SUMA 49
Junio 2005, pp. 55-62

# En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La transcendencia (II)

**Carlos Usón Villalba**
**Ángel Ramírez Martínez**
*historia.suma@fespm.org*

El algoritmo es el estadio superior del cálculo, ya sea aritmético o algebraico. Mucho mejor cuanto más sintético, porque simplifica las operaciones, ofrece rapidez en las operaciones y alivia el trabajo, nada creativo, del calculista o, en la actualidad, porque favorece su automatización electrónica. Hasta ahí, la opinión del científico. La del técnico, no digamos. Pero, para quien tiene la responsabilidad de favorecer una profundización en el sentido de las cosas, el algoritmo acabado no puede ser más que la culminación de un largo proceso de aprendizaje en el que el viaje, una vez más, es lo importante. Aprender por pura memorización ese resultado final, tan alejado de su razón última y del proceso creativo de quienes lo ingeniaron[1], no tiene otro sentido que adiestrar en la disciplina de la obediencia ciega a normas incomprensibles y preestablecidas[2].

Podemos discutir si, históricamente hablando, hubo otros momentos en que esto no fue así pero, si algo debemos a Pascal, Neper o Leibniz[3], es su esfuerzo en pro de la mecanización. Un afán estéril, didácticamente hablando, si no aceptamos el reto de la reflexión, de la creatividad... de la discrepancia, en definitiva. Hoy mucho más si, en el necesario proceso de automatización de estrategias de cálculo, no asumimos la importancia de cultivar un aspecto fundamental del pensamiento matemático: la riqueza de las relaciones numéricas o algebraicas. Una clamorosa necesidad una vez que se ha abandonado casi totalmente el cálculo mental y, el uso indiscriminado y acrítico de la calculadora, contra el que tanto clamamos los partidarios de su incorporación didáctica, hayan hecho el resto. Y es que, de algoritmos y de eficacia calculística vamos a hablar en los párrafos que siguen.

## El diagrama de los Siete Cuadrados Multiplicativos

Ya comentamos en el artículo anterior[4] cómo, en los albores del siglo XIV, Chu Shih Chieh, tanto en *El precioso espejo de los cuatro elementos* como en su *Introducción a los estudios matemáticos* (*Suan Shu Chi Meng*), ya había hecho un extenso tratamiento del triángulo aritmético, cuya primera referencia, dentro del ámbito de la matemática china, data del siglo XI. También comentamos cómo ese mismo autor habla del *Viejo Método del Diagrama de los Siete Cuadrados Multiplicativos* y presenta un dibujo con la misma estructura triangular que hoy nos es tan familiar. Una distribución equilátera que no encontraremos después ni en su versión árabe ni en la europea ya que en ambos casos aparece formando un rectángulo cortado en diagonal.

Una forma de presentación que parece estar relacionada con la propia génesis de esta herramienta matemática y que pudiera ser determinante a la hora de interpretar sus posibles vías de difusión. Tanto en la obra de al-Khalil ibn Ahmad (718, 786) como en la de Pascal (1623,1662), su origen está relacionado con el recuento de posibilidades. Una actividad que se presta, de forma natural, a ordenar la información en tablas. En China, sin embargo, el uso de lo que hoy llamamos binomio de Newton para el cálculo de raíces y la resolución de ecuaciones, constituyó su principal razón de ser. Una ordenación de resultados que lleva de forma natural a la disposición equilátera[5].

> *El algoritmo es el estadio superior del cálculo, ya sea aritmético o algebraico. Mucho mejor cuanto más sintético, porque simplifica las operaciones, ofrece rapidez en las operaciones y alivia el trabajo, nada creativo, del calculista o, en la actualidad, porque favorece su automatización electrónica.*

Parece claro que las coordenadas en que se movieron unos y otros fueron distintas, ahora bien, cuando nos referimos al uso del Triángulo Aritmético en el cálculo de raíces y ecuaciones, ¿a qué nos estamos refiriendo? ¿Cuál fue su papel en el desarrollo de la aritmética china?

