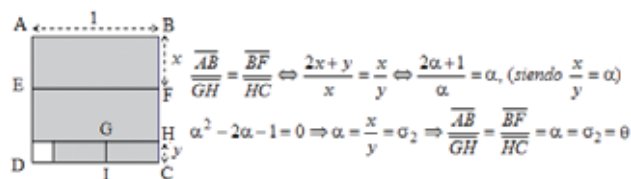


Figura 21

Los dos primeros cortes deben realizarse tales que  $(2x+y)/x = x/y = \theta$ . Encontramos en este caso el número de plata. Ahora  $2x+y=1$ ,  $x = \theta^{-1}$ ,  $\theta - 2$ ,  $y = 5 - 2\theta$  y los rectángulos son  $1 \times (\theta - 2)$ ,  $(\theta - 2) \times (5 - 2\theta)$  y  $(5 - 2\theta) \times (5 - 2\theta)$ . Como el cuadrado podría estar en el centro o a la derecha, tenemos 3 formas equivalentes de hacerlo.

En cualquier caso: “Un cuadrado puede descomponerse en 4 rectángulos de plata y un cuadrado”.

La generalización al caso de n cortes es inmediata y aparecen los números metálicos  $\sigma_m$ .

$$\frac{nx+y}{x} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow \frac{nx+1}{\alpha} = \alpha \quad (\text{siendo } \frac{x}{y} = \alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 - n\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \sigma_n$$

y obtenemos los valores  $x = (\sigma_n)^{-1} = \sigma_n - n$ ,  $y = (n^2 + 1) - n\sigma_n$ : “Un cuadrado se puede descomponer en 2n rectángulos metálicos  $\sigma_m$  y un cuadrado”.

Finalmente si seguimos las reglas del apartado d) solo podemos descomponer el cuadrado como se ve en la Figura 22

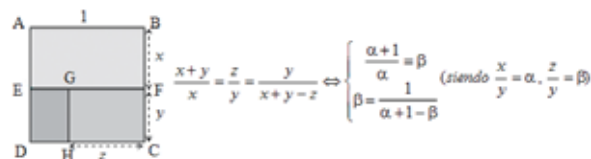


Figura 22

Despejando  $\beta$  en la primera ecuación del sistema y sustituyendo en la segunda, tenemos

$$\alpha^3 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \psi \Rightarrow \beta = \psi^2 \Rightarrow x = \psi^{-2}, y = \psi^{-3}, z = \psi^{-1}.$$

Los tres rectángulos semejantes son:

$$1 \times \psi^{-2}, \psi^{-1} \times \psi^{-3}, \psi^{-3} \times (1 - \psi^{-1})$$

“Un cuadrado se puede descomponer en tres rectángulos semejantes, los tres con lados en razón  $\psi^2$ ”.

Como era de esperar, no podremos aumentar el número de cortes y seguir teniendo rectángulos semejantes...

## NOTAS

- <sup>1</sup> *Un viatge a l'espai*. <http://www.upc.edu/ea-smi/personal/claуди/materials.html>. (Página personal de Claudi Alsina).
- <sup>2</sup> En el papiro de Ramsés IV, se describe la *Cámara de Oro* que contenía la tumba del rey, asignándole las dimensiones 16 codos de largo, 16 codos de ancho y 10 codos de alto.
- <sup>3</sup> Figura cuya yuxtaposición a una figura dada produce una figura resultante semejante a la figura inicial.
- <sup>4</sup> El ingeniero francés Gérard Cordonnier en 1928 llama a este

Este problema representa una forma sencilla y elegante de presentar de forma unificada las dos generalizaciones significativas de la proporción áurea, los números metálicos  $\sigma_m$  y los números mórficos. ■

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- AARTS, J. , FOKKINK, R. J. and KRUIJTZER, G.(2001), “Morphic Numbers”, *Nieuw Archief voor Wiskunder*. 5-2, Maart, 56-58.
- ALSINA, C (2007): “El número de oro es plano ¡Pásalo!”, *Suma*, nº 54, 75-78.
- ALSINA, C y GARCÍA-ROIG, J.L. (2001), “On plastic numbers” *Journal of Mathematics & Design*, Vol. 1, No 1, 13-19.
- COLMAN, S y COAN, C.A.(1920): *Proportional Form*, G.P. Putnam’s Sons, London-New Cork.
- GHYKA, M. C. (1978): *El Número de Oro*, Editorial Poseidón, Barcelona.
- GHYKA, M. C. (1979): *Estética de las proporciones en la Naturaleza y en las Artes*, Editorial Poseidón, Barcelona.
- LAAN, H. van der (1960): *Le Nombre Plastique; quinze Leçons sur l’Ordonnance architectonique*, Brill, Leiden.
- PADOVAN, R (2002): “Dom Hans Van Der Laan and the Plastic Number”, en *Nexus IV: Architecture and Mathematics*, Kim Williams Books. Florence.
- número “nombre radiant”. Fue el primero que consideró un sistema de proporciones asociado a la solución de la ecuación  $x^3=x+1$ , pero sus aportaciones no tuvieron repercusión, tal vez por su afición al esoterismo y las apariciones religiosas...
- <sup>5</sup> La fracción continua del número plástico no puede ser periódica. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) probó que un número es irracional cuadrático si y solo si su descomposición en fracciones continuas es periódica (no necesariamente periódica pura).
- <http://www.nexusjournal.com/conferences/N2002-Padovan.html>
- REDONDO, A. (2006): “Algunos resultados sobre Números Metálicos”, *Journal of Mathematics & Design*, Vol. 6, No 1, 29-44.
- REDONDO, A. Y HARO, M. J. (2005): “Fracciones continuas, números metálicos y sucesiones generalizadas de Fibonacci”, *Suma*, nº 50, 53-63.
- SPINADEL, V. (1998): *From the Golden Mean to Chaos*, Nueva Librería, Buenos Aires.
- SPINADEL, V. (1999): “The family of metallic means”, *Visual Mathematics*, 1, No. 3  
<http://members.tripod.com/vismath1/spinadel/>
- SPINADEL, V. y REDONDO, A (2007): “Nuevas propiedades de la familia de Números Metálicos”. Conferencia plenaria. *5th Mathematics & Design International Conference, Actas CD ROM ISBN 978-85-7114-175-4*, Blumenau.
- STEWART, I. (1996): “Mathematical Recreations: Tales of a neglected number”, *Scientific American*, 274, 92-93. (En *Investigación y Ciencia*, 239, Agosto 1996).