

# DESARROLLO DE LA MIRADA PROFESIONAL EN ESTUDIANTES PARA MAESTROS A PARTIR DE UN MÓDULO DE ENSEÑANZA CENTRADO EN LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES

*Development of a Professional View in Pre-Service Teachers Based on a Teaching Intervention Focused on Generalization Patterns*

**Alberto Zapatera Linares**

Profesor Depto. Ciencias de la Educación.

Universidad CEU Herrera (Elche)

## RESUMEN

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo estudiantes para maestro (EPM) que participaron en un módulo de enseñanza aprendieron a reconocer evidencias de la comprensión del proceso de generalización de patrones en alumnos de Primaria. En este módulo los EPM trabajaron las dimensiones matemática y cognitiva de la mirada profesional. Los resultados obtenidos muestran que los participantes mejoraron su capacidad para identificar los elementos matemáticos presentes en la generalización de patrones y para interpretar las características de la comprensión de los alumnos de Primaria.

**Palabras clave:** mirada profesional, generalización de patrones, formación inicial, módulo de enseñanza.

## ABSTRACT

The aim of this research is to describe how pre-service teachers (PST), who took part in a teaching intervention, learned to recognise evidences in the understanding of the process of generalisation patterns by primary school pupils. In their teaching intervention the PSTs worked on the mathematical and cognitive dimensions of the professional view. The results obtained show that the participants improved their ability to identify the mathematical elements present in the generalisation patterns and to interpret the comprehension traits of primary school pupils.

**Keywords:** professional view, generalisation patterns, initial training, teaching intervention.

Recibido: 07/04/2017  
Aprobado: 08/06/2017

Enero - Junio 2017  
ISSN: 1695-4297

páginas  
37-56

Nº 14

## 1. INTRODUCCIÓN Y PLANTEAMIENTO DE LA PROBLEMÁTICA

La idea de diseñar y poner en práctica un módulo de enseñanza para desarrollar la mirada profesional de EPM emerge tanto desde la perspectiva de formadores de maestros como de la de investigadores. Desde el punto de vista de formadores de futuros docentes, nos interesa diseñar actividades formativas relevantes en las que se desarrollen competencias importantes para futuro desempeño de la labor docente de estos estudiantes para maestro. Como investigadores, nos interesa comprobar la adecuación de estas actividades y profundizar en lo que aprenden y en cómo aprenden los estudiantes para maestro a partir de estas actividades (Climent, Romero-Cortés, Carrillo, Muñoz-Catalán y Contreras, 2012).

Por otra parte, la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes es uno de los objetivos de los programas de formación de los profesores y un tema de estudio relevante en las investigaciones en didáctica de la matemática en los últimos años (Sherin, Jacobs, Philipp, 2011). El desarrollo de la competencia docente de la mirada profesional está vinculado a aprender a usar el conocimiento para reconocer las evidencias de comprensión de los alumnos y, por ello, es una competencia fundamental que se debe promover en la formación inicial de maestros.

Hemos elegido el tópico de la generalización de patrones por ser una tarea que se utiliza para iniciar y desarrollar en los alumnos el pensamiento algebraico (Radford, 2014). El proceso de generalización, y, en particular, los problemas de generalización de patrones son una vía muy adecuada para introducir y desarrollar el pensamiento algebraico desde los primeros cursos de la Educación Primaria. Es por ello que se debería desarrollar más ampliamente en el currículum de Primaria y los programas de formación y desarrollo profesional de los maestros deberían prestar una especial atención al proceso de generalización.

Desde esta perspectiva, se plantea la necesidad de diseñar y poner en práctica un módulo de enseñanza para desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes en el tópico específico de la generalización de patrones y se formulan las siguientes preguntas de investigación:

¿El hecho de que EPM participen en un módulo de enseñanza hace que los EPM mejoren su competencia docente de la mirada profesional?

¿Cómo se evidencia el progreso de los EPM en términos de desarrollo de la competencia docente de la mirada profesional?

Para contestar estas preguntas, el objetivo de esta investigación es caracterizar cómo EPM que participan en un módulo de enseñanza desarrollan su mirada profesional analizando respuestas de alumnos de Primaria a problemas de generalización de patrones.

## 2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

La fundamentación teórica de esta investigación se sustenta en dos pilares: (1) la mirada profesional y (2) la generalización de patrones.

## 2.1. Mirada profesional

La mirada profesional, o *professional noticing*, es un término usado en el lenguaje cotidiano para indicar el acto de observar o reconocer algo (Philipp, Jacobs y Sherin, 2014), es decir, centrar la atención en los fenómenos significativos y actuar en consecuencia. Esta habilidad no es exclusiva de la enseñanza y es la principal componente de la experiencia en una amplia gama de profesiones. Cada grupo de profesionales tiene unas experiencias y unos objetivos diferentes que cambian según las características propias de su profesión, por lo que dispone de unos patrones propios para su mirada profesional. Mason (2002) añade la intencionalidad a la mirada profesional en el ámbito de la enseñanza y esta intencionalidad es lo que diferencia la mirada de un profesor de la de otros profesionales. En nuestra investigación vamos a focalizar en la mirada profesional como una competencia docente que ha de desarrollar el profesor para llevar a cabo su práctica profesional en sus clases y mejorar así el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Un enfoque común en todas las investigaciones sobre la competencia docente mirar profesionalmente es identificar la forma en la que los profesores interpretan las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Para interpretar de forma adecuada estas situaciones el profesor debe adoptar una visión estructurada para identificar lo que es relevante para los objetivos de aprendizaje de sus estudiantes (Mason, 2002). Esta visión estructurada está basada en su conocimiento especializado de las matemáticas (Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2014; Zapatera y Callejo, 2013). Desde esta perspectiva:

Jacobs, Lamb y Philipp (2010) han caracterizado la mirada profesional sobre el pensamiento matemático de los estudiantes mediante tres destrezas interrelacionadas: (1) identificar las estrategias usadas por los estudiantes; (2) interpretar la comprensión de los estudiantes y (3) decidir las acciones a desarrollar con los alumnos. En esta investigación, nos vamos a centrar en las dos primeras destrezas, es decir, la identificación de los aspectos relevantes desde la dimensión matemática y en la interpretación de la comprensión desde la perspectiva de la dimensión cognitiva.

La primera destreza implica la identificación de aquellos aspectos matemáticos que son significativos en las respuestas de los estudiantes. En sus respuestas, utilizan unos procedimientos o estrategias de resolución en las que subyace unos conceptos matemáticos y estos aspectos matemáticos son detalles que nos ayudan a mirar al pensamiento matemático de los estudiantes (Carpenter, Franke y Levi, 2003). Para identificar lo que realmente es importante en las estrategias que utilizan los estudiantes, el docente debe, por una parte, tener un profundo conocimiento matemático para la enseñanza y, por otra parte, mirar con detalle las respuestas de los estudiantes, atender a lo que dicen y hacen, a lo que piensan del tema, a la forma en la que se enfrentan a los problemas y a cómo entienden los detalles matemáticos significativos (Zapatera, 2015). El desarrollo de la mirada profesional está, pues, vinculado a centrar la atención sobre aspectos que pueden mostrar información relevante acerca de la manera de proceder de los estudiantes.

La segunda destreza, interpretar la comprensión de los estudiantes está relacionada con la primera destreza, es decir, con la identificación de los elementos matemáticos ya que la interpretación se sustenta en la identificación de dichos elementos. Por tanto, como afirman Sherin, Jacobs y Philipp (2011), es tan importante lo que observan los docentes como la forma en la que interpretan lo observado. De esta forma, lo cognitivo está relacionado con lo matemático ya que para

interpretar la comprensión de los estudiantes es necesario, pero no suficiente, identificar los elementos matemáticamente significativos en las respuestas de los estudiantes.

Algunas investigaciones consideran que la capacidad del maestro para mirar profesionalmente se puede aprender y desarrollar (Fortuny y Rodríguez, 2012; Llinares, 2012), por lo que entre los objetivos de los programas de formación de profesores se encuentran: (1) coordinar el conocimiento de las matemáticas y el conocimiento del aprendizaje de los estudiantes y (2) analizar cómo los profesores identifican e interpretan los elementos matemáticos relevantes en el proceso de enseñanza-aprendizaje (Fernández, Valls y Llinares 2011; Callejo y Zapatera, 2016).

## 2.2. Generalización de patrones

En los problemas de generalización de patrones lineales se describe una situación que se apoya en un dibujo o diagrama que proporciona los elementos de los primeros términos  $f(1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(3)$ ... de una sucesión aritmética  $f(n) = an + b$ , y se pide a los estudiantes calcular  $f(n)$  para  $n$  *pequeño* (generalización cercana), para  $n$  *grande* (generalización lejana) y obtener la regla general. En algunos problemas, se pide también hallar el término  $n$  dado  $f(n)$ .

