SUMA 47
Noviembre 2004, pp.41-46

El método de Descartes para trazar normales a curvas

El trabajo que hemos desarrollado en este artículo es un estudio de un método histórico desarrollado por Descartes para calcular la recta normal a una curva, y que puede ser aprovechado para calcular derivadas puntuales y generales de funciones. El método, requiere de la resolución de ecuaciones algebraicas y transcendentes, que en principio pueden ser complicadas (por eso ha caído en el olvido), pero que permite introducir en el aula una gran cantidad de aspectos docentes. Además, la idea en la que se fundamenta el método de Descartes puede ser aprovechada para calcular la distancia de un punto a una recta o un plano.

This article deals with a study of Descartes's method to determinate the tangent line to a curve. This procedure can be used for calculate the derivative of a function. The method is very rich from a geometrical point of view and it requires the resolution of algebraic and trascendent equations, may be very complicates to solve (this is the reason why the method has been forget), but it provides us to introduce in the classroom a huge among of docent aspects. Moreover, the main idea in which Descartes's method is based can be used to calculate the distance from a point to a line or a plane.

La histórica controversia Leibniz-Newton sobre la invención del Cálculo Diferencial en el siglo XVII ha eclipsado otras contribuciones que se hicieron en ese campo con anterioridad, y que fueron en su momento un testigo que recogieron tanto Leibniz como Newton para avanzar en la carrera del conocimiento matemático. Por otra parte, las aportaciones (independientes) tanto del alemán como el sajón fueron tan geniales que todavía contribuyeron más a que el trabajo de sus antecesores quedase aún más relegado a un segundo plano. Como consecuencia de todo ello, algunos métodos históricos para el cálculo de normales (o equivalentemente de tangentes) a curvas son, hoy día, muy poco conocidos. Tal es el caso del método que ideó René Descartes (1596-1675), y que estudiaremos en el próximo apartado.

Haciendo un poco de historia, parece ser que los primeros estudios sobre tangencias a curvas y superficies se deben a Arquímedes de Siracusa (298-212) AC y a Apolonio de Perga (262-?) AC, aunque sus aportaciones se limitan a algunas cónicas, tal y como sabemos por la obra de Pappus de Alejandría (290-350) AC que recoge comentarios sobre el tratado *Tangencias* de Apolonio, y en particular del famoso problema de las circunferencias tangentes. Después de la fértil era helénica en el estudio de problemas geométricos, hay que esperar hasta el siglo XVII para que se vuelvan a producir importantes avances en el problema del trazado de tangentes a curvas. El progreso lo realizaron, con métodos independientes, tanto Descartes como Pierre Fermat (1601-1665).

Leyendo los textos (Boyer, 1987), (Gaukroger, 1995) y (Chica, 2001), resulta revelador el hecho de que parece ser que con su potente Méthode, Descartes era consciente de que todas las propiedades de una curva estaban completamente determinadas si se es capaz de dar su ecuación en dos variables y trazar su normal, y escribe (véase, Boyer pág. 435):

> Habré dado aquí todo lo que es necesario para el estudio de curvas, una vez que dé un método general para trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una curva en un punto arbitrario de ella. Y me atrevería a decir que este no es sólo el problema más útil y más general que conozco, sino de los que hubiera deseado conocer.

Sin embargo, Descartes no fue capaz de realizar grandes avances en su método para el trazado de normales, ya que como veremos después, conduce a ecuaciones difíciles de resolver en la época en que lo desarrolló. No obstante, la propuesta de Descartes resulta, a nivel didáctico muy sugerente hoy porque requiere conjugar aspectos geométricos (sobre todo relativos a las propiedades de la circunferencia) con otros de naturaleza algebraica, que pueden ser abordados, bien analíticamente o bien mediante el uso del ordenador, potenciando un aprendizaje más global de las matemáticas.

Juan Carlos Cortés López
Universidad Politécnica de Valencia.
Gema Calvo Sanjuán
IES Els Évols, L'Alcúdia. Valencia.