## Sobre el uso e importancia del Triángulo Aritmético

Al parecer, *El Diagrama de los Siete Cuadrados Multiplicativos* fue el gran revulsivo de la resolución de ecuaciones de grado superior a uno en la matemática china. El procedimiento general de cálculo de raíces cuadradas y cúbicas aparecía ya en el último capítulo del *Chiu Chang Suan Shu* (300 a. de C., 200 d. de C.), pero es muy posible que fueran Yang Hui y Chu Shih Chieh los artífices de este salto cualitativo en la extracción de raíces del que estamos hablando. Al menos son los primeros de quienes sabemos que usaran de forma sistemática esta herramienta matemática. Ahora bien, la propia denominación de *Viejo Método* que hace Chu y el hecho de que el propio Yang Hui cite, hacia 1261, un trabajo anterior de Chia Hsien (≈1050) sobre el tema, hacen pensar en una tradición más que en un desarrollo nuevo.

> *Pero, para quien tiene la responsabilidad de favorecer una profundización en el sentido de las cosas, el algoritmo acabado no puede más que la culminación de un largo proceso de aprendizaje en el que el viaje, una vez más, es lo importante.*

Chia Hsien ya había diferenciado dos métodos de extracción de raíces: el *tseng cheng fang fa* y el *li chieng shih shuo*, pero es en este último en el que utiliza los coeficientes del Triángulo. Para entender la importancia de esta incorporación es necesario desentrañar su sentido y eso nos obliga a adentrarnos en ese mundo de las certezas, firmemente asentadas en la tradición, y en la fe ciega en las verdades reveladas del que hablábamos al principio. Un universo algorítmico en el que el alumnado —que pertenece a una sociedad educada en la satisfacción inmediata del deseo[6]— privado de los caminos de la razón, ajusta su conducta a los criterios de la linealidad para hacer $(a+b)^2=a^2+b^2$ o $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$, incapaz de obedecer al miedo.

Hace años dedicamos un artículo[7] a la perversa costumbre de enseñar los algoritmos como verdades reveladas, sin explicación alguna y, lo que es peor, como si fueran únicos. Allí hicimos un extenso análisis de los de la suma, resta, multiplicación y división, hoy le tocaría el turno a los de las raíces cuadradas y cúbicas. Aunque, bien es cierto que, en este caso, no haremos otra cosa que asomarnos a ellos. Primero porque nos dejaremos llevar por el interés histórico más que por el didáctico y después porque, afortunadamente, el de la raíz cúbica fue desterrado de las aulas hace tiempo y el de la cuadrada parece tener sitial y urna en el museo de los algoritmos de lápiz y papel[8]. Sin embargo, nos interesa recorrerlos sucintamente para poder reconstruir cuál pudo ser el proceso de pensamiento que llevó a la matemática china hasta el triángulo aritmético.

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{12{,}04{,}09} & 347 \\
9 & 64\ \ 4\ \ 256 \\
3\,0\,4 & 687\ \ 7\ \ 4809 \\
2\,5\,6 & \\
4\,8\,0\,9 & \\
4\,8\,0\,9 & \\
0 &
\end{array}
$$

Si desglosamos el algoritmo, con idea de generar otro menos sintético y, como consecuencia, más cercano a la intuición, también el álgebra nos abre sus puertas. Si el objetivo es encontrar un número $ABC \equiv a\cdot 100+b\cdot 10+c$ que sea raíz cuadrada de 120409, estamos buscando el lado de un cuadrado cuya área sea 120409. Podríamos pensar en elevar al cuadrado $a{\cdot}100+b{\cdot}10+c$, al cubo si la raíz fuera cúbica, y así sucesivamente, para tratar de acercarnos al algoritmo. En este caso nos quedaría:

$$N = \mathbf{1}{\cdot}a^2{\cdot}10000 + \mathbf{2}{\cdot}a{\cdot}b{\cdot}1000 + (\mathbf{1}{\cdot}b^2+\mathbf{2}{\cdot}a{\cdot}c){\cdot}100 + \mathbf{2}{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}10 + \mathbf{1}{\cdot}c^2$$

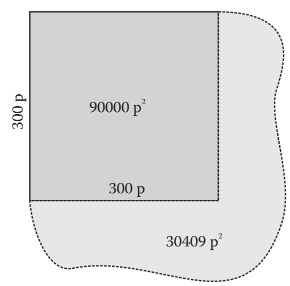
Ahora bien, como el número obtenido tiene tres cifras necesitamos los coeficientes del trinomio. Dicho de otro modo, necesitamos un Triángulo de Chu en tres dimensiones, de cuatro si el número tiene cuatro cifras, etc. Entonces: ¿sólo obtuvieron raíces cuadradas de números menores que 10000, o conocían los coeficientes del trinomio, cuatrinomio, etc? La respuesta aparece con toda la obviedad que cabía esperar al analizar uno de los 24 problemas del *Shao kuang* (*Cuánta anchura*), último capítulo del Chiu Chang, que, por cierto, da como única pista de la resolución del problema el resultado: 268.

