SUMA 55
Junio 2007, pp. 83-89

Cauchy : El triunfo del rigor

Hace 150 años, el 23 de mayo de 1857, a la edad de 68 años, moría inesperadamente en Sceaux, pueblecito cercano a Paris, Augustin Louis Cauchy, uno de los primeros matemáticos modernos, y de los más prolíficos que han existido. Sus últimas palabras, dirigidas al arzobispo de París que había ido a visitarle fueron:

> Los hombres pasan; pero sus obras quedan.

Cauchy había nacido en Paris, en plena época revolucionaria, pocas semanas después del asalto y caída de la Bastilla, el 21 de agosto de 1789. Primogénito de seis hermanos de una familia modesta, su padre, Louis-François, era jurista y se encargó personalmente de la educación de su hijo, dada la poca efectividad de las escuelas en aquella época. Louis-François, profundamente religioso, cercano a los jesuitas, monárquico ultra, inculcó a su hijo sus propias ideas.

> *Pero sería un grave error pensar que se puede encontrar certeza con sólo las demostraciones geométricas o el testimonio de los sentidos.*
> Cauchy

Augustin Louis Cauchy

Santiago Gutiérrez
hace.suma@fespm.org

El 1 de enero de 1800, recién instalado el Consulado por Napoleón, a raíz del golpe de estado, Louis-François, es elegido secretario del Senado, con lo que el aún niño Augustin Louis continúa sus clases en el despacho de su padre. En este lugar tiene ocasión de conocer a dos de los grandes matemáticos de la época, Lagrange y Laplace. Ambos se quedan asombrados de la capacidad para las matemáticas mostrada por el niño. Incluso Lagrange llegó a decir de él: *Este nos va a reemplazar a todos como matemático*. No obstante, su padre decide llevarlo a la Escuela Central del Panteón, con solo trece años, donde pudiera adquirir una formación humanística. Le bastaron dos años para destacar en el dominio del Griego y del Latín.

En 1804 deja la escuela y se dedica al estudio intensivo de las matemáticas, bajo la dirección de un tutor, con el fin de ingresar en la Escuela Politécnica. Al año siguiente, en efecto,

Litografía por Rudolf Hoffmann, ca. 1840

obtiene el número dos en las pruebas de admisión de la Escuela. De la Escuela Politécnica pasa a la Escuela de Ingenieros Civiles. Cuando todavía no había cumplido los 21 años obtiene el título de *Ingeniero de Caminos*. Inmediatamente es destinado a Cherburgo, donde participa en las obras de construcción del puerto, pero se diría que había sacado *billete de ida y vuelta*, pues, según cuentan, al iniciar su viaje a Cherburgo llevaba consigo el *Tratado de las funciones analíticas* de Lagrange y la *Mecánica Celeste* de Laplace. Lo cierto es que dedica buena parte de su tiempo al estudio y la investigación matemática. Fruto de esta dedicación es su trabajo sobre los poliedros, que presenta en 1811, y en el que muestra la inexistencia de otros poliedros regulares distintos a los de 4, 6, 8, 12 o 20 caras. Aun presenta una segunda memoria sobre este tema en 1812. Siguiendo los consejos de Lagrange y Laplace, debilitado su estado de salud, decide abandonar los trabajos como ingeniero y regresar a Paris para dedicarse enteramente a las Matemáticas.

En 1813, con veinticuatro años, vuelve a París y atrae ya el interés de los matemáticos más eminentes de la época por sus investigaciones. En 1814, presenta el trabajo *Sur les intégrales defines* (Sobre las integrales definidas). A pesar de todo, desde el punto de vista profesional, no logra Cauchy una ocupación científica oficial.

