SUMA 56
Noviembre 2007, pp. 39-42

Los misterios de la fracción prohibida

En este artículo se muestran varios significados posibles para la misteriosa fracción (a+c)/(b+d) asociada a dos fracciones a/b y c/d. Haciendo esto encontramos algunas consideraciones didácticas interesantes.

In this article we show several possible meanings for the mysterious fraction (a+c)/(b+d) associated to two fractions a/b and c/d. In doing this we find some interesting didactical remarks.

La multiplicación de fracciones $a/b*c/d=(ac)/(bd)$ es extraordinariamente simple de ejecutar y recordar: se multiplican numeradores y se multiplican denominadores. Sin embargo la suma $a/b+c/d=(ad+bc)/(bd)$ tiene una inesperada complejidad. Por ello, desde la noche de los tiempos, los estudiantes acostumbran a calcular por iniciativa propia *la suma alternativa*

$$\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d} \quad (*)$$

Salvo en algunos casos de severa incompetencia en que el profesor da por buena la igualdad (*) la reacción normal ante la aparición de (*) en clase (si el profesor sobrevive al susto) es proferir varios "¡no!, ¡no!, ¡no!" guturales seguidos de diversos ejemplos que ponen en evidencia la maldad de la suma alternativa. A partir de esta escena la fracción maldita queda totalmente prohibida y la autoridad pertinente avisa de las consecuencias que una nueva aparición de ella podría implicar, ya sea a nivel individual o colectivo.

En una encomiable actitud comprensiva ya Henri Poincaré encontró una justificación a la aparición impulsiva de la misteriosa fracción en clase:

> Sólo hay dos métodos para enseñar fracciones: cortar, aunque sea mentalmente, un pastel, o hacerlo con una manzana. Con otro método cualquiera de enseñanza, los escolares prefieren sumar numeradores con numeradores y denominados con denominadores.

Atraídos por *esta suma alternativa* hemos estado indagando matemáticamente y didácticamente el tema y quisiéramos compartir con los lectores de este artículo los sorprendentes resultados de nuestras pesquisas.

Nombre y definición

A partir de dos fracciones a/b y c/d con $c, d > 0$ se puede, legítimamente, considerar la nueva fracción $(a+b)/(c+d)$. A esta fracción se la denomina en inglés mediant (o según Ervin Wilson *freshman sum* la suma de los que están en el primer curso de la universidad). La palabra mediant tiene raíz latina pero no posee equivalente en español. Por tanto lo mejor que podemos hacer es bautizar a este objeto con un nombre, por ejemplo, la fracción mediadora, expresión que recoge el sentido de *ponerse en medio de.*

Claudi Alsina
Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona
Carme Burgués
Universidad de Barcelona. Barcelona

Como se ha visto al principio, la fracción mediadora no es el resultado de una operación interna bien definida en los números racionales $\mathbb{Q}$ pero sí puede formalizarse como una operación entre ciertos pares ordenados de enteros. Si

$$\mathbb{Z}_+ = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Z}, b > 0\}$$

podemos considerar:

$$(a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$$

En este caso con la representación vectorial de (a, b) y (c, d) en el 1º y 2º cuadrantes, permite visualizar el elemento $(a+c, b+d)$ como la suma de los vectores, es decir como diagonal principal del paralelogramo determinado por (a, b) y (c, d).

Una interesante localización

Si $a/b < c/d$, con $b, d > 0$, la fracción mediadora $(a + c)/(b + d)$ es un valor que siempre está *situado entre* las dos fracciones iniciales:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

Aritméticamente basta notar que:

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{cb-ad}{b(b+d)} = \frac{d}{b+d}\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)$$
$$\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d} = \frac{cb-ad}{d(b+d)} = \frac{b}{b+d}\left(\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right)$$

Pero en el caso usual positivo, si $0 < a/b < c/d$ con a, $b, c, d > 0$ resulta la siguiente visualización (Alsina-Nelsen, 2006).