Las investigaciones sobre cómo alumnos de Primaria resuelven problemas de generalización de patrones lineales, (Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Radford, 2014; Rivera, 2010; Warren, 2005) han puesto de relieve el papel relevante que juegan en el proceso tres elementos matemáticos: (1) las estructuras espacial y numérica, (2) la relación funcional y (3) el proceso inverso.

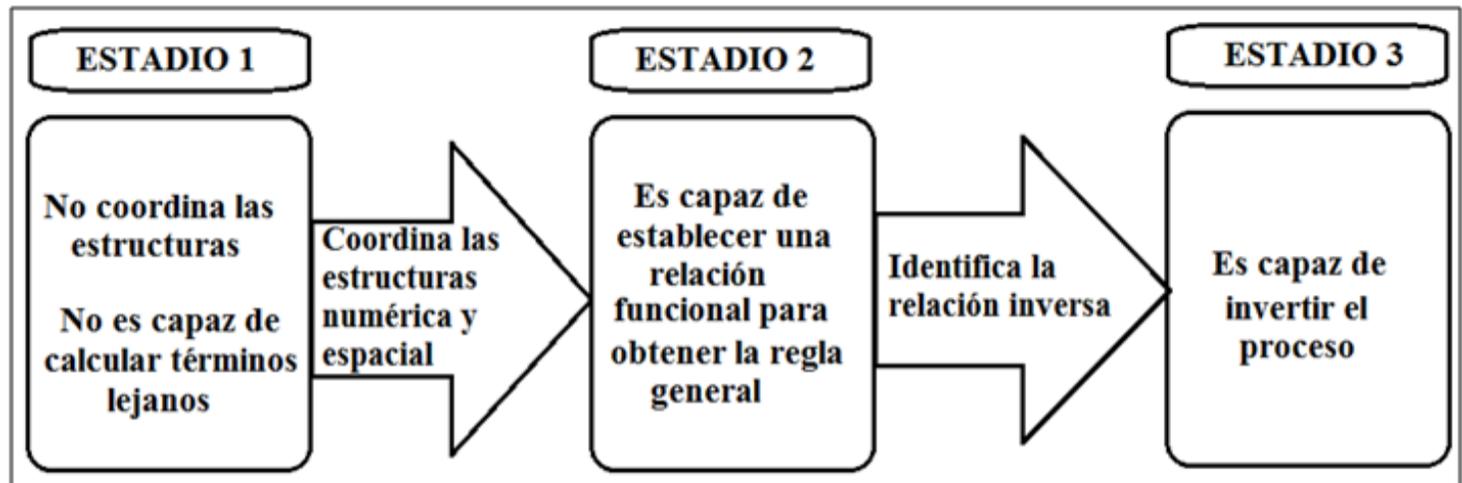
Para Radford (2014), la estructura numérica emerge del número de elementos de cada término de la sucesión y la estructura espacial de la distribución o disposición de esos elementos; la relación funcional asocia la posición de la figura y la cantidad de elementos que la forman y es necesaria para identificar un término lejano o no especificado (Rivera, 2010; Warren, 2005); y la función inversa es necesaria para identificar la posición de una figura, conocido el número de elementos que la forman (Warren, 2005). Del uso de estos elementos matemáticos en la resolución de problemas de generalización de patrones se infieren los aspectos cognitivos necesarios para que los alumnos comprendan el proceso de generalización: (1) coordinación entre estructuras espacial y numérica, (2) pensamiento funcional y (3) reversibilidad.

La coordinación entre las estructuras implica identificar una regularidad que relacione ambas estructuras, de tal manera que el alumno coordina ambas estructuras cuando dibuja el número exacto de elementos respetando su configuración espacial; el pensamiento funcional se muestra cuando el alumno relaciona de forma numérica, verbal o algebraica, cualquier término de la sucesión con el número de elementos que la forma; y el alumno domina la reversibilidad cuando es capaz de reconocer la posición en la secuencia de una determinada figura a partir del número de elementos de dicha figura.

Estos elementos matemáticos y cognitivos permiten identificar tres estadios de la comprensión de los alumnos de Primaria y caracterizar una trayectoria de aprendizaje sobre la generalización de patrones (Zapatera y Callejo, 2013; *figura 1*).

Figura 1. Trayectoria de aprendizaje de la comprensión de la generalización de patrones.

Fuente: elaboración propia.



En el *estadio 1*, el alumno es capaz de continuar la sucesión para términos cercanos identificando el patrón de crecimiento cuantitativo, pero no coordina las estructuras numérica y espacial; en el *estadio 2*, el alumno es capaz de coordinar las estructuras espacial y numérica y de reconocer una relación funcional que le permita hallar el número de elementos de cualquier término de la sucesión y expresarla de forma verbal en una regla general, pero no invierte el proceso; en el *estadio 3*, el alumno es capaz de coordinar las estructuras espacial y numérica, de reconocer la relación funcional en casos particulares, de expresar la regla general verbalmente como una relación funcional y, además, es capaz de invertir dicha relación en casos específicos (Zapatera, 2015).

### 3. METODOLOGÍA

#### 3.1. Participantes y contexto

Los participantes fueron 20 EPM de tercer curso del Grado de Educación Primaria en la asignatura *Aprendizaje y didáctica de las matemáticas*. Uno de los objetivos de esta asignatura es el desarrollo de la mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas. En particular, este estudio se enmarca dentro de un módulo de enseñanza sobre la generalización de patrones.

#### 3.2. Diseño del módulo de enseñanza

El objetivo del módulo de enseñanza era proporcionar a los EPM información, basada en los resultados de investigaciones previas, sobre el desarrollo de la comprensión de la generalización de patrones y apoyar el desarrollo de su mirada profesional en relación al pensamiento de los alumnos.

Las tareas profesionales propuestas a los participantes en el módulo tienen en cuenta tres dimensiones: matemática, cognitiva y didáctica. La dimensión matemática está relacionada con la primera destreza de la mirada profesional, es decir, la identificación de los elementos matemáticos relevantes en el proceso de generalización de patrones.

La dimensión cognitiva está asociada a la interpretación del pensamiento de los alumnos usando los diferentes estadios de comprensión de la generalización de patrones. En la dimensión didáctica, relacionada con la destreza de la toma de decisiones, los EPM proponen acciones para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos apoyándose en la trayectoria de aprendizaje.

El diseño del módulo de enseñanza consta de ocho sesiones en las que se propusieron diferentes tareas: resolución de problemas y análisis de las respuestas de los estudiantes. En la *tabla 1* se muestra el desarrollo de las ocho sesiones especificando contenidos, tareas y documentos de apoyo utilizados. En la primera sesión los EPM resolvieron dos problemas de generalización de patrones con cuatro cuestiones: (1) generalización cercana, (2) generalización lejana, (3) regla general y (4) proceso inverso (Cuestionario inicial 1; *figura 2*).

**Figura 2.** Problemas del cuestionario inicial 1.

Fuente: elaboración propia.

Problema 1	
<p>Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas</p>  <p>1 mesa 4 sillas      2 mesas 6 sillas      3 mesas 8 sillas</p> <p>Como puedes ver alrededor de una mesa hemos colocado 4 sillas, alrededor de 2 mesas hemos colocado 6 sillas y alrededor de 3 mesas hemos colocado 8 sillas</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Continúa la sucesión y dibuja 4 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántas sillas hay?</li> <li>2. Sin dibujar la figura que tiene 25 mesas, ¿podrías decir cuántas sillas hay? Explica cómo has encontrado el resultado</li> <li>3. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.</li> <li>4. Si en un cumpleaños se ha invitado a 42 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.</li> </ol>
Problema 2	
<p>Observa las siguientes figuras y realiza las actividades:</p>  <p>Figura 1      Figura 2      Figura 3 4 palillos      7 palillos      10 palillos</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Continúa la sucesión y dibuja la figura 4. ¿Cuántos palillos tiene?</li> <li>2. Sin dibujarla figura 25, ¿podrías decir cuántos palillos tiene? Explica cómo has encontrado el resultado</li> <li>3. ¿Cómo calcularías el número total de palillos de una figura cualquiera?</li> <li>4. ¿Qué figura tiene 100 palillos? Explica cómo lo has hecho</li> </ol>

En la segunda sesión se estudió en gran grupo el proceso de generalización de patrones y se resolvieron varios problemas, haciendo hincapié en la relación de la generalización y el pensamiento algebraico, en las estrategias de resolución, en los elementos matemáticos y en posibles errores o dificultades de los alumnos en este tipo de problemas. Al final de la sesión, los EPM reconstruyeron el cuestionario inicial que hicieron en la primera sesión, resaltando las modificaciones y añadiendo conceptos nuevos.

**Tabla 1.** Contenidos, tareas y documentos de apoyo de las sesiones.

*Fuente:* elaboración propia.