*Desglosaremos el algoritmo de la raíz cuadrada, con la idea de generar otro menos sintético y más cercano a la intuición, También para esto el álgebra nos abre sus puertas.*

Su enunciado[9], y el análisis que muchos siglos más tarde[10] hará de este problema *Yung Lo Ta Tien*[11], nos permite reconstruir algebraicamente el procedimiento de cálculo y el sentido geométrico que acompaña su desarrollo.

*Paso 1*

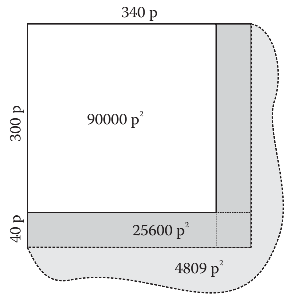
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{12{,}04{,}09} & 300 \\ 9\ 00\ 00 & \\ 3\ 04\ 09 & \end{array}$$




$$N - (a100)^2 = 30409$$

*Paso 2*

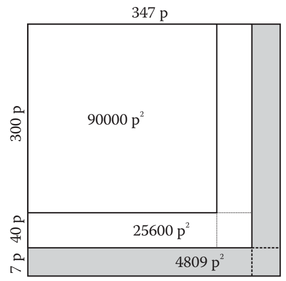
$$\begin{array}{r|l} \sqrt{12{,}04{,}09} & 300+40 \\ 9\ 00\ 00 & (2\times 300+40)40=25600 \\ 3\ 04\ 09 & \\ 2\ 56\ 00 & \\ 48\ 09 & \end{array}$$




$$N - (a100)^2 - (2a100+b10){\cdot}b10 =$$
$$= N - A^2 - 2AB - B^2 = 4809$$

*Paso 3*

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{12{,}04{,}09} & 300+40+7 \\ 9\ 00\ 00 & (2\times 300+40)40=25600 \\ 3\ 04\ 09 & (2(300+40)+7)7=25600 \\ 2\ 56\ 00 & \\ 48\ 09 & \\ 48\ 09 & \\ 0 & \end{array}$$




$$N - (a100)^2 - (2a100+b10){\cdot}b10 - (2(a100+b10)+c)c =$$
$$= N - A^2 - 2AB - B^2 - 2AC - 2BC - C^2$$
$$N = A^2 - 2AB - B^2 - 2AC - 2BC - C^2 = (A+B+C)^2$$

Efectivamente, un simple tablero de varillas, el chino o cualquier otro, permitiría obtener raíces cuadradas por este procedimiento[12]. Y, efectivamente, sirve con los coeficientes de la segunda fila del Triángulo para algoritmizar el cálculo de una raíz cuadrada. De modo similar, utilizando la tercera fila del *Diagrama de los Cuadrados Multiplicativos* y, aplicando sistemáticamente los pasos anteriores, se obtienen las cúbicas: $N-a^3-(3a^2+3ab+b^2)b-\{(3a^2+3ab+b^2)+(3ab+2b^2)+[(3(a+b)^2c+c^2]\}c.$

Hemos de recordar que el Triángulo de Chu Shih Chieh de 1303 tenía siete filas.