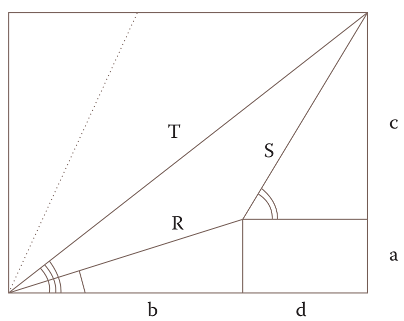

Figura 1

Si la pendiente de R es a/b y es menor que la de S que es c/d resulta que la de T que es $(a + c)/(b + d)$ debe ser intermedia.

En el caso extremo $a/b = c/d$ resultará

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

y la figura 1 pone en evidencia la necesidad de $a \cdot d = b \cdot c$ que es la condición de equivalencia de fracciones.

Cafés con leche: largos y cortos

Carme prefiere el café con leche corto de café y Claudi lo prefiere largo.

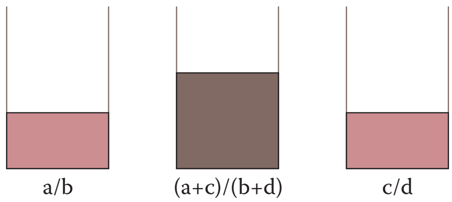

Figura 2

En mezclas de líquidos (y en cocina en general) tiene mucho sentido *considerar las razones* entre un elemento y otro: 1 parte de café por cada 2 de leche, 1 parte de café por tres de leche, ... Y en este *contexto* tiene pleno sentido calcular la *razón resultante* de mezclar, la cual corresponde a la fracción mediadora

$$\mathrm{Med}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1+1}{2+3} = \frac{2}{5}$$

Si mezclamos efectivamente café y leche se visualiza el efecto de la fracción mediadora en el color de la mezcla. Éste siempre se sitúa entre el de las 2 razones de partida (para el interés pedagógico de este tipo de visualizaciones véase (Biermann-Blum, 2002)).

Esta experiencia permite estudiar una situación sencilla del *significado de fracción como razón heterogénea*. Los alumnos entienden que si ½ representa la razón café/leche, las fracciones ⅓ y ⅔ representan relaciones parte/total (suponiendo que no hay ningún otro ingrediente). En esta situación se percibe que si una fracción se substituye por otra equivalente los efectos no son los esperados.

Observemos que en la primera situación

$$\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{5}; \qquad \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}; \qquad \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$$

es decir, la fracción ⅖ está más cercana a ⅓.

En la segunda mezcla, $3/7$ no es equivalente a $2/5$:

$$\frac{2}{4}\oplus\frac{1}{3}=\frac{3}{7};\qquad \frac{2}{4}-\frac{3}{7}=\frac{2}{28}=\frac{1}{14};\qquad \frac{3}{7}-\frac{1}{3}=\frac{2}{21}$$

Si tomamos una fracción equivalente como $20/40$ es

$$\frac{20}{40}\oplus\frac{1}{3}=\frac{21}{43};\qquad \frac{20}{40}-\frac{21}{43}=\frac{860-840}{1720}=\frac{20}{1720}=\frac{1}{86}$$

vemos que la fracción mediadora está mucho más cerca de $1/2$ que de $1/3$.

Esta situación nos lleva a considerar el papel de la *unidad de comparación* en el caso de magnitudes continuas.

La paradoja de Simpson

Esta paradoja (que tiene implicaciones estadísticas en medicina y ciencias sociales) hace ver cómo los éxitos de diversos grupos presentan resultados sorprendentes cuando los grupos se reúnen. Se puede entender muy bien con urnas de bolas blancas y negras… o con jugadores de fútbol. De nuevo las fracciones que aparecen deben interpretarse como razones.

