SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 105-110

El embrujo de los números perfectos

Los matemáticos han intentado en vano desde hace mucho tiempo descubrir alguna secuencia en el orden de los números primos, pero tengo razones para creer que éste es un misterio en el que la mente humana jamás podrá penetrar.

Leonhard Euler

Empezábamos hace ya más de dos años, allá por la primavera del 2005, esta sección extraña y polisémica en su título. En su presentación decía que pretendíamos que fuese duradera. Por suerte y por desgracia las cosas duran lo que duran y los equipos de dirección de SUMA también tienen derecho a un merecido descanso relativo. Así que con esta octava entrega cerramos un capítulo que confíamos os haya resultado cuando menos entretenido.

Y si entonces acompañábamos a Don Quijote y Sancho a desfacer entuertos matemáticos hoy nos lanzamos a perseguir un sueño de más de 2 000 años: la búsqueda de los números perfectos.

En matemáticas, como en la vida misma, lo simple y lo sencillo suele ser a la postre lo más bello. Y qué más simple que los números naturales. Esta pretendida simplicidad y las sorprendentes propiedades y relaciones entre ellos ya atrajo la

...un sueño de más de dos mil años: la búsqueda de los números perfectos.

Antonio Pérez Sanz
decabeza@fespm.org

atención de los fundadores de nuestra ciencia, los pitagóricos. A ellos les debemos todas las clasificaciones tan familiares de los números: pares, impares, primos, compuestos, abundantes, deficientes... y ¡*perfectos*!

El mejor de los nombres para una definición anodina:

> Un número perfecto es aquel que coincide con la suma de sus partes alícuotas.

En lenguaje más prosaico: el que es igual a la suma de sus divisores, excluído él mismo como divisor.

Seguramente Dios creó el mundo en 6 días, porque 6 es un número perfecto:

$$6 = 1 + 2 + 3$$

Y puso a la Luna a dar vueltas alrededor de la Tierra, una vez cada 28 días porque 28 es otro número perfecto:

$$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$$

Ya no se le ocurrió qué hacer con el siguiente 496 y parece que lo dejó en paz:

$$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248$$

Y los hombres tomaron el relevo de la divinidad y siguieron investigándolos atraídos por su magia y por su escasez. Los números perfectos, como los hombres (o las mujeres) perfectos, son difíciles de encontrar.

Euclides habla de ellos en los *Elementos*, en los tres libros dedicados a la Aritmética, el VII, el VIII y el IX. Precisamente en este último Euclides nos deja perplejos con la proposición 36, que curiosamente es la que cierra el libro y que proporciona un método original para encontrar números perfectos.

> Si tantos números como se quiera a partir de una unidad se disponen en proporción duplicada hasta que su total resulte primo, y el total multiplicado por el último produce algún número, el producto será perfecto.

Lo curioso del caso es que a pesar de un resultado tan aplastante, del que por cierto nos da una preciosa demostración...¡geométrica!, Euclides sólo habla de los dos primeros números perfectos; el 6 y el 28. En este esquema de construcción, 6 y 28 corresponden a $n = 1$ y a $n = 2$

$$(1 + 2) \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$(1+ 2 + 2^2) \cdot 2^2 = 7 \cdot 4 = 28$$

Algo parecido le ocurre a Teón de Esmirna, a caballo entre el siglo primero y el segundo de nuestra Era, en su obra *Expositio rerum mathematicarum*. Se atasca en el 28.

El gran impulsor de los números perfectos, y de paso de los números poligonales, es un neopitagórico militante: Nicómaco de Gerasa, a principios del siglo II d. de C. Es él en su *Introducción a la Aritmética*, libro que acabaría convertido en una especie de libro de texto a lo largo de la Edada Media, el que introduce los términos *números abundantes* y *números deficientes* para aquellos cuyas partes alicuotas suman respectivamente más o menos que el propio número. Los términos *abundante* y *deficiente* seguramente están elegidos pensando en la cantidad de divisores del número.

> (...) en lo que se encuentra entre demasiado y demasiado poco, es decir en el igual, se produce la virtud, la medida justa, la armonía y la belleza, del que la forma más ejemplar es la especie de número llamado *perfecto*.

Como buen pitagórico Nicómaco habla de los números como de seres vivos, con propiedades no sólo físicas sino también morales, que definen su propia esencia. En el fondo los números son la sustancia de todas las cosas. En el cap. XVI, nos dice:

> Encontramos que, igual que las cosas bellas y excelentes son escasas y fáciles de contar, mientras que las cosas feas y viles abundan, de igual forma los números abundantes y los deficientes son muy numerosos y se los encuentra sin

Como buen pitagórico Nicómaco habla de los números como de seres vivos, con propiedades no sólo físicas sino también morales, que definen su propia esencia. En el fondo los números son la sustancia de todas las cosas.