## El cálculo de raíces en Pascal

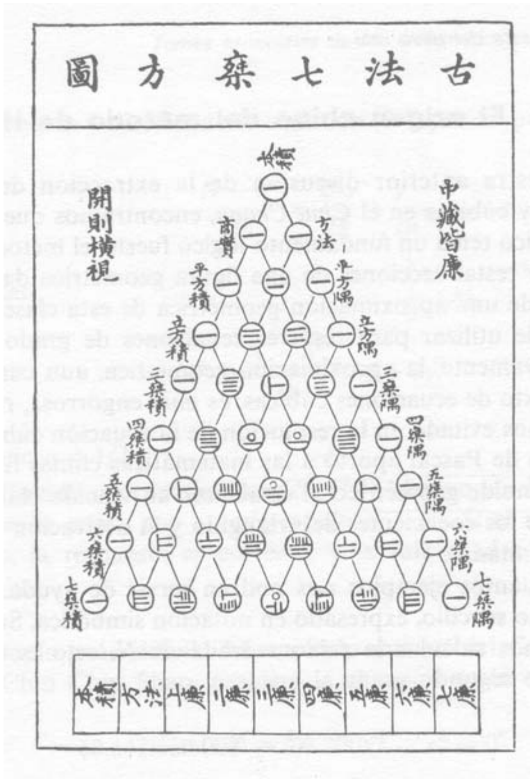
Analicemos de forma breve lo que aporta Pascal en este terreno. Efectivamente le dedica un pequeño capítulo[13] que titula: Resolución general de las potencias numéricas. En él enuncia exclusivamente el siguiente resultado[14]: Para calcular la *k*-ésima raíz entera, por defecto, de un número dado se buscan los *k* factores consecutivos cuyo producto más se aproxime, por defecto, a ese número dado[15]. Designemos con la letra *a* al menor de ellos. Se calcula la raíz *k*-ésima entera de *k!* y se suma a *a–1*. El resultado es el límite inferior de la raíz buscada. Se elige ahora el *k*-ésimo número triangular, se divide entre *k* y se suma a *a* para obtener el límite superior de la raíz que tratamos de hallar. Elevemos a *k* los dos límites obtenidos y elijamos, entre los números enteros que se encuentran entre ellos, aquel cuya potencia *k*-ésima mejor se aproxime al valor dado.

> Suprimo la demostración de esta regla, que tengo lista pero que es larga, si bien fácil, y más aburrida que útil: dejémosla pues y tornemos hacia un tema que promete reportar más frutos que exigir esfuerzos.
>
> *Pascal*

Podríamos pensar que la aportación de Pascal es puramente inductiva y experimental si no fuera por el colofón final: *Suprimo la demostración de esta regla, que tengo lista pero que es larga, si bien fácil, y más aburrida que útil: dejémosla pues y tornemos hacia un tema que promete reportar más frutos que exigir esfuerzos.* Toda una declaración de intenciones, coherente con su esfuerzo por diseñar una máquina que liberase al ser humano del ingrato cálculo aritmético, y bajo la que parece aflorar su concepto didáctico de lo que debe ser una presentación de resultados y la convicción de que *el fin único de la ciencia es el honor del espíritu humano* como diría Jacobi.

Pero, llegados a este punto, quizás sea bueno plantearse: ¿a quién dirigía Pascal sus escritos de matemáticas? Resulta evidente que a sus colegas. Así parece manifestarlo él mismo cuando dice: *Es posible que no haya meditado suficientemente en esta última parte de la solución. La daré, sin embargo, tal y como la he encontrado, sin omitir retomarla otra vez con más cuidado si parece ser digna.*

El análisis de este párrafo presenta dos evidencias: la primera, que se mueve al nivel del trabajo matemático de su época. La segunda, que los resultados que presenta son obra de su creatividad, sin contraste bibliográfico alguno, como si de un juego de ingenio se tratase, como si fueran el fruto maduro de la ociosidad de un intelectual del momento. No parece que se esconda tras ellos preocupación práctica alguna más allá de dar respuesta a las no menos ociosas tribulaciones del caballero de Meré.




## Volviendo la mirada al álgebra china

De cualquier modo, el cálculo de raíces, aunque importante, no pasa de ser un caso particular de ecuación de grado *k*, más concretamente: $x^k = N$. Pascal se conformaba con una aproximación entera de la raíz, pero el pensamiento chino era eminentemente práctico y, en ese ámbito de trabajo, una buena aproximación es la mejor de las soluciones del mismo modo que un algoritmo que permita un orden ilimitado de exactitud es el mejor procedimiento de cálculo. Esto, que parece una obviedad manifiesta, tardaría mucho tiempo en pasar a formar parte de las preocupaciones matemáticas europeas. Concretamente hasta que Vieta[16] en 1600 llegase a obtener un método mimético al que los chinos pusieran en práctica cinco siglos antes y Horner (1789–1837) dos más tarde, llevándose los honores[17].