En el año 1815, derrotado Napoleón en Waterloo y exiliado en Santa Elena, se restaura en Francia la monarquía en la figura de Luis XVIII y corren vientos favorables para la antirepublicana familia Cauchy. Es en este periodo, durante los reinados de los borbones Luis XVIII y Carlos X, hasta la revolución de 1830, cuando alcanza Cauchy sus más importantes resultados científicos. En 1815 publica una memoria sobre los *grupos de sustituciones*, título análogo al de Galois, así como una demostración del importante *teorema de Fermat* relativo a los *números figurados* (la posibilidad de expresar cualquier entero positivo como suma de tres números triangulares, cuatro números cuadrados, cinco números pentagonales..., *n* números *n*-gonales), completando de este modo lo que Gauss había logrado solo para los números triangulares y cuadrangulares.

En 1816, se le otorga el Gran Premio de la *Academia francesa*, por su trabajo *Une théorie des ondes sur la surface d'un fluide dense de profondeur infinie* (Una teoría de las ondas sobre la superficie de un fluido denso de profundidad infinita). Ese mismo año, es nombrado académico, por decreto, ocupando el lugar dejado por Monge que había sido destituido por Napoleón en el breve periodo de tiempo, conocido como los *cien días,* en que recuperó el poder desde el regreso de la isla de Elba (1814) hasta su exilio definitivo en Santa Elena (1815). Así mismo, en 1816, es nombrado profesor titular de Análisis y de Mecánica en la Escuela Politécnica. En 1817, imparte clases de Física en el *Collège de France,* cosa que interrumpe al curso siguiente y retoma entre 1825 y 1830. Da también clases de álgebra en la Facultad de Ciencias, como profesor sustituto, a partir de 1821.

En 1818, se casa con Aloise de Bure, con la que tiene dos hijas.

En 1815 publica una memoria sobre los grupos de sustituciones, *título análogo al de Galois, así como una demostración del importante* teorema de Fermat *relativo a los* números figurados.

Si hay algún rasgo dominante en la vida de Cauchy ese es la búsqueda de la verdad, la necesidad de lo absoluto.... esa misma necesidad de verdad, de alcanzar lo absoluto, es lo que determina su forma de abordar las matemáticas. No es de extrañar que la búsqueda del rigor se convirtiera así en su objetivo prioritario de trabajo.

Cauchy por C. H. Reutlinger

El análisis

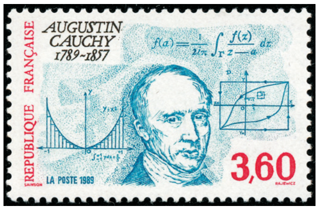
Si hay algún rasgo dominante en la vida de Cauchy ese es la búsqueda de la verdad, la necesidad de lo absoluto. Considera que en la búsqueda de la verdad consiste precisamente el trabajo del sabio:

> La verdad –escribe en 1842– constituye un tesoro inestimable, cuya adquisición no va seguida de remordimiento alguno y no perturba jamás la paz del alma. La contemplación de estos celestes encantos, de su belleza divina, basta para compensarnos de los sacrificios que hacemos para descubrirla, y la bondad misma del cielo no consiste sino en la posesión completa y plena de la verdad.

Pues bien, esa misma necesidad de verdad, de alcanzar lo absoluto, es lo que determina su forma de abordar las matemáticas. No es de extrañar que la búsqueda del rigor se convirtiera así en su objetivo prioritario de trabajo. El rigor se hace especialmente patente en sus cursos de análisis, impartidos en la Escuela Politécnica, y por demás fructíferos, ya que estos cursos van a ejercer una influencia decisiva en el posterior desarrollo del análisis hasta nuestros días.

