SUMA 49
Junio 2005, pp. 37-46

Matemáticas en la elaboración de estrellas. Demostraciones con cartulinoflexia

En este trabajo se presentan y analizan los problemas propuestos en el concurso matemático "El inGENIO no tiene edad", que tuvo lugar en nuestro colegio y en el que se enfrentaron alumnos de todas las edades, desde Infantil hasta Bachillerato. Cada problema iba relacionado con un paso para construir una estrella de papel con interesantes propiedades matemáticas. El equipo que resolvía todos sus ejercicios aprendía a crear estrellas.

This article introduces and analyses the exercises which were presented in the mathematical competition "El inGENIO no tiene edad", which took place in our school and children of all of ages took part. Each exercise dealt with a step in the building of a paper start with interesting mathematical properties. The team which achieved a resolution of all the exercises learned how to make a paper star.

¿Se puede decir que *demostrar que las diagonales de un cuadrado se cortan en el centro* es un problema de ingenio? ¿A qué edad será genial nuestra respuesta? En un principio, parece difícil comparar la demostración utilizando coordenadas cartesianas de un alumno de 1º de Bachillerato con los argumentos de doblado de papel de un alumno de 3º de Primaria, aunque el hecho de usar menos herramientas matemáticas complejas parece premiar como resolución más ingeniosa a la segunda. ¿Qué ocurriría si enfrentamos a alumnos de todas las edades, desde Infantil de 3 años hasta 2º de Bachillerato, ante los mismos problemas *ingeniosos*? Nace así nuestro concurso “El inGENIO no tiene edad”. Tres fueron los grandes objetivos para diseñarlo:

- Coordinar equipos de alumnos formados por un alumno de cada clase (desde Infantil de 3 años hasta 2º de Bachillerato) para resolver problemas propuestos en cada nivel.
- Buscar un elemento matemático común en el que se planteasen los problemas adecuándose a cada edad.
- Motivar al alumno para que el enfoque no fuese el de un complicado concurso de problemas matemáticos, sino que los participantes se enfrentasen jugando.

Para la realización de esta actividad era preciso la colaboración de todo el Departamento de Matemáticas, desde Infantil hasta Bachillerato, por lo que la organización del concurso ha sido llevada a cabo por: dos profesoras de Infantil, dos profesoras de Primaria, tres profesores de matemáticas de ESO y Bachillerato, un profesor de Primaria y coordinador de actividades extraescolares y diez alumnos de 4º de ESO que venían participando durante el curso en un Taller de Ingenio celebrado en nuestro colegio: El Carmelo de Granada.

Se motivó el concurso con carteles y elementos de papiroflexia en todas las clases. Durante las semanas previas al concurso, se animó a participar a todos los alumnos.

Para acercar nuestra experiencia a todas las edades, cada equipo debía de estar formado por 15 miembros: un alumno por cada curso, desde Infantil hasta Bachillerato, pasando por Primaria y ESO. La formación de los equipos era totalmente libre, siendo generalmente los de mayor edad los que *fichaban* a los más pequeños. Los alumnos de infantil fueron seleccionados por sus profesoras y, en el caso de que un equipo necesitase algún componente, éstos eran completados por la organización.

Rafael Ramírez Uclés
Colegio El Carmelo de Granada. Granada.

Plantear problemas para esta amplia gama de edades suponía encontrar algún material manipulativo que resultara atractivo tanto por su forma como por sus posibilidades matemáticas. Los elementos utilizados fueron estrellas de doce puntas construidas a partir de piezas de papel. Aprendimos a construir estas estrellas de nuestra alumna Maravillas Peláez en un taller de papiroflexia, mientras doblábamos pajaritas, cerditos y elefantes. Tres meses después de este concurso nos sorprendió gratamente encontrar la estrella como trabajo ganador de un concurso de papiroflexia propuesto por la revisa QUO.

En cada problema se describía un paso para la elaboración de la estrella y se planteaba un problema relacionado con este paso. Así, si el equipo coordinaba todos sus ejercicios, aprendía a *crear estrellas*.

Nuestro concurso constaba de tres fases que se desarrollaron en el salón de actos en una misma mañana:

- Primera fase:

El equipo disponía de treinta minutos aproximadamente.

Cada concursante (excepto los de infantil y 2º de Bachillerato) recibía las pruebas de todos los niveles y tenía que resolver el problema propuesto para su nivel. Una vez transcurrido el tiempo, se entregaban las soluciones.