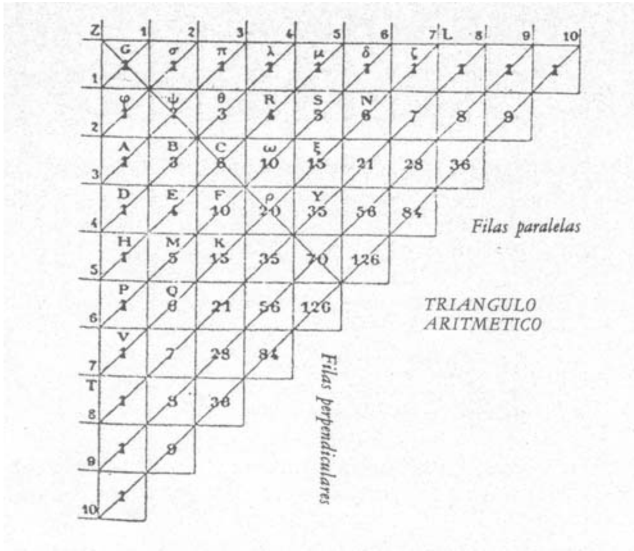
Pero, para tratar de recrear cuál pudo ser el proceso creativo de los matemáticos chinos debemos volver la vista al aula una vez más y elegir uno de esos problemas clásicos del álgebra elemental. Clásico tanto por la antigüedad de su enunciado —algunos de ellos son anteriores a Beda— como por la desconexión tan fuerte que mantienen con la relalidad. Por ejemplo: *¿Cuántas escaleras hay en mi casa si al subirlas de dos en dos y bajarlas después de tres en tres doy 40 pasos?* Si tal duda se correspondiera con una necesidad, cualquier persona en su sano juicio las contaría y listo. Si no existiera la duda, ¿quién iba a pensar que tal cosa pudiera ser un problema? No nos dejaremos llevar del positivismo más reduccionista y nos tomaremos el acertijo como lo que es: un juego.

Puestos en tal tesitura, cualquier estudiante de segundo o tercero de ESO, que no hubiera sido sometido a un enérgico —y exitoso—lavado de cerebro, comenzaría por dibujar una escalera o poner una tabla y tratar de inducir una solución. Es bien seguro que muy pocos plantearían la ecuación $x/3 + x/2 = 40$ como hacen la mayoría de nuestros alumnos y alumnas. Ellos saben que no es un juego, que es un problema de álgebra.

Planteémonos cómo podría abordarse su resolución a través de una tabla. Sería algo parecido a esto:

| Escaleras | Pasos al subir | Pasos al bajar | Total pasos |
|---|---|---|---|
| 12 | 6 | 4 | 10 |
| 18 | 9 | 6 | 15 |
| *48* | *24* | *16* | *40* |

La primera conclusión que se deduce es que el número de escaleras ha de ser par y múltiplo de tres[18] para que *salgan las cuantas exactas*. Así pues, si con 12 escaleras doy 10 pasos, para dar 40 pasos, que es cuatro veces más, necesitaré 48 escaleras[19]. Este sencillo método, que se catalogaría, despectivamente, como una variante de *la cuenta de la vieja*, y que ha pasado a la historia de las matemáticas bajo el nombre de *regula falsi* o *regla de la falsa posición*, fue ampliamente usado en todas las civilizaciones antes de la llegada del planteamiento de ecuaciones algebraicas. Por ejemplo, fue muy popular en la Europa medieval.




Si lo aplicamos estimando una solución, a, de la raíz cuarta de un número $N$, por ejemplo, y estudiamos más tarde el error obtenido, $e$, en busca de un mejor resultado, la ecuación $x^4 = N$ se transforma en: $(a+e)^4=N$. Y puesto que $a$ es un valor conocido esta se convierte a su vez en:

$$N - a^4 = 4a^3e + 6a^2e^2 + 4ae^3 + e^4 \qquad (1)$$

con lo que, el problema de encontrar la raíz cuarta de $N$, se transforma ahora en el de resolver la ecuación en $e$:

$$e^4 + 4ae^3 + 6a^2e^2 + 4a^3e + (a^4 - N) = 0$$

Un tipo de ecuaciones en las que el término independiente $a^4-N$ es negativo (cuando se toma $a$ como una aproximación por defecto) y al que dedicaron una especial atención las matemáticas chinas.

El cálculo de raíces nos ha llevado de forma natural a la resolución de ecuaciones, como la regla de falsa posición nos va a transportar a un sistema de cálculo que el eurocentrismo bautizó muchos años después como método de Rufini–Horner.