El método de descartes: descripción

En este apartado, y siguiendo el magnífico libro de C.B. Boyer sobre Historia de las Matemáticas (Boyer, 1986), en primer lugar, describiremos el método de Descartes para el trazado de rectas normales a curvas y posteriormente lo traduciremos a lenguaje algebraico. Textualmente, Boyer (pg. 435) explica de la siguiente forma:

El método de Descartes:

> Descartes sugería que para hallar la normal a una curva algebraica en un punto de dicha curva, se debería tomar un segundo punto variable sobre la curva, y hallar la ecuación de la circunferencia con centro en el eje de coordenadas (puesto que utilizaba un único eje, el de abscisas) y que pase por los puntos y . Igualando entonces a cero el discriminante de la ecuación que determina las intersecciones de la circunferencia con la curva, puede hallarse el centro de la circunferencia tal que coincide con y, conocido el centro, pueden determinarse fácilmente tanto la normal como la tangente a la curva en el punto.

Posteriormente, en la página 462, C.B. Boyer propone en el ejercicio 12 hallar la normal a la curva $y^2 = 4x$ en el punto (1,2), utilizando la técnica de Descartes.

En lenguaje algebraico, el método de Descartes puede expresarse como sigue (véase figura 1): dada una curva $y = f(x)$ un punto $P(a, f(a))$ de la misma ($a \in Dom(f(x))$), para calcular la pendiente n de la recta normal r_n: $y - f(a) = n(x - a)$ a $y = f(x)$ en P debemos considerar la circunferencia Γ de centro $C(c, 0)$ (sobre el eje de abscisas) y radio $r = \overline{CP}$

$$\Gamma: (x - c)^2 + y^2 = (a - c)^2 + f^2(a)$$

y exigir que Γ e $y = f(x)$ se corten en un único punto (el de tangencia) que debe ser P, para lo cual se debe imponer que el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{c} (x - c)^2 + y^2 = (a - c)^2 + f^2(a) \\ y = f(x) \end{array} \qquad (1)$$

tenga una única solución real: $x = a$, sin contar su multiplicidad algebraica (que a partir de ahora denotaremos por m.a.). Esto permitirá calcular c y en consecuencia n, ya que

$$n = \frac{f(a)}{a - c} \qquad (2)$$

Ahora, utilizando la relación entre las pendientes de dos rectas perpendiculares, el cálculo de la pendiente t de la recta tangente r_t: $y - f(a) = t(x - a)$ buscada es muy sencillo

$$t = \frac{c - a}{f(a)} = f'(a) \qquad (3)$$

Como podemos intuir desde la descripción que Boyer hace del método, uno de los inconvenientes del mismo radicará en la dificultad de encontrar condiciones que garanticen que la ecuación que se deducirá de (1) tenga solución real única (salvo m.a.), porque más allá del caso en que se obtiene una ecuación polinómica de grado dos (como veremos luego, este es el caso del ejercicio que propone Boyer) cuya respuesta es muy sencilla en términos del discriminante, en general, esta no es una cuestión sencilla, ni siquiera en el caso particular polinómico (de grado tres o mayor); y desde luego el problema es mucho más sofisticado cuando la ecuación que se deriva de (1) involucra funciones trascendentes.

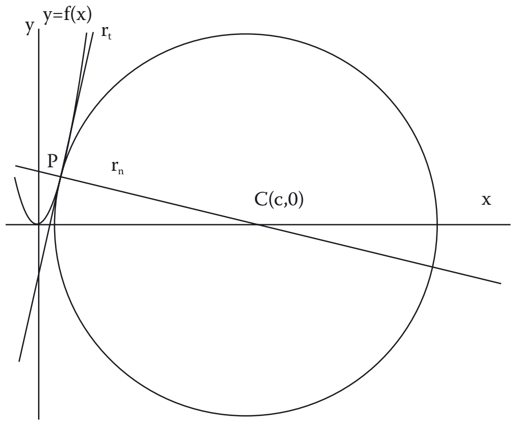

Figura 1. El método de Descartes

Aplicaciones

A continuación mostraremos varias aplicaciones del método de Descartes. Empezaremos resolviendo el problema propuesto por Boyer, que es el más sencillo. El resto de las aplicaciones las hemos seleccionado, de entre las generadas nosotros mismos, para ilustrar aquí los diversos aspectos que nos interesa subrayar a propósito de este método.

Aplicación 1

Determinar, por el método de Descartes, las rectas normal y tangente a la curva $y^2 = 4x$ *en el punto* P(1, 2).