- Segunda fase:

Se reunían los equipos y cada uno decidía qué problemas quería intentar resolver de nuevo y qué miembro lo haría individualmente. Para esta reunión sólo disponían de cinco minutos. Era importante, ya que alcanzaba más puntuación, que dentro de un equipo los problemas los resolvieran individualmente alumnos de niveles inferiores a la dificultad propuesta en el problema.

- Tercera fase:

Resolvían individualmente los problemas que habían decidido anteriormente. Para ello disponían de diez minutos.

En la prueba para los alumnos de 2º de Bachillerato e Infantil, la estrella era usada como dado (un cubo con las esquinas truncadas), donde las diferentes simetrías y las múltiples combinaciones de colores la convertían en un interesante objeto matemático que estudiaremos en este artículo. Esta actividad la realizaron de manera simultánea mientras el resto de su equipo resolvía sus correspondientes pruebas, disponiendo de una hora para realizarla.

Finalmente, se sumaban las puntuaciones obtenidas en la primera y tercera fase junto con los puntos conseguidos por los alumnos de infantil y de 2º de Bachillerato. El equipo ganador recibía una estrella y una camiseta con el logotipo del concurso para cada uno de sus integrantes.

Para una mayor claridad expositiva, seguiremos el siguiente esquema de presentación, aconsejando al lector la construcción de la estrella para una mejor comprensión de los problemas:

- Sección I: se explican los pasos para la construcción de la estrella de papel.
- Sección II: se describen los materiales de los que disponían los equipos para resolver los correspondientes problemas.
- Sección III: se presentan los problemas para cada uno de los cursos.
- Sección IV: se analizan los contenidos matemáticos de cada uno de los problemas anteriores, así como algunos comentarios al respecto.
- Sección V: se describen algunas conclusiones obtenidas tras el desarrollo de la actividad.

Los problemas vendrán posteriormente ordenados por cursos, ya que agrupados de esta forma los recibían los alumnos.

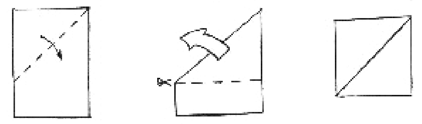
La relación entre los pasos para la elaboración de la estrella y los problemas de cada curso (desde primaria hasta ESO) vienen dados en el siguiente esquema:

- Paso 1: 4º de Primaria
- Paso 2: 1º de ESO
- Paso 3: 2º de Primaria
- Paso 4: 3º de Primaria
- Paso 5: 5º de Primaria
- Paso 6: 6º de Primaria
- Paso 7: 4º de ESO
- Paso 8: 3º de ESO
- Paso 9: 1º de Primaria

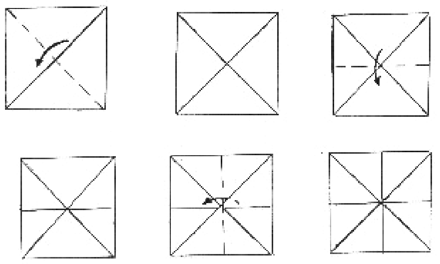
Los problemas de 2º de ESO y 1º de Bachillerato iban relacionados con pasos previos a la elaboración de la estrella, mientras que los problemas para Infantil y 2º de Bachillerato eran posteriores a esta.

Construcción de la estrella

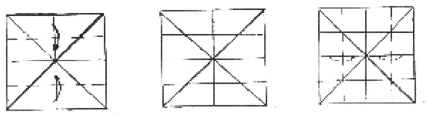
A continuación describimos los pasos para construir y ensamblar las piezas que forman la estrella. Si nos atrevemos con la cartulinoflexia, la belleza y consistencia de la estrella es mayor.



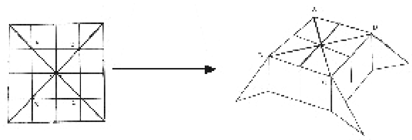
- Paso 1: Conseguir un cuadrado a partir del folio rectangular.



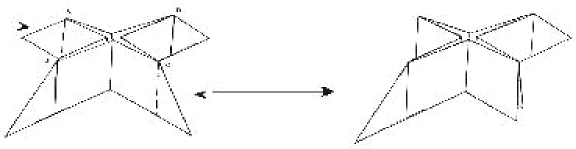
- Pasos 2, 3 y 4: Doblar las diagonales y las mediatrices de los lados del cuadrado.



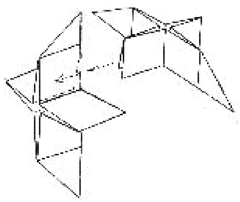
- Pasos 5 y 6: Doblar las mitades de las mitades de los lados.