Efectivamente, el cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz había adquirido un gran impulso por parte de un matemático tan genial como Euler. Pero los conceptos básicos, como el de infinito, el de infinitamente grande o el de infinitamente pequeño, permanecían todavía en el terreno de la intuición geométrica, así como los métodos de trabajo tan frecuentemente motivo de objeciones en cuanto al rigor se refiere, tal el caso de los desarrollos en serie, por ejemplo. La necesidad, pues, de poner orden en los fundamentos del ya por entonces inmenso edificio del análisis preocupaba a no pocos matemáticos de la época... Abel, en carta dirigida al profesor Christoffer Hansteen, en 1826, se lamentaba de la situación:

> ...la tremenda oscuridad que incuestionablemente encuentra uno en el análisis. Carece completamente de todo plan y sistema, y el hecho de que tantos hayan podido estudiar-



Sello dedicado a Cauchy

> lo es notable. Lo peor del caso es que nunca ha sido tratado rigurosamente. Hay muy pocos teoremas en el análisis superior que se hayan demostrado de una manera lógicamente sostenible. En todas partes encuentra uno esta manera miserable de concluir lo general partiendo de lo especial y es extremadamente peculiar que tal procedimiento haya llevado a tan pocas de las así llamadas paradojas.

Gauss y Bolzano mostraban una preocupación similar. Algunos habían intentado remediarlo, como Lagrange con su *Théorie des fonctions analytiques*, sin lograrlo totalmente.

En estas condiciones, aunque Bolzano había dado pasos importantes, sus resultados no fueron conocidos hasta mucho tiempo después, así que es Cauchy el primero que emprende la tarea con fortuna y su trabajo es conocido. Para ello hace una verdadera revolución en la estructura del desarrollo del análisis, sometiéndolo desde el principio al espíritu del rigor, tanto en lo que se refiere a los conceptos como a los métodos.

En 1821, siguiendo la tradición de la Escuela Politécnica, recoge sus lecciones en unos apuntes que titula *Cours d'analyse* (Curso de análisis). En él explica su proyecto:

> En lo tocante a los métodos, he tratado de darles todo el rigor que se exige en geometría, de forma que no se recurra jamás a la generalidad del álgebra. Las razones de este tipo, aunque bastante aceptadas por lo común, no pueden considerarse, me parece, sino como inducciones adecuadas para hacer presentir la verdad en ocasiones, pero concuerdan poco con la exactitud de que tanto se jactan las ciencias matemáticas. Es preciso observar además que propenden a atribuir a las fórmulas algebraicas una amplitud indefinida, cuando, en realidad, la mayoría de ellas sólo son válidas bajo ciertas condiciones y para ciertos valores de las cantidades que contienen. Al determinar estas condiciones y estos valores, y al fijar de forma precisa el significado de las notaciones que utilizo, hago desaparecer toda incertidumbre.

Por aquella época ya era importante la reputación de Cauchy y numerosos los oyentes que acudían desde Berlin, San Petesburgo, Madrid,...para oír en directo los resultados de sus investigaciones. De este modo, su *Cours d'analyse,* cuando lo hace público, se difunde como la pólvora por toda Europa, y se convierte en el modelo a seguir por todos los autores de tratados de análisis del siglo XIX. Hasta el propio Abel, tan crítico con el estado de cosas, alaba esta obra de Cauchy:

> La distinguida obra debiera ser leída por todo aquel que ame el rigor en las investigaciones matemáticas.

> *...la tremenda oscuridad que incuestionablemente encuentra uno en el análisis. Carece completamente de todo plan y sistema, y el hecho de que tantos hayan podido estudiarlo es notable. Lo peor del caso es que nunca ha sido tratado rigurosamente.*
>
> Abel

> *Por aquella época ya era importante la reputación de Cauchy y numerosos los oyentes que acudían desde Berlin, San Petesburgo, Madrid... para oír en directo los resultados de sus investigaciones.*