Según hemos visto anteriormente, debemos encontrar el centro $C(c, 0)$ de una circunferencia tangente a la gráfica G de $y^2=4x$ en el punto $P(1, 2)$ (obsérvese, según la figura 2, que la intuición geométrica nos indica que $c > 1$). Para ello exigimos que el sistema

$$\begin{array}{c} \Gamma: (x - c)^2 + y^2 = (1 - c)^2 + 2^2 \\ G: y^2 = 4x \end{array} \qquad (4)$$

tenga como única solución real (sin contar la m.a.) $x = 1$. Esto nos conduce a que la ecuación polinómica de grado dos en x

$$x^2 - 2cx + c^2 + 4x = 1 - 2c + c^2 + 4 \Rightarrow x^2 + (4 - 2c)x + 2c - 5 = 0$$

debe tener a $x = 1$ como raíz real doble. Garantizar esto es equivalente a exigir que el discriminante sea nulo:

$$\Delta = (4 - 2c)2 - 4(2c - 5) = 0 \qquad (5)$$

de donde, resolviendo esta ecuación cuadrática en c obtenemos $c = 3 > 1$ (obsérvese que como es intuitivamente plausible, esta ecuación también debe tener solución real doble, al ser el centro $C(c, 0)$ único). En consecuencia, aplicando (2) y (3)

$$r_n : y - 2 = \frac{2}{1-3}(x-1) \quad (n = -1)$$
$$r_t : y - 2 = \frac{3-1}{2}(x-1) \quad (t = 1)$$

por lo que $f'(1) = 1$, tal y como puede comprobarse utilizando las reglas de derivación.

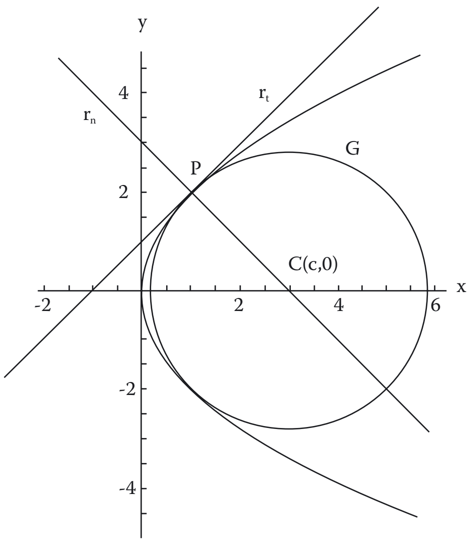

Figura 2. Aplicación 1 del método de Descartes

Exploraremos ahora otras aplicaciones del método para calcular derivadas, donde los escenarios que aparecen son notablemente más sofisticados.

Aplicación 2
Utilizando el método de Descartes, calcular f'(2) *siendo* f(x)=x².

En esta ocasión debemos resolver el sistema

$$\Gamma: (x - c)^2 + y^2 = (2 - c)^2 + 4^2$$
$$G: y^2 = x^2$$

que conduce a

$$x^4 + x^2 - 2cx + 4c - 20 = 20 \qquad (6)$$

La interpretación geométrica nos indica que $c > 2$ y que esta ecuación debe tener como única solución real (salvo m.a.) x=2. Ahora no disponemos de un criterio tan sencillo como el del discriminante para las ecuaciones polinómicas cuadráticas, pero podemos determinar c razonando como sigue. Como (6) es una ecuación polinómica de grado cuatro y x=2 debe ser su única raíz real (salvo m.a.) debe satisfacerse alguno de los siguientes casos:

Caso 1: $x = 2$ tiene m.a. cuatro.
Caso 2: $x = 2$ tiene m.a. dos y las otras dos raíces son complejas (conjugadas).

Sin embargo, la primera posibilidad no puede darse, ya que, en ese caso se tendría

$$x^4 + x^2 - 2cx + 4c - 20 = (x - 2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$$

lo cual es imposible, como se deduce comparando los coeficientes que acompañan a x^2. Por lo tanto,

$$x^4 + x^2 - 2cx + 4c - 20 = (x - 2)^2 \cdot [x - (\alpha + i\beta)] \cdot [x - (\alpha - i\beta)]$$
$$x^4 + x^2 - 2cx + 4c - 20 = (x - 2)^2 \cdot (x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)$$

desarrollando el término de la derecha y comparando coeficientes formamos el sistema

$$\begin{array}{ll} x^4: & 1 = 1 \\ x^3: & 0 = -2\alpha - 4 \\ x^2: & 0 = \alpha^2 + \beta^2 + 4 + 8\alpha \\ x^1: & -2c = -4(\alpha^2 + \beta^2) - 8\alpha \\ x^0: & 4c - 20 = 4(\alpha^2 + \beta^2) \end{array}$$