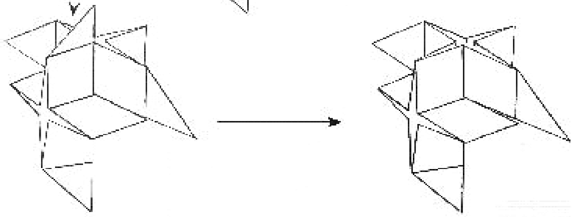
- Paso 7: Obtener la pieza dibujada en el paso siguiente localizando el cuadrado formado por los cuatro cuadrados centrales y uniendo en un mismo punto los puntos medios de sus lados.



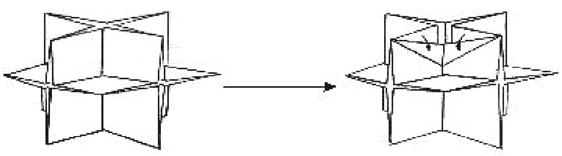
Doblando hacia dentro dos puntas opuestas, obtenemos la pieza quedando dos brazos cuadrados y dos triangulares. Necesitaremos 6 piezas para la fabricación de la estrella.



- Paso 8: Para ensamblar dos piezas, introducimos uno de sus brazos cuadrados en el interior del cuadrado del mismo tamaño que aparece en el brazo triangular de otra pieza.

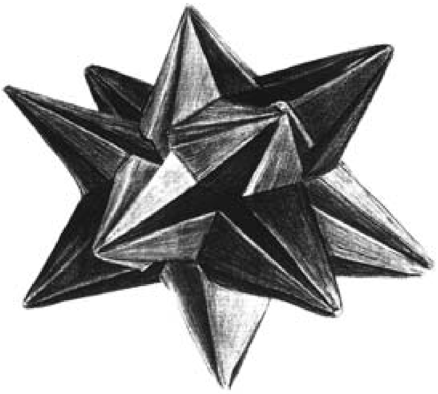


Para unirlas basta introducir el extremo triangular en el cuadrado de la otra pieza. Repetiremos este ensamblaje con las seis piezas, uniendo siempre brazos cuadrados con triangulares.



- Paso 9: Al unir todas las piezas quedan los tres planos obtenidos al seccionar el cubo perpendicularmente por los puntos medios de sus aristas. Para obtener las puntas, doblaremos hacia fuera las intersecciones de los planos anteriores como se indica en la figura.

- Paso 10: Obtenemos así una estrella con doce puntas, dos por cada una de las piezas. Cada una de estas puntas se localizaría en los puntos medios de las aristas de un cubo. Al unirlas queda un cubo con las esquinas truncadas hasta los puntos medios de las aristas.



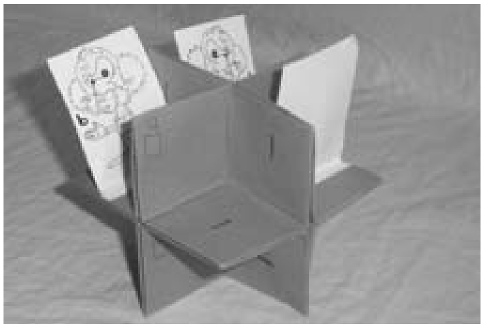
¿Se puede decir que demostrar que las diagonales de un cuadrado se cortan en el centro es un problema de ingenio? ¿A qué edad será genial nuestra respuesta?

Material utilizado

Cada equipo disponía de estrellas de doce puntas para usarlas como dados. Cada color equivalía a una puntuación. Las estrellas se apoyaban sobre tres o cuatro puntas y si alguna de ellas coincidía con su color en el tablero, se añadía un punto a la suma obtenida. Había puntas blancas, azules, rojas, amarillas y verdes, por lo que se obtenía una amplia gama de combinaciones.

Los alumnos del curso de 1º de Primaria debían descubrir las imágenes que se formarían en una habitación llena de espejos (arriba, abajo, izquierda y derecha) cuando nuestro *Genio* mira la letra b.

Si desaparece el *Genio* y doblamos hacia dentro las esquinas, obtenemos la estrella.



Los alumnos de 4º de Primaria debían construir este cuadrado partiendo de un A4, pidiéndoles una *demostración*.

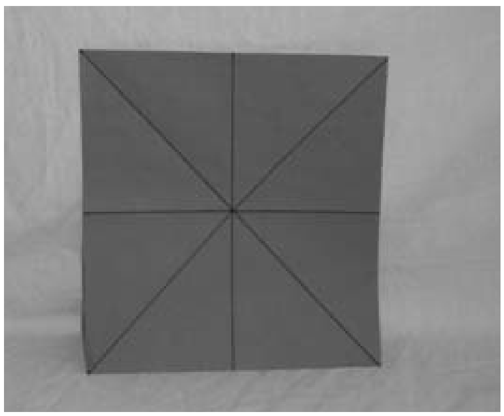
En esta figura están marcados los primeros dobleces para construir las fichas.