El teorema de Euclides-Euler de los números perfectos

Si $2^{n+1}-1$ es primo, entonces $2^n(2^{n+1}-1)$ es perfecto y todo número perfecto tiene esa forma.

Y otra vez Euler, en su Tratactus de numerorum doctrina, *nos proporciona una demostración que luego completará en su obra* De numeris amicabilibus.

> regla y sin concierto, mientras que los números perfectos son fáciles de contar y dispuestos según un orden conveniente. Así encontramos uno solo entre las unidades, el 6; otro solo entre las decenas, 28; un tercero entre las centenas, el 496 y un cuarto en el interior de los millares, 8128. Y encontramos que terminan alternativamente en 6 y en 8 y que siempre son pares.

Por fin aparecen los cuatro primeros números perfectos de forma explícita: 6, 28, 496, 8128. Además Nicómaco nos traduce a lenguaje sencillo la proposición de Euclides. De forma un tanto alambicada viene a decir, en lenguaje actual:

> Si la suma de las n primeras potencias de 2 es un número primo, entonces el producto de la suma por la última potencia sumada es un número perfecto.
>
> Si $(1+2+2^2+...+2^n)$ es primo, entonces $(1+2+2^2+...+2^n)\cdot 2^n$ es perfecto.

$$(1+2+2^2+2^3+2^4)\cdot 2^4 = 31\cdot 16 = 496$$
$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6)\cdot 2^6 = 127\cdot 64 = 8128$$

Todo parece encajar a la perfección. Pero el bueno de Nicómaco se aventura por caminos mucho más peligrosos.

Según sus palabras entre 10 000 y 100 000 ha de haber un número perfecto y sólo uno. Y lo mismo ha de suceder entre 100 000 y 1 000 000. Y entre 10^6 y 10^7... y, en general, entre 10^n y 10^{n+1}.

Pero, incomprensiblemente, no nos dice cuáles son los números perfectos de 5, 6 y 7 cifras. Bueno, en realidad no nos da ninguno a partir de 8128... Se ve que no estaba por la labor de perder su tiempo comprobando si

$$(1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^n) = 2^{n+1}-1$$

era o no un número primo para cada valor de n, a partir de 6.

Propongo al lector que haya llegado hasta aquí, que calcule DE CABEZA (o con una calculadora o una hoja de cálculo) el quinto número perfecto. Merece la pena....¡Sorpresa!

Los 10 primeros

Los que lo hayan hecho habrán descubierto por qué Nicómaco no siguió con la lista. Se había equivocado en algo...

Por cierto, los números de la forma $2^k - 1$, que son primos son los populares primos de Mersenne. El más grande conocido en 2006 era:

$$2^{32582657}-1$$

Un número con 9 808 358 dígitos. Es el 44º número primo de Mersenne

Así que podemos afirmar que el mayor número perfecto conocido hasta la fecha es:

$$(2^{32582657}-1) \cdot 2^{32582656}$$

Y por ahora es el cuadragésimo cuarto número perfecto. ¡Sólo 44 números perfectos con menos de 10 millones de dígitos! Efectivamente son escasos. Muy escasos.

El número primo de Mersenne más grande conocido en 2006 era:

$$2^{32582657}-1$$

Un número con 9.808.358 dígitos. Es el cuadragésimo cuarto número primo de Mersenne.

Y sin embargo Nicómaco afirma que hay infinitos. ¿En qué se basaría? ¿Simple intuición? Ni Nicómaco ni nadie después ha podido demostrar que sea cierto y tampoco nadie ha demostrado que no lo sea. ¿Existirán de verdad infinitos números perfectos?

Cuando Euclides hace su demostración de la proposición 36 del libro IX y encuentra la máquina de fabricar números perfectos, nunca pensó que sería una máquina con tan poca productividad. Tanto esfuerzo para tan poco fruto.

De hecho hasta el siglo XX sólo se conocían 9 números perfectos. El quinto, que tú, lector, has podido calcular con una simple calculadora científica en unos segundos, se descubre en el siglo XV.

$$(2^{13}-1)\cdot 2^{12} = 33550336$$

El sexto y el séptimo se los debemos a un matemático boloñés del siglo XVI poco conocido, Pietro Antonio Cataldi, que tuvo la santa paciencia de hacer una tabla con la factorización de los 800 primeros números. El sexto y el séptimo son

$$(2^{17}-1) \cdot 2^{16} = 8\ 589\ 869\ 056$$
$$(2^{19}-1) \cdot 2^{18} = 137\ 438\ 691\ 328$$

¡Doce dígitos! No está mal. Animado por el éxito Cataldi afirmó, sin probarlo claro, en *Utriusque Arithmetices* que para los exponentes p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 la expresión

$$2^{p-1}(2^p - 1)$$

daba números perfectos.