del cual sólo nos interesa calcular c. Esto es sencillo, pues de las ecuaciones x^0: $4c - 20 = 4(\alpha^2 + \beta^2)$ y x^3: $0 = -2\alpha - 4$, es decir, $-8\alpha = 16$, sustituyendo en la ecuación de x^1 tenemos:

$$-2c = 20 - 4c + 16 \Rightarrow c = 18 > 2$$

Ahora basta sustituir en (3) los datos y obtenemos

$$f'(2) = (18 - 2)/4 = 4$$

tal y como es sencillo comprobar utilizando las reglas de derivación.

A través de la aplicación 2 hemos podido observar que el método de Descartes aplicado al cálculo de la derivada de una función sencilla puede conducir a un problema de naturaleza algebraica complicado de resolver. El siguiente ejemplo profundiza más en este sentido, y aporta una forma atractiva de tratarlo en el aula utilizando para ello algún asistente matemático, tipo Mathematica®.

Aplicación 3

Calcular, por el método de Descartes, f'(1) *siendo* f(x) = x^3.

Razonando como en las aplicaciones anteriores, llegaremos a que la ecuación polinómica

$$p_c(x) = x^6 + x^2 - 2cx + 2c - 2 = 0 \qquad (7)$$

debe tener como única raíz real (salvo m.a.) $x = 1$ por lo que sólo caben las siguientes posibilidades:

Caso 1: $p_c(x) = (x - 1)^6$
Caso 2: $p_c(x) = (x - 1)^4 \cdot (x - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)$
Caso 3: $p_c(x) = (x - 1)^4 \cdot (x - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2) \cdot (x^2 - 2\gamma x + \gamma^2 + \delta^2)$

Prosiguiendo como en la aplicación 2, es sencillo ver que el único caso que puede darse es el tercero. La resolución del sistema de ecuaciones nos ha llevado a que $c = 4$ y por lo tanto tenemos $f'(1) = 3$. Sin embargo, como los cálculos que se requieren para llegar a estas conclusiones son bastante laboriosos, podemos mostrar un camino alternativo representando la familia uniparamétrica $\{p_c(x)\}$ dada por (7) y seleccionando de dicho haz, la función que corte al eje de abscisas una única vez en $x = 1$. Como puede verse en la figura 3, esto corresponde a $c = 4$ (para llegar a este valor o una aproximación del mismo deben realizarse diversas pruebas, utilizando estrategias del tipo: ensayo y error, la función zoom de aproximación local en la visualización de gráficas y en general toda la información que esté a nuestro alcance, como por ejemplo ahora, que la interpretación geométrica del problema nos indica que $c > 1$).

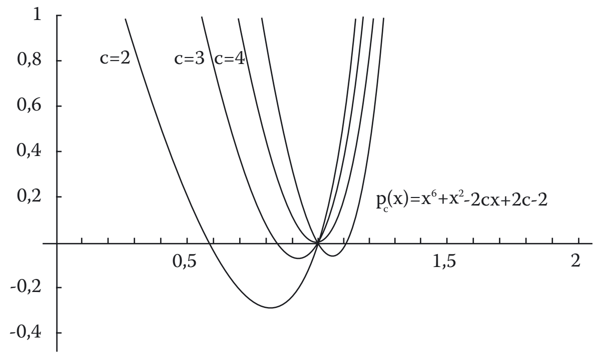

Figura 3. Aplicación 3: resolución gráfica

El problema polinómico general consistente en determinar $f'(a)$ siendo $f(x) = x^n$, lleva vía el método de Descartes, a la ecuación

$$p_c(x) = x^{2n} + x^2 - 2cx - a^2 + 2ax - a^{2n} = 0 \qquad (8)$$

Para el cálculo de c debe considerarse que (8) tiene como única raíz real $x = a$, sin contar la m.a., (es inmediato sustituyendo en (8) ver que $p_c(a) = 0$). Más aún podemos asegurar que su multiplicidad algebraica será dos, pues la interpretación geométrica del problema de tangencia nos indica que la ecuación (8) tiene a $x = a$ como única raíz real, y además como $p_c(x)$ es un polinomio de grado par, la m.a. de $x = a \in \mathbb{R}$ debe ser también un número par de entre $\{2, 4, ..., 2n\}$, por lo que al menos podemos garantizar que

$$p_c'(a) = 0 \Rightarrow 2na^{2n-1} + 2a - 2c = 0 \quad (9)$$

(ya que, un número es un cero de m.a. dos de un polinomio sí y sólo sí también es cero del polinomio derivado), pero como tenemos,

$$p_c''(a) = (2n)(2n-1)a^{2n-2} + 2 \neq 0 \quad \forall a$$

podemos afirmar que la m.a. de $x = a$ es exactamente dos.