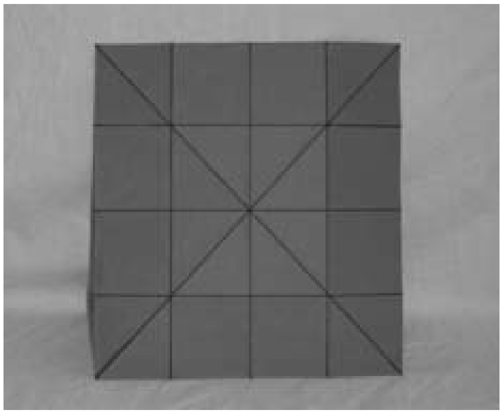
Aquí debían resolver sus problemas los alumnos de 2º y 3º de Primaria.

Al añadir los siguientes dobleces, se obtenía la figura de la izquierda.

Cada uno de los alumnos de 5º y 6º de Primaria recibían esta pieza y la utilizaban para resolver sus correspondientes problemas.

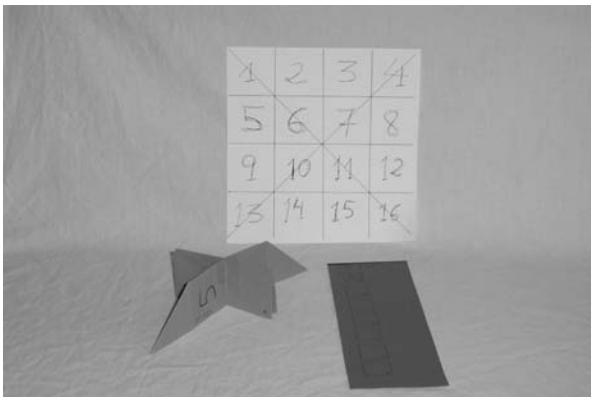
Este último juego, junto con el de 1º de Bachillerato, fue en el que los equipos encontraron una mayor dificultad.





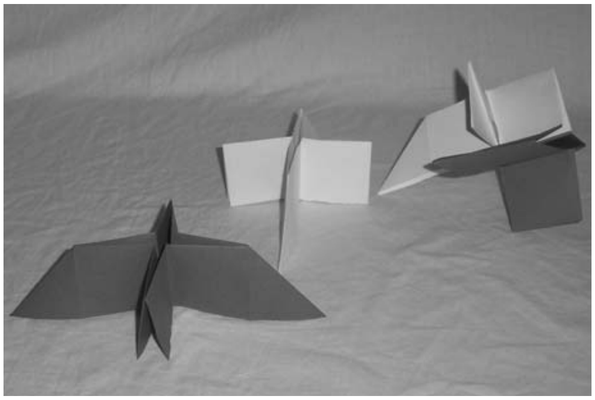
En la primera de las dos figuras anteriores se presenta el material para el juego de 4º de ESO Las fichas ya dobladas no se podían abrir (estaban pegadas) y con esta actividad se aprendía a construir las piezas que luego ensambladas de forma adecuada formarían la estrella. Los alumnos debían colocar con la posición adecuada los números del 1 al 16 en las caras correspondientes, usando como referencia el número 5 en una de ellas.

Se pretende motivar al alumno para que el enfoque no fuese el de un complicado concurso de problemas matemáticos, sino que los participantes se enfrentasen jugando.



El juego de 3º de ESO consistía en ensamblar las piezas. Los alumnos recibían dos piezas sueltas y otras dos unidas (introduciendo un extremo cuadrado de una de ellas en otro de la otra pieza y doblando el pico correspondiente de la otra hacia dentro).

Una vez recortado el cuadrado de un DIN-A4, queda un rectángulo. Si suponemos que el lado pequeño mide 1, los alumnos de 1º de Bachillerato tenían que conseguir que se convirtiera en un rectángulo áureo. Para ello sólo podían doblar el papel y utilizar otro folio como regla.



Problemas propuestos

A continuación, describimos los problemas con los que se enfrentaban los alumnos. Todos ellos iban acompañados del material correspondiente. Además, junto a los enunciados se marcaba el orden de los pasos a seguir para que, una vez resueltos, cada equipo pudiese construir la correspondiente estrella de papel. Señalamos aquí que cada alumno disponía de los problemas del resto de sus compañeros para ir pensando soluciones para la puesta en común.