Tenía razón para los primeros. Para p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, pero sólo una de sus cuatro siguientes aserciones, 23, 29, 31, 37, es correcta, la correspondiente a 31. Será el propio Fermat el encargado de demostrar que los exponentes 23 y 37 no proporcionan números perfectos. Sin embargo nada dice de 29 y 31. Y no es de extrañar, que ya lo dice el propio Mersenne hablando del trabajo de factorizar estos números de tantos dígitos:

> (...) para decir que un número dado de 15 o 20 dígitos es primo, o no, haría falta todo el tiempo del mundo.

Por cierto, el avezado lector ya habrá descubierto que el pobre Nicómaco estaba poco inspirado pues, en contra de su afirmación de alternancia entre las cifras 6 y 8 como terminaciones, el quinto y el sexto números perfecto terminan ambos en 6. Se le puede disculpar el lapsus sobre todo pensando en sus pobres herramientas de cálculo aritmético. Con un ábaco no se podía ir muy lejos...

Para encontrar el siguiente, el octavo, hay que esperar casi doscientos años y, ¡como no!, viene presentado por un genio: el mismísimo Euler en 1732.

$$(2^{31}-1) \cdot 2^{30} = 2\ 305\ 843\ 008\ 139\ 952\ 128$$

(de 19 dígitos)

De paso demostró que el número $(2^{29}-1)$ no era primo y por tanto $(2^{29}-1)\cdot 2^{28}$ no es perfecto.

A lo largo del siglo XIX sólo se descubrirán dos nuevos números perfectos. El décimosegundo correspondiente al exponente 127:

$$(2^{127}-1)\cdot 2^{126}$$

descubierto por Lucas en 1876 y el noveno correspondiente al exponente 61:

$$(2^{61}-1)\cdot 2^{60}$$

descubierto por Pervusin en 1883.

El décimo y el decimoprimero y todos los que les siguen hasta el trigésimo primero se han descubierto ya en el siglo XX. Y los últimos seis a partir del año 2000.

Todos terminan en 6 u 8. En algo llevaba razón Nicómaco

La demostración no es complicada.

Las potencias de 2 terminan de forma secuencial en 2, 4, 8 y 6

Para los valores de n = 1, 5, 9 ... sólo el primero proporciona un número perfecto, el 6. El resto, al ser n + 1 par, hace que $(2^{n+1}-1)$ no sea primo.

El resto de los números perfectos sale de las filas segunda y cuarta y por tanto terminan forzosamente en 6 u 8, aunque no de forma alternada.

n	Terminación de 2^n	Terminación de $2^{n+1}-1$	Terminación de $(2^{n+1}-1)\cdot 2^n$
1, 5, 9...	2	3	6
2, 6, 10...	4	7	8
3, 7, 11...	8	5 (no es primo)	0
4, 8, 12...	6	1	6

Lo que sí está claro es que todos los números perfectos generados con la fórmula de Euclides son pares. Pero ahora nos asalta otra duda: ¿habrá números pares que sean perfectos y que no se ajusten a esa fórmula? Es decir, ¿será cierto el recíproco de la proposición 36 de Euclides para los números pares?

El teorema de Euclides-Euler de los números perfectos

> Si la suma de las n primeras potencias de 2 es un número primo, entonces el producto de la suma por la última potencia sumada es un número perfecto. Y además todo número perfecto par es de esta forma.

Y otra vez Euler, en su *Tratactus de numerorum doctrina*, nos proporciona una demostración que luego completará en su obra *De numeris amicabilibus*.

Veamos esta demostración, según sus propias palabras:

> Un número perfecto N es un número cuya suma de sus divisores S(N) es dos veces más grande que él mismo. Así, si S(N) = 2N , N es un número perfecto.
>
> Si es par será de la forma $2^n A$, siendo A un número impar, primo o compuesto. Ahora bien, si
>
> $N = 2^n$ A , tendremos que S(N) = $(2^{n+1}-1)$ S(A), de donde se deduce que
>
> $$\frac{S(A)}{A}=\frac{2^{n+1}}{(2^{n+1}-1)}$$
>
> Como el numerador es una unidad mayor que el denominador, no puede superar a la suma de los divisores del denominador, es decir, es igual o inferior a la misma. En el segundo caso no hay solución, y en el primero no existirá solución a menos que $2^{n+1}-1$ no sea un número primo. Así cada vez que $2^{n+1}-1$ sea un número primo, es preciso tomar $A=2^{n+1}-1$, y entonces tendremos un número perfecto $N=2^n(2^{n+1}-1)$.
>
> Así todos los números perfectos pares están contenidos en esta fórmula $2^n\,(2^{n+1}-1)$, con la condición de que $(2^{n+1}-1)$ sea un número primo, lo que sólo ocurre si n +1 es un número primo, aunque no es cierto que todo número primo de la forma n+1 haga que $2^{n+1}-1$ sea prim.