Sesiones	Contenidos	Tareas	Documento de apoyo
1	<b>Generalización de patrones</b>	Resolución individual de dos problemas de generalización	Cuestionario inicial 1
2	<b>Generalización de patrones:</b> Estrategias de resolución Elementos matemáticos Estadios de comprensión Trayectoria de aprendizaje	Resolución en gran grupo de problemas de generalización Reconstrucción individual de los dos problemas iniciales	Síntesis generalización Lectura artículos/documentos
3	<b>Mirada profesional</b>	Tres cuestiones profesionales (una de cada destreza) a partir de las respuestas de tres alumnos de Primaria (uno de cada estadio) a los problemas de generalización de patrones	Cuestionario inicial 2
4	<b>Destrezas mirada profesional</b> Identificar Interpretar Decidir <b>Destreza identificación</b> Elementos matemáticos	Análisis en gran grupo de la destreza identificar en otro contexto Jacobs, Lamb y Philipp (2010) Reconstrucción individual de la primera cuestión de la sesión 3 (identificar)	Síntesis mirada profesional Lectura artículos/documentos Ejemplos identificación en otros tópicos
5	<b>Destreza interpretación</b> Estadios de comprensión	Análisis en gran grupo de la comprensión de la generalización de patrones en alumnos de Primaria Reconstrucción individual de la segunda cuestión de la sesión 3 (interpretar)	Síntesis mirada profesional Lectura artículos/documentos Ejemplos interpretación en otros tópicos
6	<b>Destreza decidir</b> Trayectoria de aprendizaje	Análisis en gran grupo de las acciones propuestas por EPM Reconstrucción individual de la tercera cuestión de la sesión 3 (destreza decidir)	Síntesis mirada profesional Lectura artículos/documentos Ejemplos decidir en otros tópicos
7	<b>Generalización de patrones</b>	Resolución individual de dos problemas de generalización	Cuestionario final 1
8	<b>Mirada profesional</b>	Tres cuestiones profesionales (una de cada destreza) a partir de las respuestas de tres alumnos de Primaria (uno de cada estadio) a los problemas de generalización de patrones	Cuestionario final 2

En la tercera sesión, a partir de las respuestas de tres alumnos de Primaria, uno de cada estadio de comprensión, a los mismos problemas de generalización de patrones que los EPM habían resuelto en la primera sesión, se les plantearon tres cuestiones profesionales relacionadas con cada una de las destrezas de la mirada profesional (Cuestionario inicial 2; *tabla 2*).

**Tabla 2.** Cuestiones profesionales del cuestionario inicial 2.

Fuente: elaboración propia.

Cuestiones profesionales	
1.	Describe las respuestas de los tres estudiantes de Primaria a cada uno de los dos problemas.
2.	Interpreta las respuestas de los tres estudiantes de Primaria a los dos problemas. Indica el nivel de comprensión de la generalización de patrones de cada uno de estos estudiantes.
3.	A partir de la interpretación que has hecho de los tres estudiantes de Primaria, propón alguna tarea concreta que le ayude a mejorar o ampliar su nivel de comprensión.

En la cuarta, quinta y sexta sesión se desarrollaron tareas vinculadas con las tres destrezas. En la cuarta se realizaron tareas para analizar la destreza “identificar” insistiendo en los elementos matemáticos relevantes. En la quinta se realizaron tareas para desarrollar la destreza “interpretar la comprensión” focalizando la atención insistiendo en los estadios de comprensión. En la sexta se analizó la destreza “decidir acciones para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje” a partir de acciones asociadas a la trayectoria de aprendizaje.

En estas sesiones se estudiaron documentos teóricos sobre las destrezas de la mirada profesional, se analizaron ejemplos de respuestas individualmente y en gran grupo y los EPM reconstruyeron sus respuestas del segundo cuestionario inicial.

En la séptima y octava los EPM respondieron a dos cuestionarios finales formados por dos problemas de generalización similares a los del cuestionario inicial 1 (*figura 3*) y las mismas cuestiones profesionales del cuestionario inicial 2 (*tabla 2*).

**Figura 3.** Problemas del cuestionario final 1.

Fuente: elaboración propia.

<b>Problema 1</b>	
<p>Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas</p>  <p>1 mesa 5 sillas      2 mesas 8 sillas      3 mesas 11 sillas</p> <p>Como puedes ver alrededor de una mesa hemos colocado 5 sillas, alrededor de 2 mesas hemos colocado 8 sillas y alrededor de 3 mesas hemos colocado 11 sillas</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Continúa la sucesión y dibuja 4 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántas sillas hay?</li> <li>2. Sin dibujar la figura que tiene 25 mesas, ¿podrías decir cuántas sillas hay? Explica cómo has encontrado el resultado</li> <li>3. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.</li> <li>4. Si en un cumpleaños se ha invitado a 83 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.</li> </ol>
<b>Problema 2</b>	
<p>Observa las siguientes figuras y realiza las actividades:</p>  <p>1 casa 5 palillos      2 casas 9 palillos      3 casas 13 palillos</p>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Continúa la sucesión y dibuja la figura 4. ¿Cuántos palillos tiene?</li> <li>2. Sin dibujar la figura 25, ¿podrías decir cuántos palillos tiene? Explica cómo has encontrado el resultado</li> <li>3. ¿Cómo calcularías el número total de palillos de una figura cualquiera?</li> <li>4. ¿Qué figura tiene 81 palillos? Explica cómo lo has hecho</li> </ol>

### 3.3. Recogida y análisis de datos

Los datos para obtener evidencias de cómo evoluciona la mirada profesional de los EPM sobre la generalización de patrones a lo largo del módulo de enseñanza son: respuestas al cuestionario inicial, reconstrucciones a las respuestas del cuestionario inicial y las respuestas al cuestionario final.

El análisis consta de tres fases: (1) análisis de las respuestas del cuestionario inicial y clasificación de los EPM según niveles de desarrollo, (2) análisis de las reconstrucciones por categorías y (3) análisis de las respuestas del cuestionario final y nueva clasificación de los EPM según niveles de desarrollo.

#### 3.3.1. Fase 1

El objetivo de esta fase, a partir de un análisis de protocolos procedentes del cuestionario inicial, fue agrupar en distintos niveles de desarrollo la manera en que los EPM reconocían los distintos comportamientos de los alumnos de Primaria. Estos niveles se generaron según las destrezas de la mirada profesional que mostraban los EPM al analizar las respuestas de los alumnos de Primaria.

El análisis en esta fase se focaliza en cómo los EPM identificaban los elementos matemáticos de la generalización de patrones (las estructuras espacial y numérica; la relación funcional entre el número de la figura y el número de elementos que la forman; y el proceso inverso) y cómo los usaban para interpretar los estadios de comprensión de los alumnos de Primaria. La aplicación de este procedimiento de manera sistemática nos permitió caracterizar cuatro niveles de desarrollo (*tabla 3*).

**Tabla 3.** Niveles de desarrollo.

*Fuente:* elaboración propia.

Nivel	Identificación e interpretación
<b>Muy bajo</b>	El EPM no identifica ningún elemento matemático ni reconoce características de la comprensión de ninguno de los tres alumnos de Primaria
<b>Bajo</b>	El EPM identifica al menos un elemento matemático y reconoce características de la comprensión de uno de los tres alumnos de Primaria
<b>Medio</b>	El EPM identifica al menos dos elementos matemáticos y reconoce características de la comprensión de dos de los tres alumnos de Primaria
<b>Alto</b>	El EPM identifica los tres elementos matemáticos y reconoce características de la comprensión de los tres alumnos de Primaria

#### 3.3.2. Fase 2

El objetivo de esta fase era analizar las reconstrucciones que hicieron los EPM y estudiar así los cambios y progresos que mostraban los EPM en su mirada profesional. Las destrezas de identificar e interpretar se analizaron de forma conjunta.

Las reconstrucciones fueron analizadas inductivamente y de forma individual por tres investigadores y posteriormente, aplicando el método de la constante comparativa (Strauss y Corbin, 1994), se discutieron los acuerdos y desacuerdos y se identificaron ciertas características en las

respuestas de los EPM. A continuación se muestran las categorías de análisis generadas así como ejemplos de cada una de ellas.

Las categorías para el análisis de las reconstrucciones en cuanto a las destrezas de identificación e interpretación se muestran en la *tabla 4*.

**Tabla 4.** Categorías de análisis en la reconstrucción.

Fuente: elaboración propia.