La clave del rigor

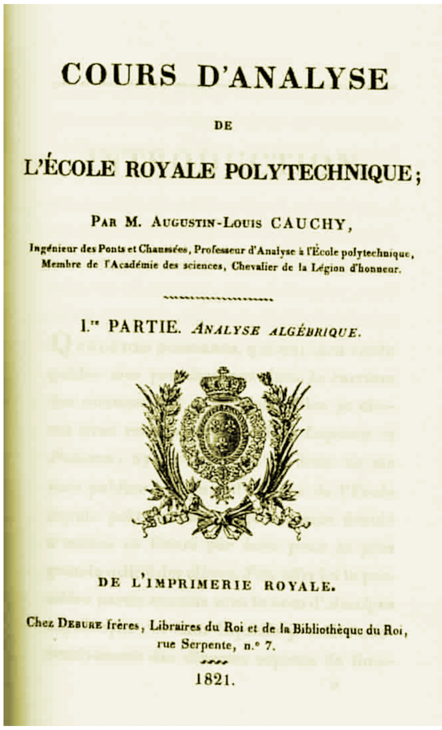
¿Cómo ha sido posible, para Cauchy, encontrar el cauce del rigor en una materia tan sumamente difícil, que se había resistido a los más grandes matemáticos del siglo XVIII y primer cuarto del XIX?

La base del éxito de Cauchy hay que buscarla en dos estrategias. Por una parte, aritmetizar el análisis, independizarlo de su apoyo geométrico, y, por otro lado, basar todo su desarrollo en el concepto de límite. Hasta entonces, se manejaba la noción de límite de una forma intuitiva y como herramienta auxiliar de las relaciones entre cantidades implicadas en problemas geométricos, incluso, cuando se aplicaba a los números, no se dejaba de recurrir a la intuición geométrica, lo que entonces se conocía como *la metafísica del cálculo.* Si bien Euler y Lagrange se esforzaron por establecer el cálculo sobre su concepto de función analítica, no lograron demasiado éxito en la tarea. Para encontrar un intento serio de hacer del concepto de límite la base de todo el desarrollo del cálculo hay que llegar a D'Alembert, que llama la atención sobre la importancia del concepto de límite en un artículo de la enciclopedia, y a Lacroix, que lo utiliza en sus cursos al presentar el cálculo infinitesimal. Precisamente, con este último había dado Cauchy sus primeros pasos en el estudio del análisis.

En su *Cours d'analyse,* Cauchy se desprende de toda *metafísica* geométrica, coloca al concepto de límite en la base del cálculo y lo sitúa en el campo de las funciones numéricas. Define el límite de una sucesión de números reales del siguiente modo:

> Cuado los valores sucesivamente atribuidos a una misma variable se aproximan indefinidamente a un valor fijo, de modo que acaben por diferir de él tan poco como se quiera, a este último se le denomina límite de todos los demás.

En 1823, publica el *Resumé des leçons sur le calcul infinitesimal* (Compendio de las lecciones de cálculo infinitesimal), y en 1829 ven la luz las *Leçons sur le calcul différentiel* (Lecciones sobre el cálculo diferencial). Estos dos libros, junto con el *Cours d'analyse*, constituyen la obra en que Cauchy presenta el cálculo diferencial e integral con todo rigor.


COURS D'ANALYSE
DE
L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE;
PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY,
Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur d'Analyse à l'École polytechnique, Membre de l'Académie des sciences, Chevalier de la Légion d'honneur.
I.re PARTIE. *ANALYSE ALGÉBRIQUE.*
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
Chez DEBURE frères, Libraires du Roi et de la Bibliothèque du Roi, rue Serpente, n.° 7.
1821.

En sus textos, Cauchy aplica la nueva definición de límite a las nociones de derivada y continuidad. Define la derivada para funciones continuas como el límite, si existe, del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, tal y como lo hacemos en la actualidad. En cambio el concepto de diferencial, que había sido clave en el desarrollo del cálculo para Leibniz, lo relega Cauchy a un segundo plano. Si para una función $y=f(x)$, designamos por dx una cantidad finita, entonces $dy = f'(x)\,dx$. En cuanto a la continuidad, señala que la función $y = f(x)$ es continua, entre ciertos límites de la variable x, si un incremento infinitamente pequeño de x proporciona un incremento infinitamente pequeño en la función.