Un jugador de fútbol A juega 10 partidos en la primera mitad de una liga y marca 4 goles; en la segunda mitad juega 20 partidos y marca 5 goles. El jugador B marca 6 goles en sus 20 partidos de la primera parte y marca 2 goles en los 10 partidos restantes. La situación parcial y global es la siguiente:

	1ª parte	2ª parte	Global
Jugador A	4/10	5/20	9/30
Jugador B	8/20	2/10	10/30

Mirando cada parte de la liga el A fue igual o mejor que el B en cada parte, pero mirando *globalmente* el B resultó mejor (ver http://es.wikipedia.org/wiki/Paradoja_de_Simpson).

El tema afecta a todos los niveles de la vida: pueden sacarse *conclusiones* diferentes según se miren poblaciones por separado o reuniendo a todas. Es el efecto de la dichosa mediadora.

Cortando cajas de Kellogs©

Junto al café con leche aparecen las cajas de cereales. Si la caja se coloca verticalmente y se corta según una sección plana resulta una sección que necesariamente es un paralelogramo.

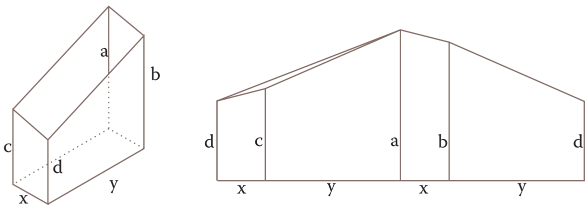

Figura 3

Designemos por a, b, c, d las alturas de los vértices del paralelogramo sección y consideremos el caso $a > b > c > d$ tal como indica la figura de la izquierda que admite un desarrollo plano como el de la derecha.

¿Qué relación debe haber entre a, b, c y d? Por tratarse de un paralelogramo, los lados opuestos deben de tener igual pendiente y por tanto $(c - d):x = (a - b):x$, es decir $a + d = b + c$. En el caso de que la sección plana no solo sea paralelogramo sino que se trate de un rectángulo, si D indica la diagonal de la tapa de abajo, deberá verificarse

$$\sqrt{D^2+(a-d)^2}=\sqrt{D^2+(b-c)^2}$$

es decir $a + c = b + d$, condición que al valer simultáneamente con $a + d = b + c$ nos lleva a $a + d = b + b + d - a$, es decir $a = b$ y $c = d$. Observemos las dos primeras pendientes en el desarrollo plano. La primera es $(c - d):x$, la segunda $(a - c):y$… y la pendiente de la línea de puntos resulta ser

$$\frac{a-d}{x+y}=\mathrm{Med}\left(\frac{c-d}{x},\frac{a-c}{y}\right)$$

apareciendo de nuevo la misteriosa fracción. Salió en el café y repite en los cereales.

Tomemos otra caja de Kellogs y ahora hagamos la sección de forma que

$$(c-d):x=(a-c):y=(a-d):(x+y).$$

Se logra con un solo corte recto al doblar la caja convenientemente. Este es un caso límite del considerado anteriormente. Cuando $x = y$ en una caja cuadrada, entonces aparece una magnífica sección rómbica.

Las sucesión de Farey

La sucesión de conjuntos F_1, F_2, F_3, … llamada de Farey viene dada por la siguiente definición: para cada entero $n \geq 1$ el conjunto F_n es el de los números racionales irreducibles a/b con

$0 \le a \le b \le n$ y m.c.d.$(a, b) = 1$. Ordenando en forma creciente los elementos en F_n resulta

$$F_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}$$
$$F_2 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}$$
$$F_3 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}\right\}$$

Si $a/b \le c/d \le e/f$ son tres fracciones ordenadas consecutivamente en uno de los conjuntos F_n entonces, necesariamente resulta:

$$bc - ad = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+f},$$

así pues la mediadora tiene pleno sentido como operación bien definida en estos conjuntos.