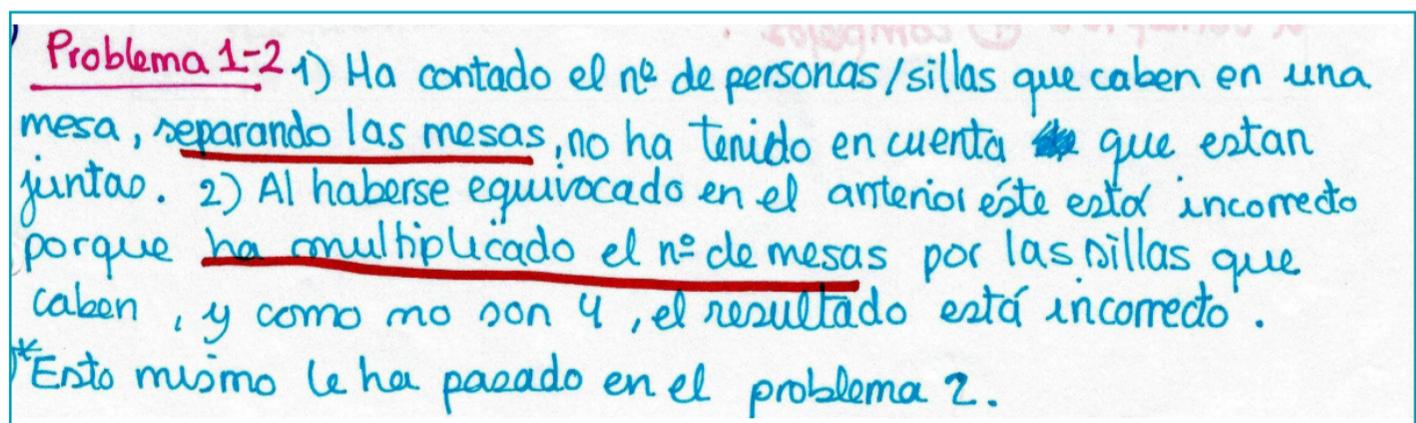
<b>Señala</b>	El EPM subraya o remarca una idea pero no realiza ninguna observación
<b>Señala y etiqueta</b>	El EPM subraya o remarca una idea y la etiqueta con un elemento matemático o con un estadio de comprensión
<b>Señala y explica</b>	El EPM subraya o remarca una idea y la explica haciendo uso de un elemento matemático o de un estadio de comprensión
<b>Corrige</b>	El EPM corrige alguna idea equivocada y la reescribe
<b>Incorpora observación</b>	El EPM añade alguna idea que no consideró inicialmente explicando con elemento matemático significativo/estadio de comprensión

A continuación se detallan ejemplos de cada una de las categorías:

- **Señala**, cuando el EPM subraya o remarca una idea pero no realiza ninguna observación. Por ejemplo, como se observa en la *figura 4*, el EPM-13 subraya “separando mesas” y “ha multiplicado el número de mesas”, pero no añade ninguna observación.

**Figura 4.** Ejemplo categoría “señala”.

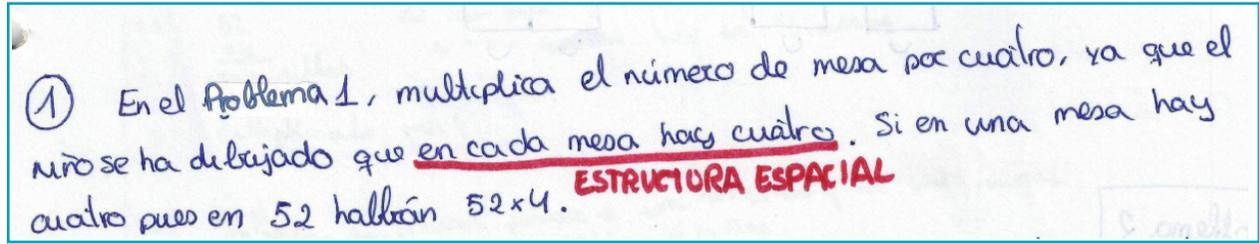
Fuente: elaboración propia.



- **Señala y etiqueta con un elemento matemático o estadio de comprensión**, cuando el EPM subraya o remarca una idea y la etiqueta con un elemento matemático o con un estadio de comprensión. En la *figura 5* se muestra cómo el EPM-12 subraya “separa mesas” y escribe a continuación estructura espacial.

Figura 5. Ejemplo categoría “señala y etiqueta”.

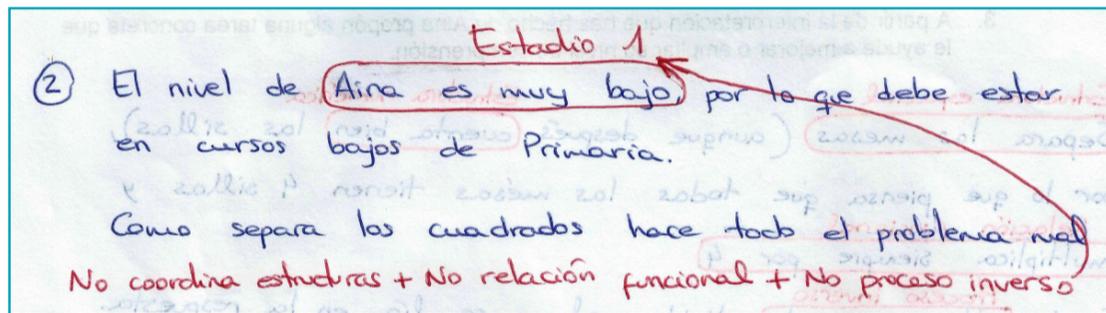
Fuente: elaboración propia.



- **Señala y explica con un elemento/estadio**, cuando un EPM subraya o remarca una idea y la explica haciendo uso de un elemento matemático o de un estadio de comprensión. En la figura 6 se puede observar cómo el EPM-6 subraya que el nivel de “Aina es muy bajo”, etiqueta con “estadio 1” y explica las características del estadio 1 “no coordina estructuras+no relación funcional+ no proceso inverso”.

Figura 6. Ejemplo categoría “señala y explica”.

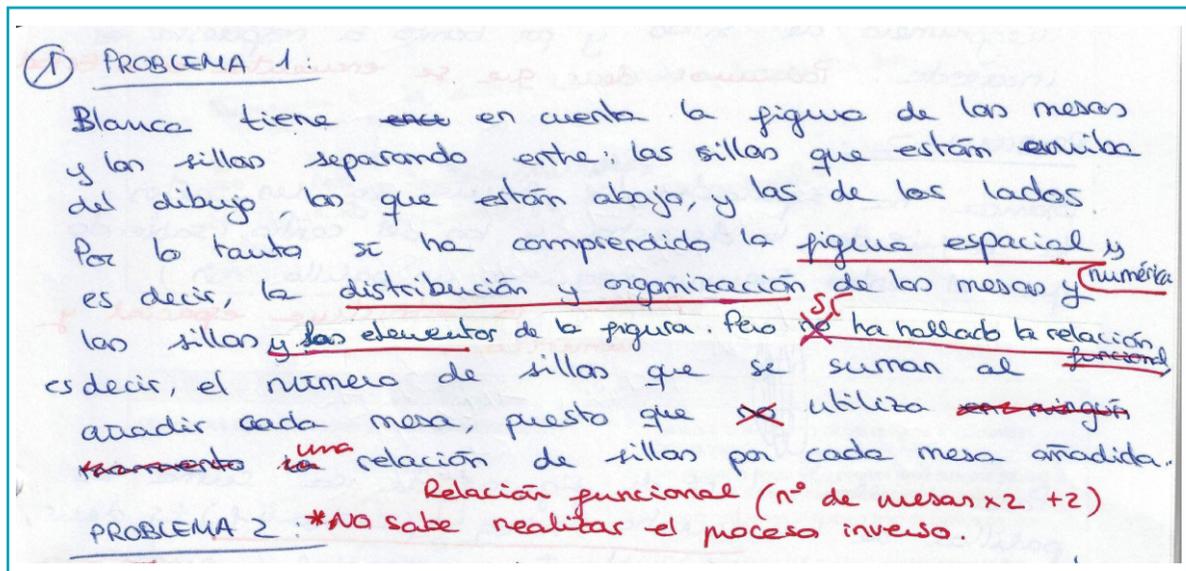
Fuente: elaboración propia.



- **Corrige**, cuando el EPM corrige alguna idea equivocada y la reescribe ya corregida señalando, etiquetando o explicando mediante un elemento matemático o un estadio de comprensión. Por ejemplo, en la figura 7 se puede ver cómo el EPM-18 se da cuenta que en el cuestionario inicial escribió que “no ha hallado la relación funcional” y, en su reconstrucción, se da cuenta del error, tacha el “no” y añade “sí”. De la misma manera en el cuestionario inicial, escribió que “no utiliza en ningún momento la relación”, tacha y corrige dejando “utiliza una relación”.

Figura 7. Ejemplo categoría “corrige”.

