SUMA 49
Junio 2005, pp. 95-99

Hamilton: La liberación del álgebra

Hace 200 años, el 3 de agosto de 1805, nacía, en Dublin, Willam Rowan Hamilton. Era el menor de cuatro hermanos, tres varones y una mujer. Su padre, Archibald, se dedicaba a negocios relacionados con las leyes, si bien no tenía una formación universitaria, pero era de su madre, Sarah Hutton, altamente dotada desde el punto de vista intelectual, de quien se piensa provenía la brillante inteligencia de William. Ambos murieron cuando William era todavía muy joven. Debido a las exigencias de su trabajo, Archibald se veía obligado a viajar con frecuencia, con lo que descuidaba la educación de su hijo, que, aun antes de haberse quedado huérfano, estuvo dirigida por su tío, el reverendo James Hamilton, gran apasionado al estudio de las lenguas.

Willian Rowan Hamilton (1805-1865)

William Hamilton demostró ser un niño tan extraordinariamente precoz que con solo cinco años era capaz de leer latín, griego y hebreo, a los ocho años leía italiano y francés, a los diez añadía a su bagaje lingüistico el sánscrito y el árabe, y a los catorce el persa.

A los doce años, a partir de su encuentro con el calculador americano Zerah Colburn, verdadero prodigio del cálculo mental, se inclina decisivamente hacia las matemáticas. Al año siguiente inicia el estudio del *Álgebra* de Clairault. A los quince años caen en sus manos los trabajos de Newton y Laplace. Con diecisiete años, encuentra un error en la *Mecánica celeste* de Laplace. Esto llama la atención de John Brinkley, astrónomo real de Irlanda, que dice de William:

> Este joven, no sé lo que será en el futuro, pero en estos momentos es el primer matemático de su edad.

Conoce y mantiene una buena amistad con los poetas Wordsworth y Coleridge. Escribe poesías, nada buenas por cierto, desde su adolescencia, que busca como refugio en los momentos de crisis amorosas. Se las enseña a Wordsworth, pero éste le dice que su talento está en la ciencia y no en la poesía.

En 1823 ingresa en el Trinity College de Dublín, y ya entonces presenta una memoria sobre Óptica que merece el honor de ser leída, al año siguiente, en la Real Academia de Irlanda. Corregida y aumentada, esta memoria se presenta de nuevo a la Academia en 1827 con el título de *A theory of systems of rays* (Una teoría de los sistemas de rayos), y en ella expone una cons-

Santiago Gutiérrez
hace.suma@fespm.org

trucción de la óptica geométrica que constituye un verdadero cuerpo de doctrina e introduce las funciones características de la óptica. Posteriormente, publicará tres suplementos a su teoría sobre la óptica geométrica, y aplicará la noción de función característica a sus estudios sobre dinámica.

En agosto de 1824, conoce a Catherine, hija de unos amigos de su tío James, de la que se enamora perdidamente, y a la que no pudo proponer matrimonio debido a que, entonces, con 19 años, todavía le quedaban tres años de estudios en el Trinity College. En febrero del año siguiente, la madre de Catherine le comunica que su hija se iba a casar con un clérigo, quince años mayor que ella pero con mejor posición que él.

En 1827, sucede a John Brinkley en la cátedra de Astronomía del Trinity College, donde destaca en sus tareas docentes. Al mismo tiempo, es nombrado astrónomo real de Irlanda y director del Observatorio de Dunsink

En 1831, se casa con Helen María Bayly. Sin embargo, de quien verdaderamente sigue enamorado es de Catherine, a la que ve con cierta frecuencia. Con Helen tiene tres hijos, varones los dos primeros, William Edwin y Archibald Henry, y niña la tercera, Helen Eliza Amelia.

En su concepción del mundo sensible, Hamilton considera la unidad indisoluble del espacio y del tiempo. De ahí saca una conclusión un tanto decepcionante: que así como la geometría es la ciencia del espacio el álgebra debe ser la ciencia del tiempo.

Físico, astrónomo y matemático, es en esta última materia donde Hamilton destaca de una manera especial. Dedica varias memorias al estudio de las secciones cónicas y a la resolución de la ecuación de quinto grado.

Pero, su gran aportación a las matemáticas consiste en liberar el álgebra abriendo sus puertas a otras álgebras menos restrictivas. Su reputación llegó a ser tan grande que a la edad de treinta años es elevado al rango de la nobleza, llegando a ser considerado como el matemático más importante habido en lengua inglesa después de Newton.

Los números irracionales

En su concepción del mundo sensible, Hamilton considera la unidad indisoluble del espacio y del tiempo. De ahí saca una conclusión un tanto decepcionante: que así como la geometría es la ciencia del espacio el álgebra debe ser la ciencia del tiempo. No obstante, este punto de vista, consistente en asociar el álgebra al tiempo, será decisivo, como se verá más adelante, en su aportación a la matemática y a la ciencia en general.