Problemas de Primaria

1º Primaria: Noveno paso para hacer la estrella

Para hacer una estrella, nuestro genio está en una habitación mágica llena de espejos. En su mano tiene una letra, que cuando se coloca delante de cualquier espejo se queda escrita en él. Cuando el genio se mira en un espejo, su imagen aparece justo en la otra habitación reflejada, como en el ejemplo. ¿Podrías escribir en cada espejo la letra que aparecería, si nuestro genio viaja por las ocho habitaciones?

2º Primaria: Tercer paso para hacer la estrella

Para empezar a hacer la estrella, nuestro genio necesita contar cuántos rectángulos y cuántos cuadrados hay en la pieza. Ayúdale y recuerda que los cuadrados son rectángulos con todos los lados iguales.

3º Primaria: Cuarto paso para hacer la estrella

Nuestro genio se ha liado contando todos los triángulos que hay en la pieza que tienes en tus manos. Ayúdale y cuidado, que aunque parecen todos iguales, hay muchos distintos.

4º Primaria: Primer paso para hacer la estrella

Para empezar a hacer la estrella, nuestro genio necesita buscar el cuadrado más grande que se puede encontrar en un DIN-A4 (que es un rectángulo). Encuentra un cuadrado lo más grande posible e intenta convencer al genio, *con una demostración*, de que no puede haber uno mayor que el tuyo.

5º Primaria: Quinto paso para hacer la estrella

Doblando papeles para hacer la estrella, nuestro genio necesita contar cuántos cuadrados hay en la pieza. Ayúdale, pero cuidado, que hay más de los que parece.

6º Primaria: Sexto paso para hacer la estrella

Con tanto doblar el papel, nuestro genio no se ha dado cuenta de que quizás haya contado mal. Ayúdale a contar todos los triángulos que hay, y cuidado que aunque todos parecen iguales, hay muchos distintos.

El cuadrado de área máxima que se puede descubrir en un rectángulo es el de lado igual al mínimo de los lados del rectángulo.

Problemas de ESO
1º ESO: Segundo paso para hacer la estrella

Dobla en el folio las dos diagonales con mucho cuidado. Dobla también cada lado por la mitad y te darás cuenta de que las dos diagonales se cortan justo donde se cortan los otros dos dobleces. El genio es un mago: si colocas en este punto tu dedo, verás que el cuadrado no se cae. ¿Podrías convencer a nuestro genio, *con una demostración*, de que el centro de un cuadrado es el punto donde se cortan las diagonales?

2º ESO: Para pensar antes de hacer la estrella

Al genio se le ocurren preguntas rarísimas: ¿Por qué los folios (A4) son de este tamaño? Ayúdale a encontrar la respuesta con *una demostración*. Una pista: ¿qué le pasa a un folio si lo doblas por la mitad de su lado mayor?

3º ESO: Octavo paso para hacer la estrella

Para terminar de hacer la estrella nuestro genio necesita unir piezas, como las dos que tienes ya unidas. ¿Cuántas piezas tendremos que unir como mínimo para que no se quede ninguno de sus cuatro brazos sin pareja?

4º ESO: Séptimo paso para hacer la estrella

Una de la partes de la elaboración de estrellas que al genio le cuesta más es doblar las piezas. Doblando el cuadrado que tienes numerado desde el 1 hasta el 16, se obtiene la pieza que el genio necesita colocar. Échale una mano y escribe en cada uno de las caras que ves de la pieza el número que le corresponde antes de doblarla. Atención, que está prohibido abrir la pieza (esto nunca lo hace un buen genio).

Problemas de Infantil y Bachillerato
1º Bachillerato: Para pensar mientras se hace la estrella

El rectángulo que tienes ha salido de quitarle un cuadrado a un A4. El genio se ha dado cuenta de que no es proporcional al folio, porque es mucho más alargado. Si el lado más pequeño vale 1, ¿podrías decir cuál debería de ser la medida del lado más largo, para que, al quitar un cuadrado el resto tuviese la misma proporción que el trozo que te hemos dado? Una vez que consigas este número *áureo* haciendo cuentas, ¿lo podrías conseguir doblando el papel? Pista: Un triángulo rectángulo de catetos 1 y 2 tiene una hipotenusa “bastante” parecida.

1º y 2º Infantil: Para jugar cuando se ha hecho la estrella

Los genios juegan con estrellas de colores. Cada color tiene un valor y hay estrellas de muchos colores. Intenta jugar en equipo y lanzar la estrella a la cartulina de su mismo color. Si aciertas, a los puntos obtenidos se le suma 1; pero si no aciertas, a los puntos obtenidos se le resta 1. Suerte y puntería.