Ahora bien, los coeficientes de la fila cuarta del triángulo aritmético surgen aquí como resultado de la necesidad de expresar un proceso y por tanto juegan un papel meramente descriptivo que no justifica en modo alguno su trascendencia como revulsivo de la matemática china del siglo XIV. Sin embargo, si profundizamos un poco más y tratamos de resolver una ecuación de cuarto grado como la que aparece en (1).

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (2)$$

tomamos $h$ como una nueva aproximación por defecto y llamamos $e$ al error cometido, tenemos:

$$a_4(h+e)^4 + a_3(h+e)^3 + a_2(h+e)^2 + a_1(h+e) + a_0 = 0$$

que, desarrollando, se transforma en otra ecuación de cuarto grado en $e$:

$$\begin{aligned} & a_4 e^4 + \\ & \quad +(4a_4h + a_3)e^3 + \\ & \quad +(6a_4h^2 + 3a_3h + a_2h)e^2 + \\ & \quad +(4a_4h^3 + 3a_3h + 2a_2h + a_1)e + \\ & \quad +(a_4h^4 + a_3h^3 + a_2h^2 + a_1h + a_0) = 0 \end{aligned} \qquad (3)$$

que podríamos transformar en:

$$b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + a_0 = 0$$

y seguir iterando hasta encontrar un valor que resultase suficientemente ajustado a nuestras necesidades reales de precisión. Y es ahí, donde el triángulo aritmético juega un papel trascendental como operador. Si nos fijamos en (3) los coeficientes $b_i$ se han obtenido multiplicando las filas del triángulo por los $a_j$ correspondientes.

$$\begin{array}{lccccccccc} a_0 & & & & & 1 & & & & \\ a_1 & & & & 1 & & 1 & & & \\ a_2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ a_3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ a_4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

con lo que nos queda:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1\,a_0 & & & & \\ & & & 1\,a_1 & & 1\,a_1 & & & \\ & & 1\,a_2 & & 2\,a_2 & & 1\,a_2 & & \\ & 1\,a_3 & & 3\,a_3 & & 3\,a_3 & & 1\,a_3 & \\ 1\,a_4 & & 4\,a_4 & & 6\,a_4 & & 4\,a_4 & & 1\,a_4 \end{array}$$

Por su parte, la distribución de las $h$ se ajusta a sus diagonales que quedan multiplicadas así por sus potencias respectivas:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1\,a_0 & & & & \\ & & & 1\,a_1 & & 1\,a_1 & & & \\ & & 1\,a_2 & & 2\,a_2 & & 1\,a_2 & & \\ & 1\,a_3 & & 3\,a_3 & & 3\,a_3 & & 1\,a_3 & \\ 1\,a_4 & & 4\,a_4 & & 6\,a_4 & & 4\,a_4 & & 1\,a_4 \\ & & & & & & & & \\ h^4 & & h^3 & & h^2 & & h^1 & & h^0 \end{array}$$

es decir:

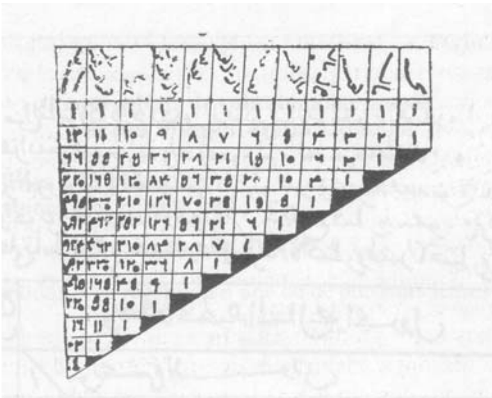
$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1\,a_0 & & & & \\ & & & 1\,a_1h & & 1\,a_1 & & & \\ & & 1\,a_2h^2 & & 2\,a_2h & & 1\,a_2 & & \\ & 1\,a_3h^3 & & 3\,a_3h^2 & & 3\,a_3h & & 1\,a_3 & \\ 1\,a_4h^4 & & 4\,a_4h^3 & & 6\,a_4h^2 & & 4\,a_4h & & 1\,a_4 \\ & & & & & & & & \\ b_0 & & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 \end{array}$$

Con lo que, sumando ahora estas diagonales en la otra dirección, obtenemos los $b_i$ correspondientes:

El *Diagrama de los Cuadrados Multiplicativos* se convierte así en un operador que facilita los cálculos de forma considerable[20]. Esa fue seguramente su principal virtud y lo que hizo de él un instrumento indispensable para la resolución de ecuaciones como las que plantea Chiu Sao en el capítulo IV del *Su Shu Chiu Chang*: $-x^4+763\ 200x^2-40\ 642\ 560\ 000 = 0$. Nada cercano a la evidencia, como puede comprobarse.