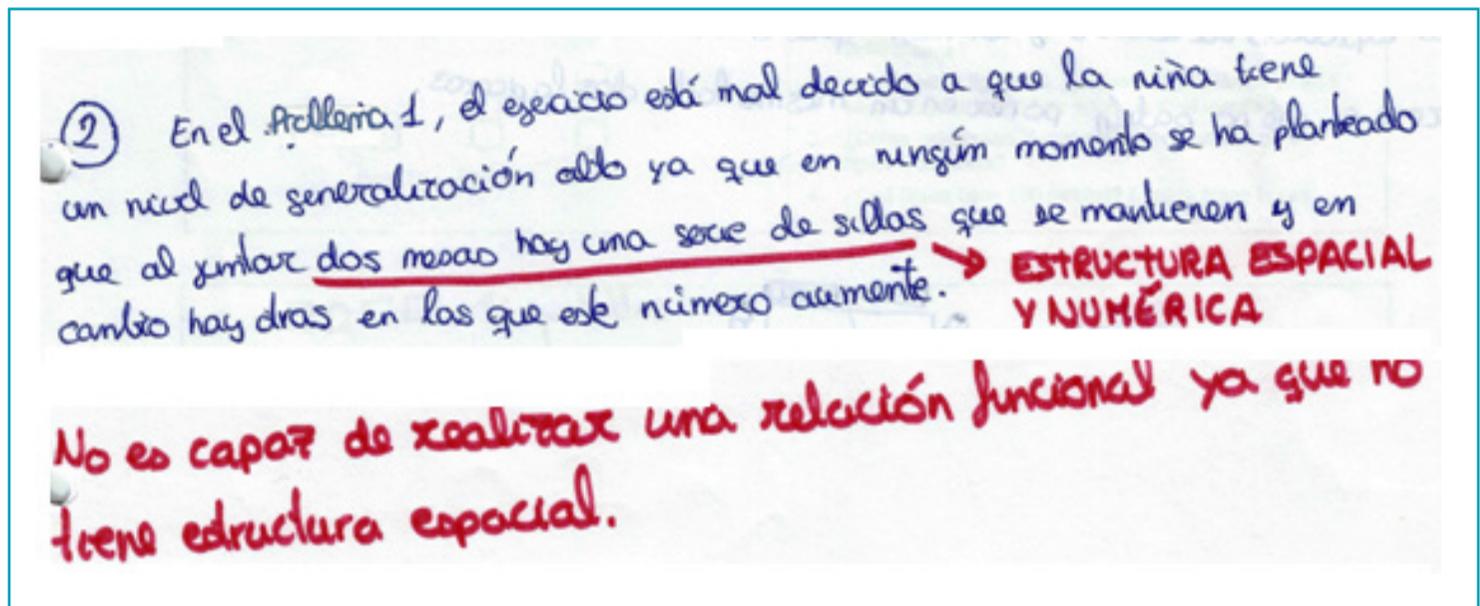
Fuente: elaboración propia.



- **Incorpora nueva observación**, cuando el EPM añade alguna idea que no consideró inicialmente explicando con elemento matemático significativo/estadio de comprensión. En la *figura 8* se muestra cómo un EPM-12 incorpora a su explicación inicial que “no es capaz de realizar una relación funcional ya que no tiene estructura espacial”.

**Figura 8.** Ejemplo categoría “incorpora nueva observación”.

Fuente: elaboración propia.



### 3.3.3. Fase 3

En la tercera fase se procedió a hacer el mismo análisis que en la *fase 1*, pero esta vez sobre las respuestas del cuestionario final. De esta forma, se volvieron a asignar niveles de desarrollo a los EPM y se pudo observar que la mayoría de ellos habían evolucionado estando ahora en niveles superiores.

## 4. RESULTADOS

Los resultados obtenidos muestran un progreso en el desarrollo de las dos destrezas, apreciándose una evolución en las respuestas desde los cuestionarios iniciales a los cuestionarios finales. Esta evolución ya puede observarse en las reconstrucciones de los cuestionarios iniciales. En la *tabla 5* se muestra la clasificación por niveles de desarrollo de los EPM en cada uno de los cuestionarios.

**Tabla 5.** Clasificación de los EPM en niveles de desarrollo.

Fuente: elaboración propia.

	Nivel muy bajo	Nivel bajo	Nivel medio	Nivel alto
Cuestionario inicial	10	8	2	0
Cuestionario final	0	0	6	14

En las respuestas del cuestionario inicial, en relación a la destreza identificar, los EPM hacen comentarios genéricos relacionados con la corrección de las respuestas o el tipo de lenguaje utilizado, sin mencionar los elementos matemáticos o haciéndolo de una forma ambigua. Encontramos algunas evidencias de progreso de esta destreza en las reconstrucciones ya que la mayoría de los EPM utilizan un discurso más específico haciendo referencias a alguno de los elementos matemáticos pero sin argumentarlos. En el cuestionario final más de 2/3 de los EPM ya hacen referencias explícitas a todos los elementos matemáticos y los argumentan fundamentados en las respuestas de los alumnos de Primaria.

En el primer cuestionario, la mayoría de comentarios (90%) relativos a la destreza interpretar también son genéricos y no diferencian las características de comprensión de los diferentes estadios, mientras que en las reconstrucciones ya comienzan a hacer alusiones a los estadios de comprensión. En el cuestionario final el 70% de los EPM son capaces de explicar las características de cada uno de estos estadios utilizando los elementos matemáticos identificados en las respuestas de los alumnos de Primaria.

En el análisis de las reconstrucciones se clasificaron por categorías que se han explicado en el apartado anterior. La Tabla 6 muestran el número de veces que han usado los EPM cada categoría en sus reconstrucciones.

**Tabla 6.** Número de veces de cada categoría en la reconstrucción.

Fuente: elaboración propia.

Señala	Señala y etiqueta	Señala y explica	Corrige	Incorpora observación
19	55	37	3	68

Estos resultados muestran que, en la reconstrucción del cuestionario inicial, la categoría más usada fue la de incorporar alguna observación. Esto muestra que, en las sesiones intermedias, adquirieron nuevos conocimientos que luego añadieron en las reconstrucciones. Por otro lado, la segunda categoría más utilizada por los EPM fue la de señalar y etiquetar y con ella demostraban que habían mejorado su lenguaje específico ya que utilizaban términos especializados de la mirada profesional y de la generalización de patrones.

En esta investigación presentamos las respuestas del EPM-6, en referencia a los cuestionarios inicial y final, que pueden resultar representativas de la evolución de la mirada profesional a lo largo del módulo. En el cuestionario inicial hemos caracterizado a este EPM en el nivel bajo porque, aunque en un principio identifica de forma implícita los elementos matemáticos, no los utiliza para interpretar la comprensión de los alumnos, excepto de forma ambigua la del alumno del *estadio 1*. En el cuestionario final ha sido caracterizado en el nivel alto porque menciona de forma explícita los tres elementos y los utiliza para interpretar la comprensión de los tres alumnos de Primaria, e incluso los clasifica en cada uno de los tres estadios.

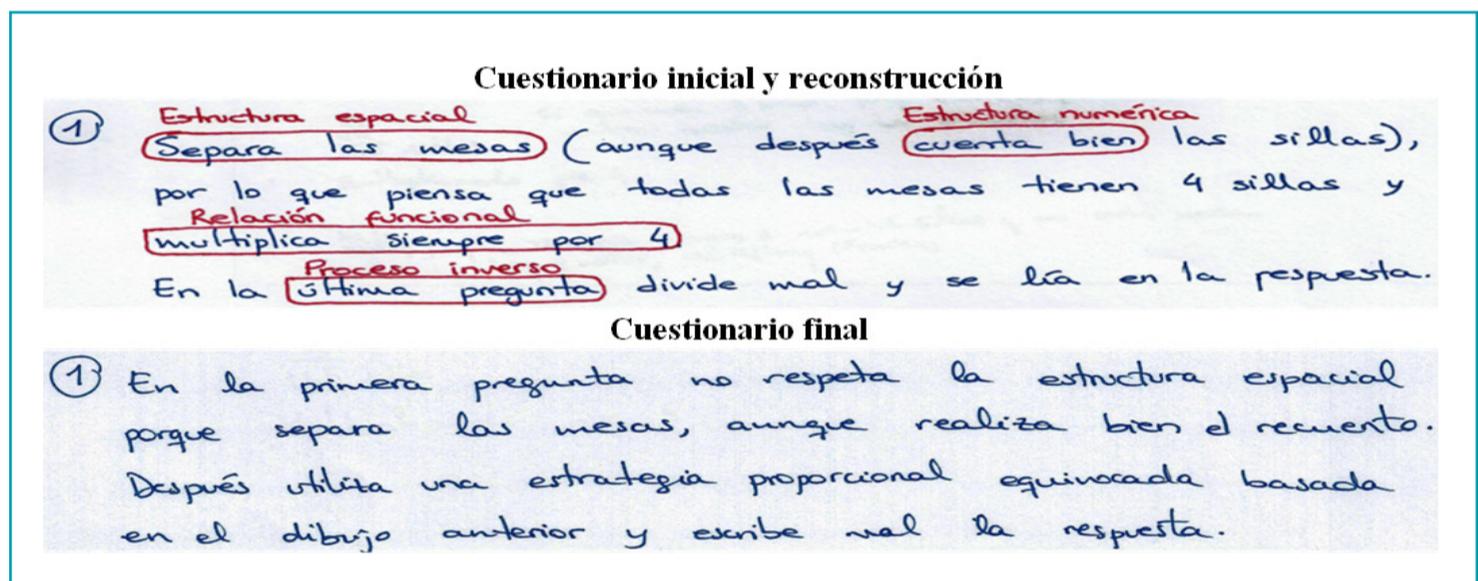
#### 4.1. Identificación de elementos matemáticos

En las *figuras 9, 10 y 11* se muestran las identificaciones que realiza el EPM-6 a las respuestas de los tres alumnos de Primaria al primer problema de ambos cuestionarios.