Centenario del descubrimiento
de los cuaterniones, 1943

Efectivamente, en 1833 y 1835, da lectura, en la Royal Irish Academy, a sendas memorias, que se publicarían en 1837 con el título de *Theory of conjugate functions, or algebraic copules; with a preliminary* and *elementary essay on* a*lgebra as the sciencie of pure time...* (Teoría de las funciones conjugadas o parejas algebraicas, con un ensayo preliminar y elemental sobre el álgebra como la ciencia del tiempo puro...). En la segunda sección de este trabajo, escoge Hamilton la noción de tiempo como principio y fundamento de la unidad numérica. Escribe:

> La idea de continuidad en la progresión de un momento de tiempo a otro engloba la idea de una progresión continua, de manera semejante, en las cantidades...

De aquí deduce...

> ...la existencia de un número o de una razón *a* que es la raíz cuadrada exacta de todo número positivo propuesto o razón *b*.

Siguiendo por este camino, y partiendo de la media proporcional de dos números positivos, establece que

$$\text{si } a > \frac{n'}{m'} \text{ para } \frac{n'^2}{m'^2} < b \text{ y si } a < \frac{n''^2}{m''^2} > b, \text{ entonces } a = \sqrt{b}$$

Llega así a la introducción de $a = \sqrt{b}$, esto es, de los números irracionales, como una partición definida por dos sucesiones, p_i^2 y p_j^2, tales que

$$p_i^2 < b < p_j^2, \text{ con } i, j = 1,2,3...$$

Y no continua desarrollando su teoría de los irracionales. Solo le interesa definirlos mediante los racionales.

> En la teoría de los números simples (reales), el símbolo $\sqrt{-1}$ es absurdo, y designa una raíz imposible, o un número imaginario simple; pero en la teoría de las parejas, este mismo símbolo es significativo, y designa una raíz posible, o una pareja real, la raíz cuadrada principal de la pareja $(-1,0)$.

Quizá la mayor aportación de Hamilton a las matemáticas fue liberar al álgebra del sometimiento a que la tenía constreñida el principio de permanencia de las leyes formales.

El álgebra de las parejas

Hacia 1830 ya estaban bastante admitidos los números complejos, gracias a la representación geométrica que cinco autores, Argand, Gauss, Mourey, Warren y Wessel, habían dado de los mismos, y, según parece, independientemente unos de otros. La autoridad y el prestigio de Gauss habían contribuido decisivamente a que esta representación fuese ampliamente difundida entre los matemáticos de la época. Sin embargo, ninguno de esos autores se había preocupado por extender la noción de número complejo al espacio de tres dimensiones. Aquí es donde el punto de vista de Hamilton resulta importante, porque al asociar el álgebra al tiempo y no al espacio, se desliga de la representación geométrica. Por otro lado, Hamilton señala que un número complejo $a + bi$, no es una suma en el sentido en que lo puede ser la suma de dos enteros, como 3 + 5, por ejemplo. El uso del signo + no autoriza a que la expresión bi pueda ser añadida al número a . En realidad, concluye, el número complejo $a + bi$ no es más que una pareja de números reales, (a, b).

En 1833, lee en la Real Academia de Irlanda sus escritos, en los que considera a los números complejos como pares ordenados de números reales. En la obra citada anteriormente (Teoría de las funciones conjugadas...), en su sección tercera, introduce, en efecto, el par ordenado de números reales (a, b) y define las operaciones sobre ese par, de acuerdo con las siguientes reglas:

$$(a, b) \pm (c, d) = (a \pm c, b \pm d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \right)$$

Al final de esta sección, sostiene la identidad entre el par (a, b) al número complejo $(a+bi)$ y afirma:

Por lo que se refiere al producto de parejas, Hamilton lo interpreta como una rotación, del mismo modo que ya hiciera Gauss, a partir de su representación en el plano, cuando interpretaba geométricamente el producto de dos números complejos como rotaciones, dilataciones o contracciones.

Pero la mentalidad de Hamilton era buscar fórmulas de generalización de todo cuanto estudiaba, así que acaba su exposición de la teoría de las parejas con un anuncio interesante, dice que está investigando tripletas de números reales.

Las propiedades de las operaciones con los números conocidos hasta entonces se consideraban fundamentales para la consistencia algebraica de un campo numérico. Se pensaba incluso que eran las propiedades las que definían las operaciones y no definiciones intrínsecas, más o menos formalizadas.