Visto lo cual, quedan dos cuestiones fundamentales para hacer de este método un sistema eficaz de cálculo. La primera: el tratamiento del cero y los números negativos. La segunda, contar con un modelo estimatorio que evite que el proceso se alargue innecesariamente.

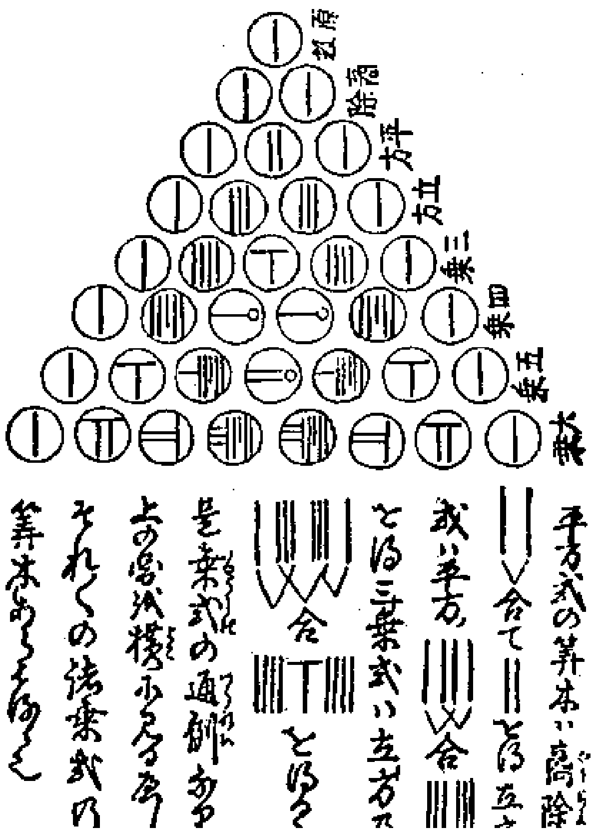
El problema del uso de números negativos se resolvió fácilmente utilizando varillas de dos colores. En cuanto al cero, la ausencia de varillas no elimina el problema de forma satisfactoria en todos sus aspectos pero permite los cálculos. La estimación sin embargo aparece como un proceso algo más complejo. Es cierto que el cálculo con varillas la favorece pero no sabemos hasta qué punto fue algo más que un arte.



*Le triangle arithmétique d'al-Karajī*

En cualquier caso, este sistema de cálculo les permitió realizar divisiones de polinomios de forma sintética mediante un procedimiento muy similar al que utilizó más tarde Rufini y que hoy, lleva su nombre. Lo que sabemos acerca del papel que jugaron algunos jesuitas como Mateo Ricci (1552–1610) en el trasvase de ideas matemáticas entre China y Europa no permite aventurar hipótesis acerca de un posible contacto entre Rufini, Vieta y los métodos chinos de cálculo[21]. Tampoco sabemos si se pudo establecer esa vía de comunicación a través del mundo árabe. Nos consta que al-Nasawi empleó el triángulo aritmético para extraer raíces cúbicas en el siglo XI y que al-Kashi, en el XV, hizo lo propio con las de cuarto grado; a partir de ahí sólo cabe especular.

En cualquier caso, casi como un guiño, los caminos del mestizaje quedan abiertos a una imagen del mundo científico que nunca fue tan cerrada y acotada como algunos se han empeñado en dibujar. Aunque la ósmosis fuera lenta y hubieran de pasar siglos para que resultara posible un trasvase eficaz de ideas, aunque una gran parte de ese caudal se evaporara[22], las fronteras fueron mucho más permeables de lo que se nos ha hecho creer y la deuda acumulada con el resto de las culturas mucho mayor de lo que le gustaría a la militancia eurocentrista. ■



## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOURBAKI, N.1972, *Elementos de Historia de las Matemáticas*, Alianza Edit., Madrid

BOYER, C. B., 1986, *Historia de la matemática*, Alianza Ed., Madrid

GEORGE GHEVERGHESE, Joseph, 1991. *La cresta del pavo real*, Editorial Pirámide, Madrid

PASCAL, B., 1983. *Obras*. Alfaguara, Madrid. Traduce Carlos R. de Dampierre, prologa: J. L. Aranguren.