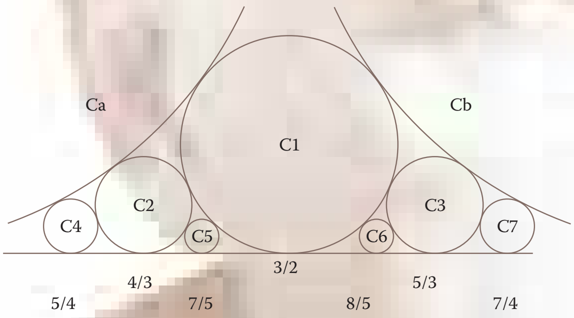

Figura 4

Los círculos de Ford

Se atribuye a Lester R. Ford el siguiente resultado: sobre la recta real (eje OX) se considera el círculo tangente $(a/b, 0)$ y radio $1/b^2$ y el círculo tangente en $(c/d, 0)$ con $c/d > a/b$ y radio $1/d^2$. Si ambos círculos son tangentes entonces (es un bonito ejercicio) existe entre ellos y la recta un tercer círculo tangente a los tres elementos... siendo el punto de tangencia a la recta el

$$\left(\frac{a+c}{b+d}, 0\right)$$

Véase la figura 4.

La función de Minkowski

Existe una patológica función cuyo sorprendente símbolo es *?* Minkowski la definió para tener una función $?(x)$ en el intervalo unidad que enviase los racionales a irracionales cuadráticos. Resulta que $?(x)$ es estrictamente creciente, singular... y lo más curioso $?(x)$ verifica la ecuación funcional

$$?\left(\frac{a+c}{b+d}\right) = \frac{?\left(a/b\right) + ?\left(c/d\right)}{2}$$

para a/b y c/d dos fracciones en (0, 1) irreducibles y consecutivas en la secuencia de Farey correspondiente (véase por ejemplo (Viader, Paradís y Bibiloni, 1998)).

Epílogo

La fracción misteriosa tiene su gracia. Pero debemos situarnos en la interpretación de razones o pendientes. Entonces multitud de ejemplos interesantes surgen. Lo encantador de las Matemáticas es lo sorprendentes que son. Incluso los errores, a veces, tienen interés. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BIERMANN, M. y BLUM, W. (2002): *Realitäts bezogenes Beweisen-Der Schorle-Berocis und andre Beispiele*, Mathematik Lehren (110), 19-22.

BOGOMOLNY, A.: "Farey Series, A Story".

http://www.cut-the-knot.org/blue/ FareyHistory.shtml

CONWAY, J.H. y GUY, R. K. (1996): "Farey Fractins and Ford Circles", *The Book of Numbers*, Springer-Verlag, pp. 152-154 y 156, Nueva York.

DENJOY, A. (1938): *Sur une fonction réelle de Minkowski*, J. Math. Pures Appl. 17, 105-155.

FAREY, J. (1816): *On a Curious Property of Vulgar Fractions*, London, Edinburgh and Dublin Phil. Mag. 47, 385.

GIRGENSOH, R. (1996): *Constructing Singular Functions via Farey Fractions*, J. Math. Anal. Appl. 203, 127-141.

MINKOWSKI, H. (1991): "Zur Geometrie der Zahlen", *In Gesammeite Abhandlungen, Vl. 2*, pp. 44-52, Nueva York, Chelsea.

VIADER, P.; PARADIS, J. y BIBILONI, L. (1998): *A New Light on Minkowski's ?(x) Function*, J. Number Th. 73, 212-227.

WEISSTEIN, E.W.: "Minkowski's Question Mark Function", From MathWorld-A Wolfram Web Resource.

http://mathworld.wolfram.com/MinkowskisQuestionMarkFunction.html

WEISSTEIN, E.W.: "Mediant", From MathWorld-A Wolfram Web Resource.

http://mathworld.wolfram.com/Mediant.html

Foto del fondo: Lester Randolph Ford (1886-1975)