En la *figura 9* se muestran la respuesta del EPM-6 en relación al alumno del primer estadio, en el cuestionario inicial se observa que menciona, de forma implícita, las estructuras espacial y numérica cuando comenta que “separa las mesas aunque después cuenta bien las sillas” y no alude ni a la relación funcional ni al proceso inverso. En la reconstrucción menciona ya de forma explícita los elementos matemáticos ya que señala y etiqueta palabras que relaciona con los elementos como “separa las mesas” con la estructura espacial. Por último, en el cuestionario final incluye en sus identificaciones, de forma argumentada, los elementos cuando afirma que “no respeta la estructura espacial porque separa las mesas”, que “utiliza una estrategia proporcional equivocada” y que “no contesta la última cuestión en la que debe invertir el proceso”.

**Figura 9.** Identificación del EPM-6 a las respuestas del alumno del estadio 1.

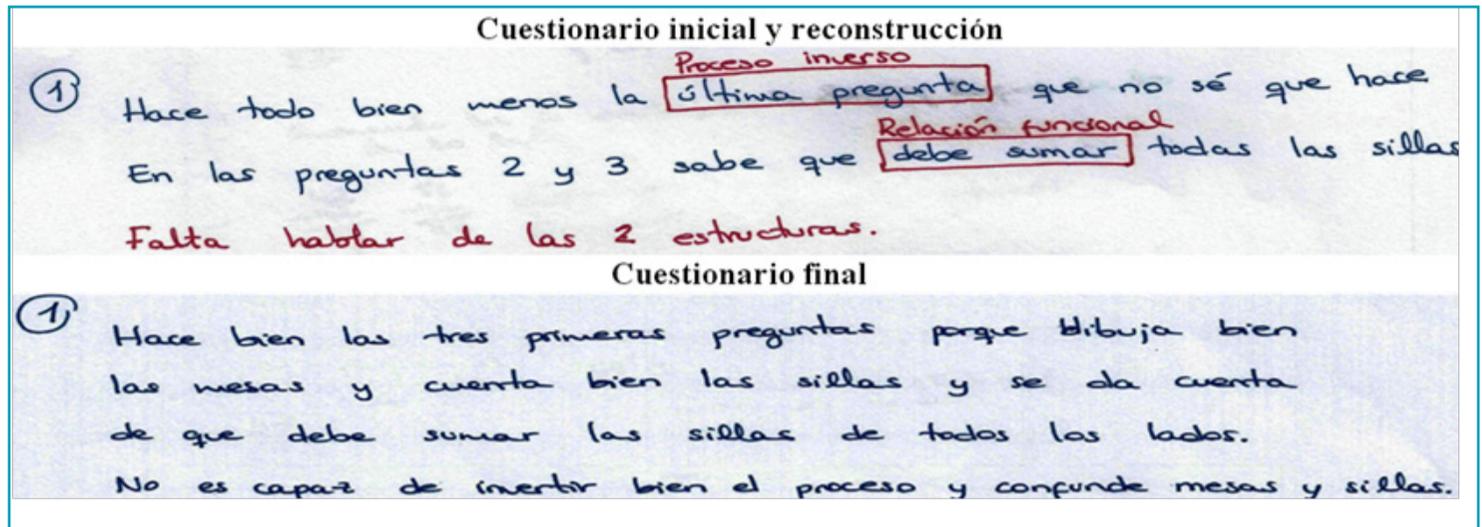
Fuente: elaboración propia.



Del alumno del *estadio 2*, en el cuestionario inicial se limita a comentar sobre la corrección de las respuestas, como observamos en la *figura 10*, al decir que “hace todo bien menos la última pregunta” y que en las preguntas 2 y 3 “sabe que debe sumar todas las sillas”. En la reconstrucción, vuelve a señalar y etiquetar en cada idea los elementos matemáticos relacionados y además incorpora una observación como “Falta hablar de las 2 estructuras” con lo que denota que, en las sesiones intermedias, ha aprendido ideas nuevas. En el cuestionario final, ya hace una descripción más detallada al comentar que contesta bien las tres primeras preguntas porque “dibuja bien las mesas y cuenta bien las sillas” y además menciona la relación funcional porque “debe sumar las sillas de todos los lados” y acaba explicando que “no es capaz de invertir el proceso” porque “confunde las mesas y las sillas”.

Figura 10. Identificación del EPM-6 a las respuestas del alumno del estadio 2.

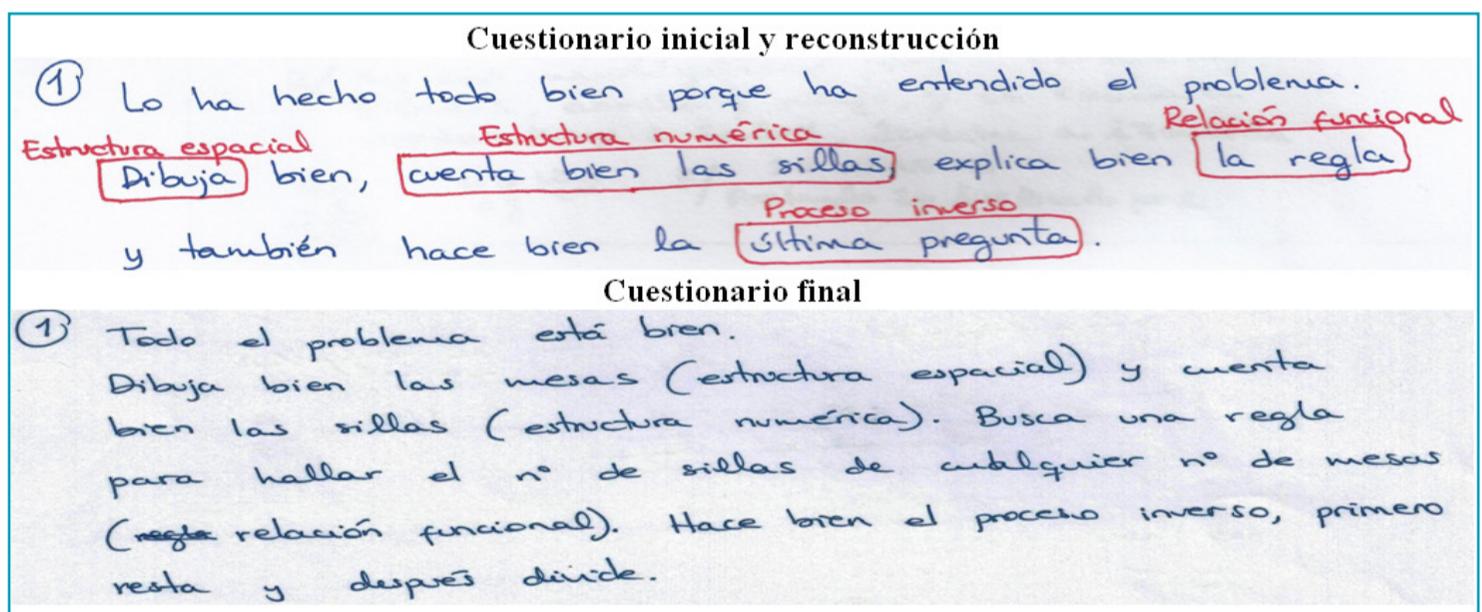
Fuente: elaboración propia.



La figura 11 muestra que las identificaciones iniciales del alumno del estadio 3 son genéricas y se refieren exclusivamente a la corrección de sus respuestas ya que “lo ha hecho todo bien porque ha entendido el problema. Dibuja bien, cuenta bien las sillas, explica bien la regla y también hace bien la última pregunta”. En la reconstrucción vuelve a señalar y etiquetar en cada idea los elementos matemáticos relacionados. Por último, en el cuestionario final incorpora estos elementos de forma explícita en sus identificaciones y describe de forma detallada la utilización que hace el alumno de los tres elementos.