Hasta ahora en las aplicaciones hemos calculado derivadas puntuales, sin embargo, el método puede utilizarse para obtener la función derivada. Veamos un ejemplo con una función diferente a las tratadas hasta ahora, la función canónica de proporcionalidad inversa.

Aplicación 4

Utilizando el método de Descartes, deducir la regla de derivación de la función f(x) = 1/x.

Consideremos $r \in \mathbb{R} - \{0\}$ y calculemos $f'(r)$. La aplicación del método nos conduce a la ecuación

$$(x-c)^2 + \frac{1}{x^2} = (r-c)^2 + \frac{1}{r^2}$$

$$p_c(x) = x^4 - 2cx^3 - \left(r^2 - 2cr + \frac{1}{r^2}\right)x^2 + 1 = 0 \quad (10)$$

que debe tener como única raíz real $x = r$ (sin contar su m.a.), por lo que se debe satisfacer alguno de los siguientes casos:

Caso 1: $p_c(x) = (x - r)^4$
Caso 2: $p_c(x) = (x - r)^2 \cdot (x - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2)$

El primer caso no puede darse, ya que

$$x^4 - 2cx^3 - \left(r^2 - 2cr + \frac{1}{r^2}\right)x^2 + 1 = (x-r)^4 =$$
$$= x^4 - 4rx^3 + 6r^2x^2 - 4r^3x + r^4$$

y comparando los coeficientes que acompañan a x, se deduce que $r = 0$, lo cual es imposible. El segundo caso nos conduce al sistema

$$\begin{array}{ll} x^4: & 1 = 1 \\ x^3: & -2c = -2(r+\alpha) \\ x^2: & -\left(r^2 - 2cr + \frac{1}{r^2}\right) = r^2 + 4r\alpha + \alpha^2 + \beta^2 \\ x^1: & 0 = -2r(r\alpha + \alpha^2 + \beta^2) \\ x^0: & 1 = r^2(\alpha^2 + \beta^2) \end{array}$$

desde el cual podemos calcular c directamente. En efecto, como $r \neq 0$ de la ecuación x^0: $1/r^2 = (\alpha^2 + \beta^2)$ y de la relación x^1 se deduce: $4r\alpha = -4(\alpha^2 + \beta^2) = -4/r^2$. Sustituyendo todo esto en la ecuación de x^2 y despejando c obtenemos:

$$-\left(r^2 - 2cr + \frac{1}{r^2}\right) = r^2 - \frac{4}{r^2} + \frac{1}{r^2} \Rightarrow c = r - \frac{1}{r^3}$$

Llevando esto a (3) obtenemos

$$f'(r) = t = \frac{c-r}{\frac{1}{r}} = \frac{\left(r - \frac{1}{r^3}\right) - r}{\frac{1}{r}} = -\frac{1}{r^2}$$

con lo cual hemos deducido la regla de derivación de la función $f(x) = 1/x$.

Más allá del método de descartes

La idea que en la que se fundamenta el método de Descartes puede ser aprovechada para resolver otros problemas de naturaleza completamente distinta. Por ejemplo, el cálculo de la distancia de un punto a una recta en el plano, o el cálculo de la distancia de un punto a un plano en el espacio. Como el razonamiento es análogo, y hasta ahora las aplicaciones mostradas se han hecho en dos dimensiones, abordaremos este problema en el caso tridimensional.

Supongamos que deseamos calcular la distancia de un punto P a un plano π que denotaremos por $d(P, \pi)$. Para ello, y basándonos en la idea del método de Descartes consideraremos la esfera Γ de centro P (véase figura 4) y impondremos que el sistema de ecuaciones no lineales (S.E.N.L.) formado por la ecuación de la esfera y del plano tenga solución única, lo cual significa que la esfera y el plano se cortan en un único punto, esto es, que son tangentes, y como el vector radio de la esfera es normal al plano tangente, el radio R de la esfera será precisamente la distancia $d(P, \pi)$ buscada. Para calcular R impondremos que la ecuación de segundo grado que se deriva de resolver el mencionado S.E.L.N. por el método de sustitución tenga solución única, esto es, que el discriminante sea nulo.