Euler comete en esta demostración un pequeño fallo, al suponer que al ser

$$\frac{2^{n+1}}{2^{n+1}-1}$$

irreducible, también lo ha de ser la fracción

$$\frac{S(A)}{A}$$

Podría ocurrir que

$$\frac{S(A)}{A}=\frac{k\cdot 2^{n+1}}{k\cdot(2^{n+1}-1)}.$$

Euler analizará este caso y demostrará que es imposible en su trabajo *De numeris amicabilibus*.

Pero Euler no se atreve a afirmar que éstos sean los únicos números perfectos. Es más, afirma que hasta entonces nadie lo ha demostrado, pero que eso no significa que existan.

¿Existen números perfectos impares?

Descartes, en una carta a Mersenne, ya confíaba poder demostrar que los únicos números perfectos pares eran los de Euclides y que si había números perfectos impares tenían que ser el producto de un número primo por un cuadrado cuya raíz fuese un producto de números primos.

Euler, cómo no, otra vez Euler, comenzaría la carrera de descubrir como habría de ser ese raro ejemplar de número perfecto impar en el caso poco probable de que existiera...

> Si existe un tal número perfecto tendrá la forma
>
> $$(4n+1)^{4\lambda+1}\,P^2$$
>
> donde P es un número impar y $4n + 1$ un número primo.

Sylvester, en 1888, basándose en el hecho de que la suma de los inversos de los divisores de un número perfecto es igual a 2, demostró, y no es muy complicado, que de existir un número perfecto impar debe tener al menos tres factores primos distintos.

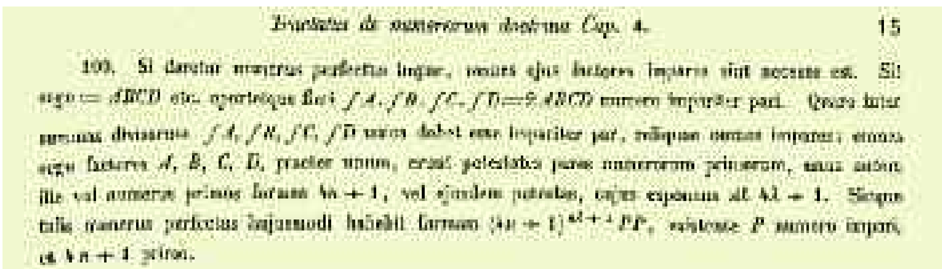
Hoy gracias a la ayuda de potentes ordenadores sabemos que de existir un número perfecto impar ha de tener al menos 8 factores primos distintos y que ha de ser mayor que 10^{300}.

A la mayoría de nosotros este dato nos haría pensar que es inútil proseguir la búsqueda. Y sin embargo sólo hay 12 numeros perfectos pares con menos de 300 cifras...

La búsqueda, o la demostración de que no hay que continuar buscando, nos sigue esperando.

Me temo que durante muchos años los números perfectos van a traer a los matemáticos...

DE CABEZA



Epígrafe 109 del Tratactus de numerorum doctrina

REFERENCIAS BIBLIOGÁFICAS

CRUBELLIER y SIP, (1994): *Histoires de problèmes. Histoire des mathématiques,* IREM, París.

DUNHAM, William, (2000): *Euler el maestro de todos los matemáticos*, Ed. Nivola, Madrid.

EUCLIDES, (1994): *Elementos*, *Libros V-IX*. Ed Gredos. Madrid.

EULER, (1994): *Tratactus de numerorum doctrina capita sedecim, Opera Omnia vol. I-V,* Leipzig. Disponible en Internet en: *http://math.dartmouth.edu/~euler/pages/E792.html*

EULER (1994): *De numeris amicabilibus*. *Opera Omnia vol. I-V*. Leipzig . Disponible en Internet: *http://www.math.dartmouth.edu/~euler/pages/E152.html*

WAGON, Stan, (1985): “Perfect numbers” en *The Mathematical Intelligencer*, 7 (2) (1985), pp. 66-68.