PASCAL, B., 1995. *Obras Matemáticas* (Selección de textos), Edita Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. Méjico. Traduce Santiago Ramírez, prologa: Rafael Martínez.

PASCAL, B., 1998. *Pensamientos*. Cátedra. Madrid. Traduce y prologa: Mario Parajón.

RAMÍREZ, A., 2000. *Máquinas de calcular. De la mano a la electrónica*. UNED. Barbastro (Huesca).

RÍBNIKOV, K.1987. *Historia de las Matemáticas*. Editorial Mir. Moscú.

RUSHED, R. (director), 1977 *Histoire des sciences arabes*. Editions du Seuil. París.

## NOTAS

1 En ocasiones tras siglos de pasos intermedios y refinamientos sucesivos.

2 Y no estamos pensando sólo en la división o en el cálculo con fracciones, hablamos también de la regla de Cramer, del cálculo de la matriz inversa, de la descomposición en fracciones simples o del sentido mismo de dx a la hora de integrar.

3 [Ramírez, 2000].

4 En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. La autoría (I). *SUMA*, nº 48. Febrero 2005.

5 La excepción a la regla la puso Halayudha en India en el siglo X, quien dispuso los términos en forma equilátera a pesar de estar haciendo recuentos de sonidos.

6 Una especie de exaltación colectiva que roza la paranoia y que equipara la libertad individual a la capacidad de consumo.

7 "...Por los trillados caminos de la aritmética escolar de las cuatro operaciones" (*SUMA* nº 22). Y más recientemente en "¿Por qué seguir anclados en Egipto?" (*SUMA* nº 35) hacíamos una valoración general del tratamiento algorítmico.

8 En cualquier caso, las preguntas se agolpan a medida que se avanza en el cálculo de la raíz cuadrada de 120.409 que muestra el ejemplo: ¿por qué se separan los dígitos de dos en dos? ¿Es real ese manifiesto paralelismo con el de la división? ¿Por qué 3, luego 2·3 y después se le añade un número? ¿Qué operación se esconde tras el *añadido*? ¿Y qué sentido tras esa duplicación y ese producto? Planteadas en 3º de ESO, por ejemplo, su respuesta es una bonita excusa para interrelaccionar los enfoques aritmético, algebraico y geométrico como una estrategia de resolución de problemas.

9 Existe un campo cuadrado de 71.824 pu cuadrados de área. ¿Cuánto mide su lado?

10 En el XV concretamente

11 Una enciclopedia ¡de más de 11.000 volúmenes! que recoge los comentarios de Yang Hui sobre el Chiu Chang.

12 Geverghese [1991] explica con todo detalle, en las página 223 a la 233, el cálculo a través del sistema de varillas.

13 Páginas 85 a 88 en la traducción de Santiago Ramírez Castañeda (México, 1995) citada en la bibliografía.

14 Una vez más lo presentamos adaptado a la terminología actual.

15 En un capítulo anterior describe algorítmicamente cómo se ha de proceder para conseguirlo.

16 *De numerosa potestatum... resolutione*.

17 Boyer [1986] en la pág. 267 reconoce sin ambages el origen chino del método y en la pág. 390 la primacía de Vieta sobre Horner.

18 Y, un poco más tarde, que por cada seis escaleras de aumento, los pasos crecen en cinco.

19 Intentar recuperar la libertad y el sentido común para aplicar cualquier razonamiento que lleve a la solución, abrir las posibilidades de acercarse a ella por diferentes caminos, algorítmicos o no, resulta complicado una vez que el uso de la $x$ ha acotado todos los dominios del pensamiento. Realizar unos cuantos problemas, de los que llamamos *de planteamiento*, sin utilizarla puede constituir una excelente terapia.

20 Lo que aquí se aporta no pasa de ser una reconstrucción por parte de los autores del prolijo y difícilmente comprensible capítulo 7.3.2. de Gheverghese [1996] en el que se llega a intuir con dificultad la importancia de este potente operador.

21 Gheverghese [1996] aventura tal posibilidad en la página 281.

22 Muchas veces entre las llamas con las que algunos sacrificaban el conocimiento al miedo que les producía su propia ignorancia.