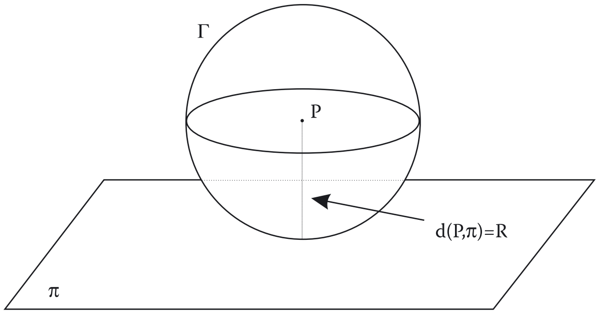

Figura 4. Aplicación de la idea de Descartes a cálculo de la distancia de un punto a un plano

Veamos un ejemplo para mayor claridad.

Aplicación 5
Calcular la distancia del punto p(1, 2, 5) *al plano*

$$\pi: 2x + 2y - z = 5$$

utilizando la filosofía del método de Descartes.

En primer lugar consideraremos la esfera de centro el punto P y radio R,

$$\Gamma: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = R^2$$

y calculamos su intersección con el plano π, resolviendo el S.E.L.N.:

$$\begin{array}{c} \Gamma: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = R^2 \\ \pi: 2x + 2y - z = 5 \end{array}$$

que nos conduce a

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (2x + 2y - 10)^2 = R^2$$

$$5x^2 + (8y - 42)x + (5y^2 - 44y + 105 - R^2) = 0$$

Fijada la variable y, la ecuación anterior es una ecuación de segundo grado en x, como el S.E.L.N. debe tener una única solución, el discriminante Δ_x debe ser cero:

$$\Delta_x = (8y - 42)^2 - 20(5y^2 - 44y + 105 - R^2) = 0$$

$$-36y^2 + 208y - 336 + 20R^2 = 0$$

Al igual que el S.E.L.N., esta ecuación de segundo grado en debe tener solución única, luego

$$\Delta_y = 208^2 - 4(-36)(-336 + 20R^2) = 0$$

que nos da una ecuación en R, de donde

$$R = d(P,\pi) = \sqrt{\frac{5120}{2880}} = \frac{4}{3}$$

tal y como puede comprobarse por los métodos estándar.

Conclusiones

El trabajo que hemos desarrollado en este artículo es un estudio de un método histórico desarrollado por Descartes para calcular la recta normal a una curva, y que puede ser aprovechado para calcular derivadas puntuales y generales de funciones. El enfoque, muy rico desde el punto de vista geométrico, requiere de la resolución de ecuaciones algebraicas y transcendentes, que en principio pueden ser notablemente complicadas (por eso ha caído en el olvido), pero que permite introducir en el aula una gran variedad de aspectos docentes: Historia de las Matemáticas, geometría de la circunferencia, propiedades de las soluciones de ecuaciones polinómicas (relaciones de Cardano-Viète, factorización de polinomios, caracterización de la multiplicidad algebraica de las raíces de un polinomio a través de los polinomios derivados...), resolución numérica y gráfica de ecuaciones algebraicas y trascendentes... Además, de que la idea en la que se fundamenta el método de Descartes puede ser aprovechada para calcular la distancia de un punto a una recta o un plano. Por todo ello pensamos que esta propuesta puede ser interesante, porque permite realizar un itinerario interdisciplinar dentro de la enseñanza de las Matemáticas en un segundo curso de bachillerato o un primer curso científico-técnico universitario. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOYER C.B. (1986): *Historia de la Matemática*, Ed. Alianza Universidad, Madrid.

CHICA BLAS A. (2001): *Descartes: Geometría y Método*, Ed. Nivola. N.º 8 Colección La Matemática en sus Personajes, Madrid.

CORTÉS LÓPEZ, J.C. y CALBO SANJUAN, G. (2001): "Reflexiones sobre geometría métrica en el espacio: un enfoque distinto para tres problemas clásicos", *Puig Adam*, n.º 59, 48-61.

GAUKROGER S. (1995): *Descartes, an Intellectual Biography*, Ed. Oxford University Press, Oxford.

WOLFRAM S. (1999): *The Mathematica book*, 4th edition Cambrigde University Press, Cambridge.