Los cuaterniones

Las propiedades de las operaciones con los números conocidos hasta entonces, entre ellas la conmutativa, se consideraban fundamentales para la consistencia algebraica de un campo numérico. Es decir, todo sistema numérico debía cumplir con este principio de permanencia de las leyes formales, hasta el punto de que ya se pensaba que eran las propiedades las que definían las operaciones y no definiciones intrínsecas, más o menos formalizadas.

En estas circunstancias, el trabajo anunciado con los tripletes ocasionaba numerosos quebraderos de cabeza a Hamilton. Se trataba de generalizar la adición y la multiplicación de los números complejos, $a + bi$, a los números de la forma $a + bi + cj$, o sea, pasar de un espacio de dos dimensiones a un espacio de tres dimensiones. La adición no ofrecía ninguna dificultad, pero sí el producto. Hamilton no encontraba la manera de multiplicar dos números complejos, o, y por lo mismo, no veía cómo construir un álgebra consistente con las tripletas. Son muchos los años que se dedica a pensar sobre esta cuestión.

Recibe incluso las burlas de sus hijos, que todas las mañanas, le preguntan al levantarse:

—¿Qué, papá, puedes ya multiplicar tripletas?

Hoy sabemos que el álgebra de las tripletas no pude construirse, como probó el matemático estadounidense O. May Kenneth en su artículo *The imposibility of a division álgebra of vectors in three dimensional space* (*The American Mathematical Monthly*, 1966).

Un día de octubre de 1843, estaba de paseo con su mujer, por la orilla del canal real, cuando de pronto se le ocurrió la solución. Debía pasar de tres a cuatro coordenadas y además prescindir de la propiedad conmutativa. Las unidades, *i*, *j*, *k*, debían estar sometidas a las siguientes condiciones:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

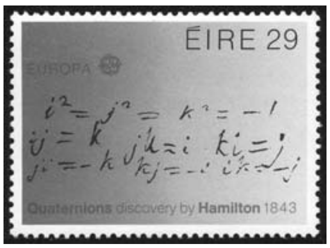
Los nuevos objetos, que llamó cuaterniones (o cuaternios), son de la forma

$$a + bi + cj + dk.$$

El propio Hamilton recordará así, quince años después, su gran descubrimiento:

> Mañana será el décimoquinto cumpleaños de los cuaterniones. Surgieron a la vida, o a la luz, ya crecidos, el 16 de octubre de 1843, cuando me encontraba caminando con la Sra. Hamilton hacia Dublín, y llegamos al puente de Broughman. Es decir, entonces y ahí, cerré el circuito galvánico del pensamiento y las chispas que cayeron fueron las ecuaciones fundamentales entre *i*, *j*, *k*; *exactamente como* las he usado desde entonces. Saqué, en ese momento, una libreta de bolsillo, que todavía existe, e hice una anotación, sobre la cual, *en ese mismo preciso momento*, sentí que posiblemente sería valioso el extender mi labor por al menos los diez (o podían ser quince) años por venir. Es justo decir que esto sucedía porque sentí, en ese momento, que un *problema* había sido resuelto, un deseo intelectual *aliviado*, deseo que me había *perseguido* por lo menos los *quince años* anteriores. [La cursiva aparece en el equivalente original inglés].

Parece ser que aquel día, Hamilton no pudo por menos que grabar las ecuaciones, resultado de su inspiración, en la madera del puente de Broughman.



Serie Europa, 1983

Ese mismo día, pedía la autorización correspondiente a la Academia para leer una comunicación sobre los cuaterniones en la siguiente sesión.

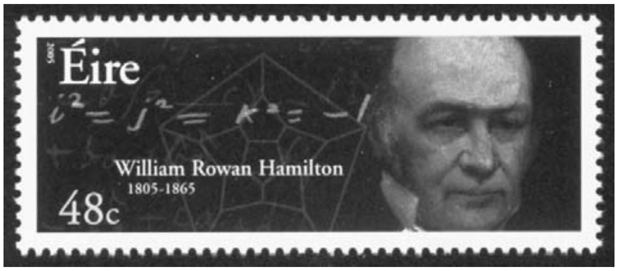
Como puede verse, los cuaterniones están formados por dos partes, la parte real, o escalar, y el resto que es la parte vectorial. Precisamente, la palabra *vector* es debida al propio Hamilton. De este modo, la multiplicación de cuaterniones puede realizarse utilizando las reglas algebraicas de los números reales, sin más que tener en cuenta que no se verifica la propiedad conmutativa y que las nuevas unidades, *i, j, k,* cumplen las igualdades:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$jk = i \qquad ki = j \qquad ij = k$$

$$kj = -i \qquad ik = -j \qquad ji = -k$$

La República de Irlanda, en este año de 2005, en honor de Hamilton y con motivo del 200 aniversario de su nacimiento, emitió este sello, en el que se recogen las igualdades inscritas en el puente de Broughman:



Conmemoración del 200º aniversario de su nacimiento, 2005

Hamilton continua sus trabajos sobre los cuaterniones durante los diez años siguientes, publicando una versión bastante completa de su teoría, en 1853, bajo el título de *Lectures on cuaternions* (Lecciones sobre los cuaterniones). Los siguientes años, hasta su muerte, en 1865, se dedica a la preparación de una versión ampliada, *Elements of cuaternions* (Elementos de los cuaterniones), que publicó póstumamente su hijo mayor, William Edwin, en 1866. Se trata de un voluminoso estudio, de más de 700 páginas, en el que Hamilton no solo desarrolla su teoría de los cuaterniones sino que presenta múltiples aplicaciones a la geometría, óptica y mecánica.

Incluye Hamilton, en los *Elementos de los cuaterniones,* la invención de un importante operador diferencial, que hoy designamos por el símbolo ∇ (aunque Hamilton lo colocaba así $\triangleleft$), y que el propio Hamilton llamó *nabla*, dado su parecido con un antiguo instrumento musical hebreo de ese nombre. Lo define, como sabemos, por la igualdad:

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

Pero, lo que interesa destacar aquí ahora, es el hecho de que al aplicar el operador *nabla* a una función vectorial da un cuaternión:

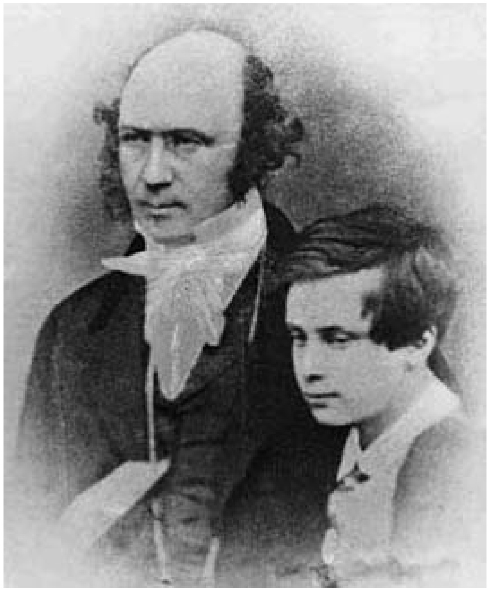
$$\nabla v = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right)\left(v_1 i + v_2 j + v_3 k \right) =$$
$$= -\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) k$$

la parte escalar, salvo el signo, es lo que hoy llamamos “divergencia de v”, y la parte vectorial es lo que llamamos “rotacional de v”.

Con ser importante la contribución que hace Hamilton al desarrollo de lo que conocemos como cálculo vectorial, al cual contribuyeron otros muchos matemáticos de la época y posteriores, quizá lo que más aportó Hamilton a las matemáticas fue la liberación del álgebra del sometimiento a que la tenía constreñida el principio de permanencia de las leyes formales, y, en particular, la propiedad conmutativa. Hamilton nos asoma a las álgebras no conmutativas. A partir de él, los matemáticos pierden el miedo a investigar otras posibles álgebras no conmutativas, como las álgebras vectoriales, así la del alemán Grassmann, contemporáneo de Hamilton, y las álgebras de dimensión finita. Puede decirse que los trabajos de Hamilton fueron al álgebra lo que las geometrías no euclideanas fueron a la geometría, o, dicho de otro modo, que la propiedad conmutativa encadenaba al álgebra como el quinto postulado de Euclides encadenaba a la geometría.

Los últimos años de Hamilton no pueden calificarse de felices. Una esposa casi inválida, su afición al alcohol y la poca aceptación de sus teorías por parte de los físicos, amargaron un tanto su final, que se produjo, en Dublín, fruto de un ataque de gota, el 2 de septiembre de 1865. A finales del siglo, ya el cálculo vectorial y tensorial experimentaría un gran desarrollo, y tanto físicos como matemáticos lo aplicaban en múltiples direcciones de su ciencia. Poco antes de morir, eso sí, recibía Hamilton la noticia de su elección como miembro de la *Academia Nacional de Ciencias* de Estados Unidos, siendo el primer extranjero en alcanzar semejante honor. ■

Puede decirse que los trabajos de Hamilton fueron al álgebra lo que las geometrías no euclideanas fueron a la geometría, o, dicho de otro modo, que la propiedad conmutativa encadenaba al álgebra como el quinto postulado de Euclides encadenaba a la geometría.



Roma esférica (y semiesférica)

Patio de la Piña, Museos Vaticanos y *Panteón*

Fotos de Francisco Martín Casalderrey