Figura 11. Identificación del EPM-6 a las respuestas del alumno del estadio 3.

Fuente: elaboración propia.



Así pues, las identificaciones del EPM-6, que en un principio eran genéricas y mencionaban de forma ambigua la estructura espacial y la relación funcional, han acabado siendo concretas y argumentadas y citando de forma explícita los tres elementos matemáticos.

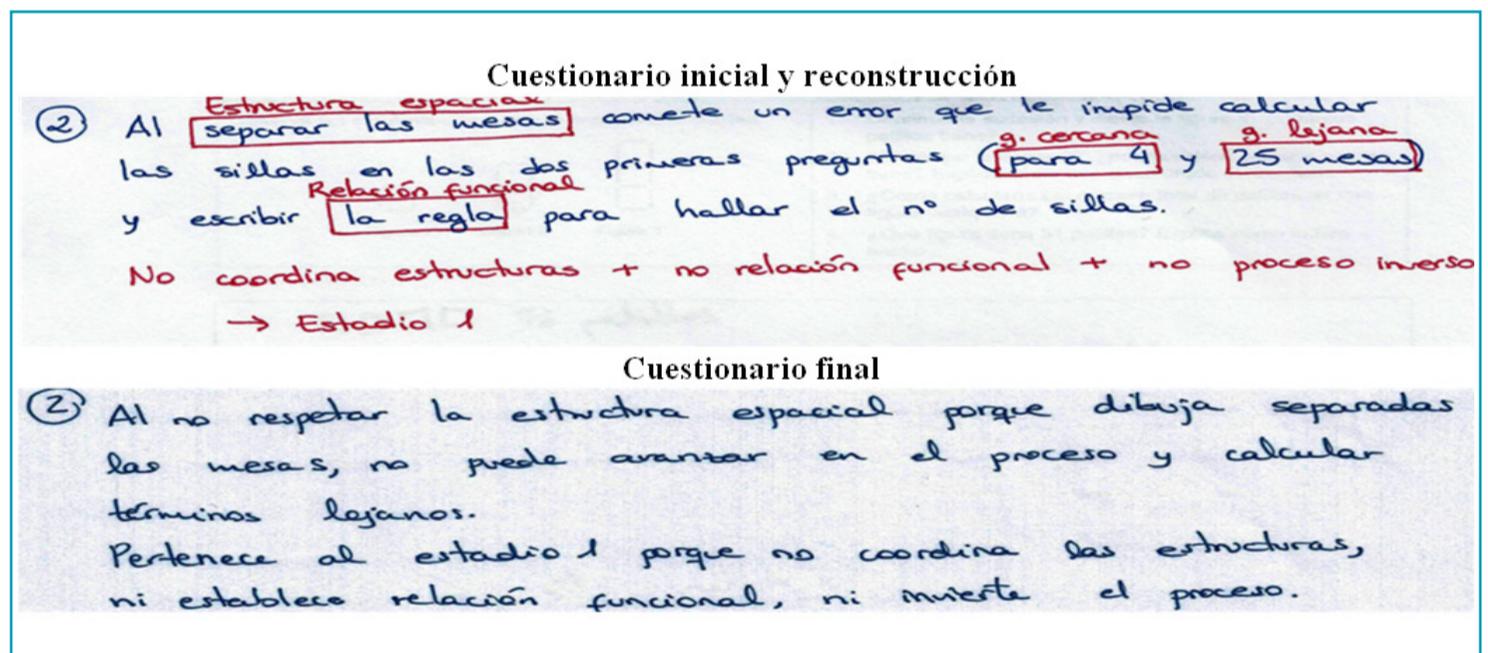
## 4.2. Interpretación de la comprensión de los estudiantes

En las *figuras 12, 13 y 14* se recogen las respuestas del mismo EPM-6 a la segunda cuestión que pedía interpretar las respuestas de los tres alumnos al primer problema de ambos cuestionarios, indicando el nivel de comprensión de la generalización.

En la *figura 12* se muestra la interpretación que realiza del alumno del *estadio 1* en el cuestionario inicial, puede considerarse suficiente al explicar por qué no progresa en el proceso de generalización al afirmar que “al separar las mesas comete un error que le impide calcular las sillas” y “escribir la regla para hallar el número de sillas”. En la reconstrucción, señala y etiqueta con “estructura espacial” junto a “separar las mesas”, “generalización cercana y generalización lejana” junto a “4 y 25 mesas” respectivamente y “relación funcional” junto a “la regla”; además especifica que pertenece al estadio 1 incorporando la observación de que “no coordina estructuras + no relación funcional + no proceso inverso”. En el cuestionario final explica que “no puede avanzar en el proceso y calcular términos lejanos” porque “no respeta la estructura espacial” y explica también las características del *estadio 1*.

**Figura 12.** Interpretación del EPM-6 de la comprensión del alumno del estadio 1.

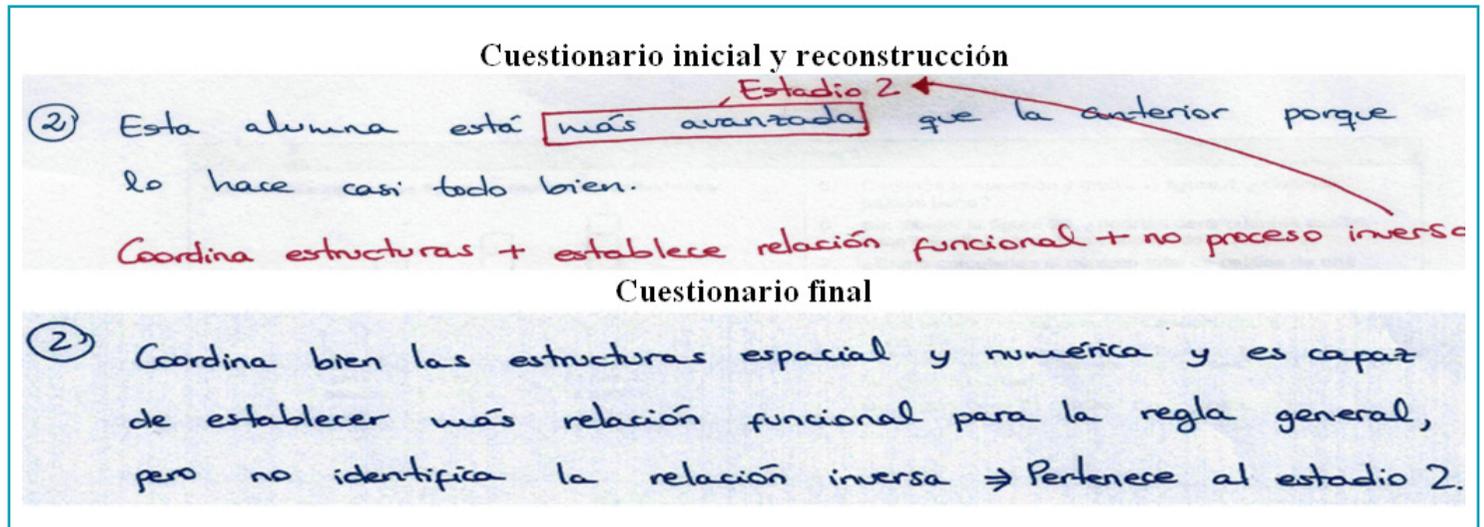
Fuente: elaboración propia.



En la *figura 13* se muestran las interpretaciones a las respuestas del alumno de Primaria del *estadio 2*. En el cuestionario inicial se limita a señalar que “está más avanzada que la anterior (alumna del *estadio 1*) porque lo hace casi todo bien”. En la reconstrucción señala que pertenece al “estadio 2” e incorpora observaciones en las que cita algunas características de este estadio. En el cuestionario final también señala que “pertenece al estadio 2” porque “coordina bien las estructuras espacial y numérica y es capaz de establecer una relación funcional”, pero “no identifica la relación inversa”.

Figura 13. Interpretación del EPM-6 de la comprensión del alumno del estadio 2.