3º Infantil: Para jugar cuando se ha hecho la estrella

Los genios juegan con unos dados muy divertidos. Son estrellas y cada color tiene un valor. Cuando la estrella cae al suelo, toca con unas cuantas puntas. Tienes que contar los colores que tocan el suelo y darle la puntuación al jugador de tu equipo de 2º de Bachillerato.

2º Bachillerato: Para pensar cuando se ha hecho la estrella

Los genios juegan con unos dados que son un tanto particulares. Cuando se lanzan, se suman las puntas que tocan el suelo.

Si tus pequeñitos aciertan con algún color en el lugar correspondiente, a la puntuación obtenida le sumas 1; pero si no aciertan, a la puntuación obtenida le restas 1. Calcula las puntuaciones posibles de las estrellas y elige el número de lanzamientos que necesitas para obtener las puntuaciones de cada juego de los que se proponen. Ganas si consigues el número exacto; pero si no lo haces, intenta quedarte lo más cerca que puedas.

Las matemáticas en la estrella de papel

Analizamos aquí algunas de las propiedades que presentan nuestras estrellas de papel desvelando, según el orden de fabricación, algunas de las soluciones de los problemas propuestos. No buscamos la rigurosidad de la demostración, sino el ingenio aportado por los concursantes.

Primer paso
¿Cuál es el cuadrado de área máxima que se puede descubrir en un A4?

La solución es aún más general: *El cuadrado de área máxima que se puede descubrir en un rectángulo es el de lado igual al mínimo de los lados del rectángulo*.

Una demostración bastante ingeniosa sería recortar dicho cuadrado. Si existiese un cuadrado de área mayor, nuestro cuadrado podría contenerse dentro y basta girar el cuadrado sobre la superficie del rectángulo para demostrar que, ni tan siguiera un giro del nuestro, está contenido en el rectángulo.

Segundo paso
¿Por qué las diagonales de un cuadrado se cortan en el centro?

Lo que es inmediato comprobar doblando papel, se puede demostrar diciendo que el punto donde se cortan las mediatrices de los lados equidista de los cuatro vértices, por lo tanto, es el centro de la circunferencia circunscrita. Como las diagonales serían diámetros, su intersección es el centro del cuadrado.

Tercer paso
¿Cuántos rectángulos?

Hay cinco cuadrados (cuatro pequeños iguales y el cuadrado completo) y cuatro rectángulos iguales.

Cuarto paso
¿Cuántos triángulos?

Hay cuatro triángulos rectángulos grandes y ocho rectángulos pequeños con su hipotenusa sobre las diagonales y cuatro con su hipotenusa sobre los lados . En total: 16, todos rectángulos e isósceles.

> *Es inmediato comprobar doblando papel que el punto donde se cortan las mediatrices de los lados equidista de los cuatro vértices, por lo tanto, es el centro de la circunferencia circunscrita.*

Quinto paso
Más cuadrados

Hay dieciséis cuadrados 1x1, nueve 2x2, cuatro 3x3 y uno 4x4. En total 30.

Sexto paso
Más triángulos

Contando los triángulos rectángulos que tienen su hipotenusa en un mismo lado de una diagonal se tiene la siguiente suma: 4+3+2+1=10. Consideramos los cuatro lados de las dos diagonales y tenemos 40. Basta añadirle los que no tienen la hipotenusa en la diagonal, que son 2x4=8. En total 48 triángulos rectángulos e isósceles.

Séptimo paso
Doblando papel

La resolución de este paso es básicamente constructiva y basta localizar en la pieza el cuadrado al que pertenece al doblar el papel.

Octavo paso
Pegando papel

Por la forma de ensamblar las piezas, se comprueba que cada pieza va unida a cuatro distintas. Basta una pieza más para que todas estén unidas. En total seis piezas.

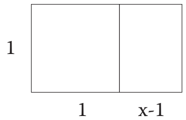
Noveno paso
Simetrías

Basta ser un poco presumido para mirar en el espejo las letras b, d, p y q.

Analizamos con más detalle los problemas propuestos para Bachillerato:

Rectángulos áureos

Para convertir un rectángulo de anchura 1 en un rectángulo áureo, debemos resolver la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, que resulta al plantear la proporcionalidad



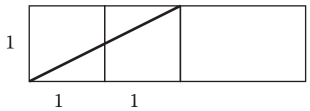
1/x=(x-1)/1

La solución es

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

El problema se reduce a doblar $\sqrt{5}$, que es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 1 y 2.

En los dibujos anexos se observa el procedimiento.