Del mismo modo, aborda el concepto de integral desde la noción de límite, en contra de lo habitual durante todo el siglo XVIII, que consistía en considerar la integración como el proceso inverso de la diferenciación. Esta forma de enfocar la integración había tropezado con grandes dificultades, pues no siempre era posible encontrar la función primitiva. Ya Euler reconocía las limitaciones de semejante concepción de la integral, y escribía, cuando no conseguía encontrar la primitiva de una función:

> ...no nos queda otra cosa que tratar de encontrar para ella un valor tan próximo al verdadero como se quiera.

> *La base del éxito de Cauchy hay que buscarla en dos estrategias. Por una parte, aritmetizar el análisis, independizarlo de su apoyo geométrico, y, por otro lado, basar todo su desarrollo en el concepto de límite.*

Y esta idea de resolver el problema por la vía de la aproximación es la que sugiere a Cauchy su forma de definir la integral. Lo hace, partiendo de la integral definida, que él define, para toda función continua sobre un intervalo dividido en n subintervalos, como el límite (una vez más entra el límite en escena) de sumas de productos cuando la amplitud del mayor de los subintervalos tiende a cero. Esto es:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx=\lim\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,(x_i-x_{i-1}),$$

cuando $x_i - x_{i-1}$ tiende a cero.

Para ser rigurosos, comenta:

> ...es importante notar que si los valores numéricos de estos elementos son muy pequeños y el número n muy grande, el modo de subdivisión tendrá solo una influencia imperceptible en el valor de S.

Y aún escribe Cauchy:

> ...me parece que esta manera de concebir la integral definida debe ser adoptada con preferencia a otras, ya que es igualmente válida en todos los casos, incluso cuando no podamos pasar de la función que aparece bajo el signo de integral a la función primitiva. Además, de esta manera puede fácilmente demostrarse que una integral tiene un valor finito único, si la función es continua entre los dos valores en los que se toma la integral.

Desde esta definición de integral llega a la noción de primitiva de una función como la integral definida con el límite superior variable.

A partir de 1823, Cauchy empieza a tener problemas en la Escuela Politécnica. Los alumnos se quejaban de que sus lecciones eran largas y difíciles, los profesores se mostraban de acuerdo con tales críticas, y Cauchy se defendía:

> ...la experiencia demostrará pronto que los nuevos métodos (es decir, su forma de orientar el análisis) lejos de entorpecer la instrucción de los alumnos, les permiten aprender en menos tiempo y con menos esfuerzo todo lo que aprendían anteriormente.

Por otra parte, sus lecciones parecían demasiado teóricas para lo que debe ser la formación de un ingeniero. Fuera como fuese, el caso es que la Escuela, en 1825, elaboró nuevos programas que daban una orientación más aplicada a los temas de análisis.

En 1826, publica una especie de diario personal, bajo el título de *Exercices de mathématiques*, en el que da a conocer mensualmente sus trabajos de Matemáticas. Después de 1830, la publicación adoptará el nuevo título de *Exercices d'analyse mathématique et de physique.*

Teoría de funciones de variable compleja

En sus textos, no se limita Cauchy a las funciones reales de variable real sino que generaliza sus definiciones al campo complejo. Los primeros pasos de esta teoría aparecen en su *Mémoire sur la théorie des intégrales defines* (Memoria sobre la teoría de las integrales definidas), leída en la Academia en 1814 pero cuya publicación se retrasaría hasta 1827. En ella trata de hacer riguroso (siempre el rigor) el paso de la variable real a la variable compleja que utilizaban Euler, desde 1759, y Laplace, desde 1782, para calcular integrales definidas mediante variables complejas.

Antes que Cauchy, ya Gauss, en una carta a su amigo F. W. Bessel de 1811, comenta el significado de la integral de una función de x cuando la variable x es compleja, y le indica que tiene un teorema muy bello sobre que el valor de una integral, en ciertas condiciones, es independiente del recorrido utilizado para calcularla. Pero, no publica sus consideraciones, cosa habitual en él, como ocurrió con las geometrías no euclideanas, por poner un ejemplo. En cambio, Cauchy era todo lo contrario, publicaba, en cuanto podía, todo lo que iba haciendo. De ahí que haya que otorgar a Cauchy la gloria de haber construido la teoría de funciones de variable compleja.