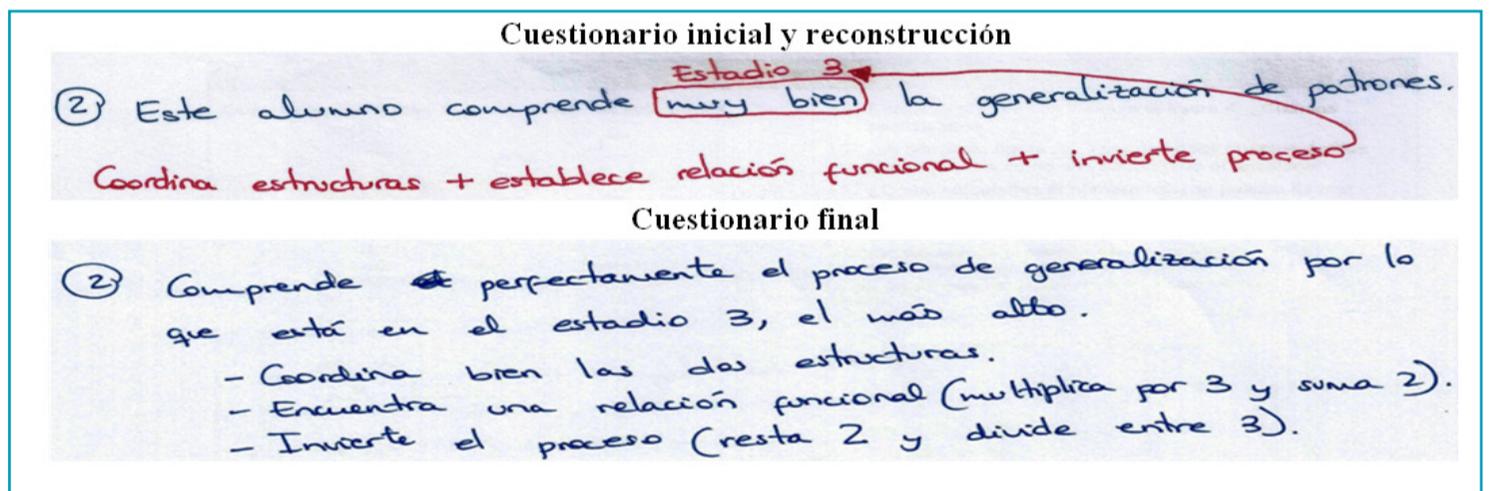
Fuente: elaboración propia.



Del alumno del *estadio 3* solo realiza un comentario genérico ya que “este alumno comprende muy bien la generalización de patrones”. En la reconstrucción, afirma que pertenece al “estadio 3” y señala algunas características del estadio. En el cuestionario final, recalca que “comprende perfectamente el proceso de generalización por lo que está en el *estadio 3*, el más alto” y recuerda las características de este estadio.

Figura 14. Interpretación del EPM-6 de la comprensión del alumno del estadio 3.

Fuente: elaboración propia.



El EPM-6 en el cuestionario inicial interpreta la comprensión de la generalización del alumno del estadio 1 afirmando que no progresa porque separa las mesas e interpreta de forma muy imprecisa y genérica la de los otros dos alumnos, mientras que las interpretaciones de los tres alumnos en el cuestionario final son más concretas, se basan en los elementos matemáticos y en las características de cada estadio.

## 5. CONCLUSIONES Y PROSPECTIVA

El objetivo de esta investigación es caracterizar cómo EPM que participan en un módulo de enseñanza desarrollan su mirada profesional analizando respuestas de alumnos de Primaria a problemas de generalización de patrones.

Con las tareas del módulo se crearon situaciones profesionales que sirvieron a los EPM para desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los alumnos. Los resultados que se presentan en esta investigación muestran que los EPM experimentaron una evolución positiva en el desarrollo de las destrezas de la mirada profesional en las dimensiones matemática y cognitiva: (1) la destreza identificar, vinculada con los elementos matemáticos significativos de la generalización de patrones, ha permitido a los EPM aumentar su conocimiento matemático y (2) la destreza interpretar, vinculada a los estadios de comprensión de los alumnos, les ha permitido avanzar en la dimensión cognitiva, es decir, en la interpretación del pensamiento de los alumnos.

La mayor utilización de los elementos matemáticos significativos y de los estadios de comprensión de los alumnos para describir e interpretar el proceso de generalización son evidencias del desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los alumnos en el contexto de la generalización de patrones. Los resultados confirman que, aunque la destreza interpretar presenta más complejidad que la de identificar, las dos destrezas están interrelacionadas y que la interpretación depende de la identificación de los elementos matemáticos significativos (Fernández, Valls y Llinares, 2011; Jacobs, Lamb y Philipp, 2010). Esto nos permite constatar, tal y como afirma Llinares (2013), que el grado en que los futuros profesores utilizan los elementos matemáticos concretos y las características del desarrollo de la comprensión matemática para describir e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes pone en evidencia matices de desarrollo de la mirada profesional.

En el cuestionario inicial, los EPM utilizaron un discurso genérico que no hacía referencia a los elementos matemáticos, pero sí a otros aspectos como los errores cometidos, la corrección o no de la respuesta o el lenguaje utilizado. Estos EPM tienen un tipo de discurso que Nemirovsky, DiMattia, Ribeiro y Lara-Meloy (2005) denominan “narrativa básica”, frente al llamado “discurso evaluativo” que se centra en valoraciones e interpretaciones. El “discurso evaluativo” es el discurso utilizado por los EPM en el cuestionario final ya que usan los elementos matemáticos para explicar la comprensión de los alumnos y emplean expresiones argumentativas con nexos y conjunciones causales como “ya que”, o consecutivas, “por tanto”, que son evidencias de relación de los hechos con su interpretación. Este resultado muestra que el hecho de participar en un módulo de enseñanza ayuda a que los EPM desarrollen su mirada profesional (Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2014).

En las reconstrucciones se observan evidencias de progreso ya que comienzan a hacer referencias a los elementos matemáticos y a los estadios de comprensión. Además, en las reconstrucciones los EPM añaden ideas o explicaciones nuevas que mejoran, desde el punto de vista de la competencia de la mirada profesional, su capacidad docente. Estas evidencias son indicadores de una evolución en su mirada profesional por lo que coincidimos con Star y Strickland (2007) en que es una competencia que puede mejorarse con la experiencia y que se puede aprender.

Por último, los cuestionarios y tareas de este módulo pueden servir de apoyo para el desarrollo de esta competencia profesional en estudiantes para maestros y en maestros en activo en el contexto de la generalización de patrones o en otros contextos diferentes. Si queremos que los estudiantes para maestro aprendan a “mirar con sentido” es necesario que en su formación inicial se incorporen situaciones que potencien las destrezas de la mirada profesional, para luego mejorar su desarrollo profesional (Fortuny y Rodríguez, 2012).

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Callejo, M.L. y Zapatera, A. (2016). Prospective primary teachers “noticing of students” understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*. DOI 10.1007/s10857-016-9343-1.
- Carpenter, T.P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.
- Carraher, D.W., Martinez, M.V. y Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM. Mathematics Education*, 40, 3-22.
- Climent, N., Romero-Cortés, J.M., Carrillo, J., Muñoz-Catalán, M.C. y Contreras, L.C. ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula? *Relime Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(1), 13-36.
- Fernández, C., Valls, J. y Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente mirar con sentido el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.
- Fortuny, J.M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: Facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM. Avances de Investigación en Educación matemática*, 1, 23-37.
- Jacobs, V.R., Lamb. L.C. y Philipp, R.A. (2010). Professional noticing of children’s mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñanza matemáticas en entornos en línea. *AIEM Avances de Investigación en educación Matemática*, 2, 53-70.
- Llinares, S. (2013). Professional Noticing: A component of the mathematics teacher’s professional practice. *Sisyphus: Journal of Education*, 1(3), 76-93.
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.
- Nemirovsky, R., DiMattia, C., Ribeiro, B. y Lara-Meloy, T. (2005). Talking about teaching episodes. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(5), 363-392.

- Philipp R., Jacobs, V.R. y Sherin, M. G (2014). Noticing of mathematics teachers. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education: Springer reference*. Recuperado de <https://goo.gl/sMKddH> [Consulta: 04/11/2016].
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277.
- Rivera, F. D. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. En M.F. Pinto y T.F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4* (pp. 81-88). Belo Horizonte, Brazil: PME.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivate concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*. DOI 10.1007/s10763-014-9544-y
- Sherin, M.G., Jacobs, V. R. y Philipp, R. A. (Eds.). (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.
- Star, J.R. y Strickland, S.K. (2007). Learning to observe: Using video to improve preservice teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 107–125.
- Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology: An overview. En N. K. Denzin y Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 273–285). Thousand Oaks: Sage.
- Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En Chick, H.L. y Vincent, J.L. (Eds.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4*, (pp. 305-312). Melbourne: PME.
- Zapatera, A. (2015). La competencia mirar con sentido de estudiantes para maestro (EPM) analizando el proceso de generalización en alumnos de Educación Primaria (Tesis doctoral). Universidad de Alicante.
- Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM.

#### CITA DE ESTE ARTÍCULO

Formato APA

Zapatera Llinares, A. (2017). Desarrollo de la mirada profesional en estudiantes para maestros a partir de un módulo de enseñanza centrado en la generalización de patrones. *Educación y Futuro Digital*, 14, 37-56.