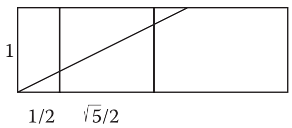


Como hemos conseguido la longitud

$$\frac{\sqrt{5}}{2}$$

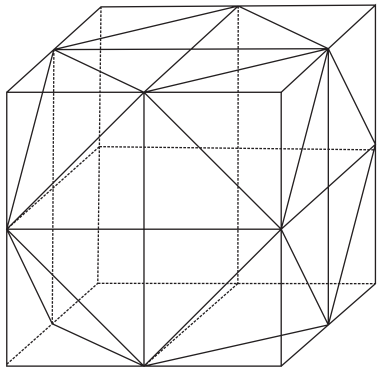
si dividimos la diagonal dibujada en dos partes iguales, basta sumarla a 1/2.

Todo esto, doblando papel.



Quizás los resultados más interesantes aparezcan en el problema propuesto para 2º de Bachillerato y en el juego de Infantil.

Si unimos con caras cuadradas y triangulares las puntas sobre las que se puede apoyar la estrella, obtenemos:



Las estrellas pueden caer sobre tres o cuatro puntas. Para visualizar mejor todas las posibilidades, veamos la estrella como un cubo truncado de lado L=½, ya que la longitud del cuadrado inicial que originaba la pieza era 1.

Sin considerar defectos de construcción y estabilidad, podemos considerar la probabilidad a priori de caer sobre una cara proporcional a su área.

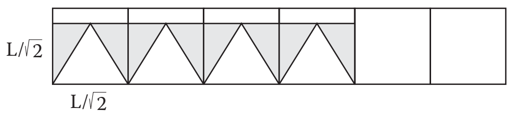
Aparecen seis caras cuadradas: cada una con área $L^2/2$ y ocho caras triangulares, cada una con área

$$\frac{\sqrt{3}}{8}L^2$$

El área total sería

$$6\frac{L^2}{2}+8\frac{\sqrt{3}}{8}L^2=\left(3+\sqrt{3}\right)L^2$$

Para comparar estas áreas colocamos seguidas las seis caras cuadradas y sobre ellas disponemos las ocho caras triangulares, como se muestra en la figura siguiente. Se demuestra así que es más probable que caiga sobre cuatro puntas, aunque hay ocho posibilidades para caer sobre tres puntas por las seis de caer sobre cuatro.



Si consideramos la probabilidad proporcional al área, quedaría que la probabilidad de que caiga sobre una de las caras concretas de cuatro puntas sería

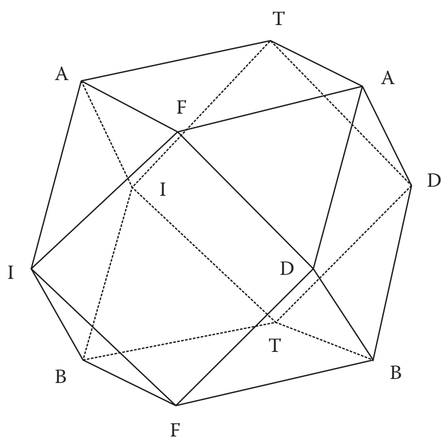
$$\frac{3-\sqrt{3}}{12}=0{,}1056...$$

mientras que la de que caiga sobre una de las caras de tres sería

$$\frac{\sqrt{3}-1}{16}=0{,}0457\ldots$$

Quedaría que la probabilidad de que caiga sobre cuatro puntas es 0,6339... y de que caiga sobre tres, 0,3660...

Para analizar las puntuaciones posibles al lanzar la estrella, utilizaremos la siguiente notación para las fichas: A (arriba), B (abajo), D (derecha), I (izquierda), F (frente) y T (atrás). Por la construcción, la estrella quedaría:



Consideramos las caras cuadradas en este orden: C_1=ATAF (arriba), C_2=FIFD (frente), C_3=IAIB (izquierda), C_4=TITD (detrás), C_5=DADB (derecha) y C_6=BFBT (abajo). Nombraremos las caras triangulares por: T_1=AFD, T_2=FAI, T_3=ATI, T_4=TAD, T_5=BFD, T_6=FBI, T_7=BTI y T_8=TBD.