En su *Mémoire sur la théorie des intégrales defines,* al tratar de generalizar la noción de integral al caso de la variable compleja, hace notar que en este caso hay muchas maneras de realizar la partición por lo que es necesario demostrar, y lo demuestra, que la definición es independiente del camino seguido.

A partir de este resultado, y en sucesivos escritos, construye Cauchy buena parte del edificio de la teoría de funciones de variable compleja. Para semejante hazaña no bastaría solo con aritmetizar el análisis de funciones de variable real, como era su primer intento, despojándolo de todo recurso a la intuición geométrica, sino que sería necesario elevar un peldaño el nivel de abstracción. Efectivamente, así como la variable compleja exige un espacio bidimensional para ser representada, la función de variable compleja requeriría un espacio de cuatro dimensiones, es decir quedaría fuera de cualquier apoyo intuitivo ya desde sus comienzos.

El exilio

A los 41 años, cambia radicalmente la vida de Cauchy. La revolución de 1830 depone al rey Carlos X de Borbón, y le sucede la casa de Orleáns en la persona de Luis Felipe. Entonces Cauchy, ferviente seguidor de los Borbones, se niega a prestar juramento de fidelidad al nuevo monarca, pierde su empleo, abandona Paris, dejando allí a su familia con los suegros, se dirige a Suiza, y a pesar de que se va sólo por unas semanas acaba autoexiliándose en este país, abandonando toda actividad pedagógica durante casi un año. De allí, al cabo de un año, pasa a Turín, donde se había creado una cátedra especialmente para él, de modo que puede volver a ejercer la docencia.

Entretanto, Carlos X se había trasladado con su Corte a Praga, y desde allí cursa una invitación a Cauchy para que acepte el puesto de preceptor del heredero de la Corona, el Duque de Burdeos. Cauchy acepta, y en 1833 se traslada a Praga, a donde hace venir a su familia. Desempeña el cargo durante cinco años, en los que experimenta una notable reducción su producción científica. Eso si, Carlos X le concede el título de Barón como premio a su fidelidad.

En 1839, regresa a Paris, y enseña en varios establecimientos religiosos. Es propuesto como miembro del *Bureau des Lon-*

gitudes (Oficina de pesas y medidas), y si bien el rey Luis Felipe no lo aprueba, lo cierto es que Cauchy trabaja para esta institución de una forma semilegal.

La proclamación de la segunda República, tras la Revolución de 1848, con Carlos Luis Napoleón como presidente, facilita el regreso de Cauchy a la actividad docente, al suprimir el juramento de fidelidad, siendo nombrado Cauchy profesor de Astronomía matemática en la Sorbona. Incluso en 1852, cuando el Presidente de la República, bajo el nombre de Napoleón III, instaura de nuevo el Imperio y restaura el juramento de fidelidad, Cauchy puede continuar su actividad, al hacer el Emperador con él una singular excepción. De este modo sigue trabajando sin cortapisas, en las instituciones estatales hasta el fin de su vida.

Además de lo expuesto sobre el análisis, Cauchy da un gran impulso a la teoría de determinantes, hace contribuciones originales sobre ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales, sobre teoría de grupos, sobre álgebra, donde un trabajo suyo sobre de la imposibilidad de resolver algebraicamente las ecuaciones de grado superior al cuarto, prepara el terreno a la demostración posterior que realizaría Abel, entre 1824 y 1826...

Las obras completas de Cauchy, cuya edición se prolongó de 1882 a 1975, consta de 27 volúmenes y contiene 789 artículos y memorias, además de cinco textos dedicados a la enseñanza.

El siglo XIX produjo una gran cantidad de buenos matemáticos, pero dos destacaron por encima de todos los demás, Gauss y Cauchy, de modo que ambos pueden ser considerados como los grandes dominadores del siglo. ■

Litografía de Gregoire et Deneux