Si asignamos a cada una de las letras *A, B, I, D, F* y *T* las puntuaciones *a, b, i, d, f* y *t* respectivamente, obtenemos, por ejemplo, que la puntuación obtenida al caer la estrella sobre la cara C_1 sería $2a+t+f$ y sobre la cara T_1 sería $a+f+d$. Podemos recoger todas las combinaciones en la siguiente matriz *M*, en la que las primeras seis columnas dan las puntuaciones de las caras cuadradas y las ocho últimas dan las de las caras triangulares.

$$M=\begin{pmatrix} 2&0&1&0&1&0&1&1&1&1&0&0&0&0\\ 1&2&0&0&0&1&1&1&0&0&1&1&0&0\\ 0&1&2&1&0&0&0&1&1&0&0&1&1&0\\ 1&0&0&2&0&1&0&0&1&1&0&0&1&1\\ 0&1&0&1&2&0&1&0&0&1&1&0&0&1\\ 0&0&1&0&1&2&0&0&0&0&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

Si multiplicamos la matriz de valores V= (a,f,i,t,d,b) por M, obtenemos las puntuaciones para todas las caras recogidas en la matriz

$P=(C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8)$.

Es decir, $V * M = P$.

Como ejemplos significativos analizamos los siguientes:

- Si todas las piezas son del mismo color y le damos el valor a, esto es, $a=f=i=t=d=b$, se obtiene:

  $(a, a, a, a, a, a)\,M=a(4, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$.

- Si una única pieza es de distinto color, por simetrías bastaría suponer af=i=t=d=b,

  $(a, f, f, f, f, f)\,M = (2a+2f, 4f, a+3f, 4f, a+3f, 4f, a+2f, a+2f, a+2f, a+2f, 3f, 3f, 3f, 3f)$.

  El caso particular a=2 y f=1, se obtiene así:
  (6, 4, 5, 4, 5, 4, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3).

- Las estrellas elaboradas con tres colores distintos y dos fichas por cada color, colocadas para que no enganchen dos colores iguales, presentan interesantes simetrías. Sería el caso $a=b$, $i=d$ y $f=t$. Quedaría:

  $(2a+2f, 2f+2i, 2i+2a, 2f+2i, 2i+2a, 2a+2f, a+f+i, a+f+i, a+f+i, a+f+i, a+f+i, a+f+i, a+f+i, a+f+i)$.

  En el caso particular a=1, f=2 y i=3, se obtiene:
  (6, 10, 8, 10, 8, 6, 6, 6, 6, 6, 6 ,6 ,6 ,6).

Creemos que esta ha sido una actividad que ha conseguido convertir la resolución de algunos problemas en una actividad atractiva para los alumnos.

Conclusiones

Quizá la sorpresa mas agradable fue que casi doscientos alumnos de todas las edades participaran ilusionados en un concurso matemático. Esto superó con creces nuestras primeras expectativas, ya que en otras actividades matemáticas el número de participantes fue bastante inferior.

Nos gustaría destacar que ha sido un punto de encuentro de los distintos niveles educativos, tanto para los profesores que lo organizamos como para los alumnos, intercambiando en todo momento experiencias que en el aula pasan inadvertidas. Ha sido un gran trabajo en equipo, tanto de los profesores implicados como del resto de la comunidad educativa, ya que en la elaboración del material y de los problemas han participado todos.

Creemos que ha sido una actividad que ha conseguido convertir la resolución de algunos problemas en una actividad atractiva para los alumnos. El hecho de enfrentarse a los ejercicios en un ambiente distinto al aula, con compañeros de otras edades, lo convertía en un juego. El reto de descubrir soluciones para problemas de mayor nivel y aprender ideas de alumnos de cursos inferiores tiene una doble lectura:

Por un lado, el alumno percibe que el conocimiento matemático debe crecer: en cada curso va a conocer más herramientas e ideas para poder resolver ejercicios. Por otro lado, se da cuenta de que la intuición y la creatividad para enfrentarse a estos problemas ya está presente en todas las edades. ■

Logotipo del concurso: Lidia Padial Vera
Ilustraciones de la estrella: Carolina Moreno Aguilar
Ilustraciones de los pasos: Francisco Cervantes Ibáñez.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adams, J.L. (1999): *Guía y juegos para superar bloqueos mentales*, Gredisa, Barcelona.

De Alonso, M. (2002): *Los juegos en el aula*, Servicio de Publicaciones de CSI-CSIF.

Gardner, M. (1988): *Matemática para divertirse*, Granica, Barcelona.

Ramírez, R. (2003): "El ingenio no tiene edad", *Encuentro de profesores de matemáticas de Primaria y Secundaria*, Castellón 2003.

Ramírez, R. y Morales, S. (2002): "¿Cuánto de ingenio hay en un problema de ingenio?", *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas*, Cardeñoso, J.M. y otros (Eds.), Departamento de Didáctica de la Matemática y SAEM THALES, Granada, pp. 223-228.

Revista Quo, n.º 95, Agosto 2003, pp.110-111.

Stewart, I. (2000): *Ingeniosos encuentros entre juegos y matemática*, Gredisa, Barcelona.