SUMA 55
Junio 2007, pp. 69-74

En un alua cualquiera de de un IES caulaquiera: el día a día

Era el primer problema de geometría analítica, con cierta complicación, que proponía al grupo de 1º de bachillerato tecnológico. Previamente, desconfiado por experiencia sobre los resultados que produce lo que él llama *didáctica de la revelación* –el sacerdote o sacerdotisa impartiendo palabra divina desde el púlpito– había dedicado Mateo1 un tiempo a recuperar el sentido material que encierra la ecuación de la recta. Para ello, como tantas otras veces, recurrió a un proceso inductivo desarrollado mediante un diálogo apoyado en dibujos sobre una transparencia.

—¿Cómo se llama esta recta? [*Dibuja en la cuadrícula un sistema de coordenadas y la bisectriz del primer cuadrante*]

—¿…?
—Quiero decir: ¿Qué puntos diríais que contiene?
—(1, 1), (2, 2), etc.
—Y (0, 0), (–2,5; –2,5)… ¿No es eso?
—Sí.
—Entonces, ¿qué puntos diríais que contiene?
—Los que tienen las dos coordenadas iguales.
—Y eso, ¿cómo se escribe en matemáticas?

Puede que lo digan en castellano o que directamente alguien proponga $y=x$. Siguen; se reproduce el mismo diálogo, cada vez más rápido, para la bisectriz del segundo cuadrante, el eje vertical, el horizontal, la recta que une el origen con el vértice del primer rectángulo de base 1 y altura 2 y que, por lo tanto, va atravesando rectángulos como él en escalera (fig. 1); para la que pasa por el origen y el vértice opuesto (1, 3), etc. Las dificultades varían según la recta: aparecen, por ejemplo, para decidir entre $y=2x$ o $x=2y$; $2x=3y$ o $y=1,5x$…

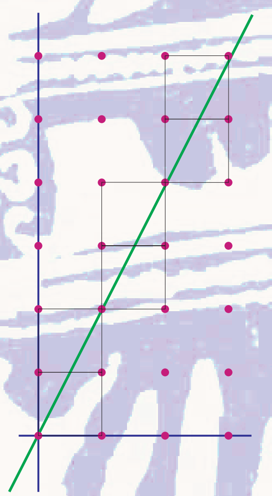

Figura 1

x	y
2	3
4	6
6	9
x	$1,5x$

Figura 2

Pitágoras. Catedrla de Chartres

Santiago Gutiérrez
hace.suma@fespm.org

Hay quienes tienen necesidad de una tabla para buscar el término general de la sucesión cuando las cosas se complican (fig. 2) y quienes lo tienen mucho más claro. Así hasta construir la expresión $y=mx+n$. ¿Nivel muy bajo para 1º de bachillerato? Depende de muchas cosas que tienen que ver con la relación anterior de los alumnos y alumnas del grupo con las matemáticas. En 4º ESO no es un nivel bajo; en el bachillerato llamado de ciencias sociales puede ser altísimo… Si les han acostumbrado a alguno de los penosos automatismos con los que muchas veces se introduce la ecuación de la recta, la discusión puede ser incluso eso: ¡una discusión! En el 1º del bachillerato tecnológico no suele crear problemas, pero es un repaso que a Mateo le gusta, aunque sólo sea como diagnóstico de por dónde circula el grupo.

I

Pero estábamos con el primer problema *serio*:

> Encontrar el punto D simétrico del punto $A(-5, 13)$ respecto de la recta r: $2x-3y-3=0$.

Aparentemente es fácil, pero la vida es como es y no tiene sentido empeñarse en negarla arrasando su ideas con métodos estandarizados. Mateo les deja trabajar… y pasan muchas cosas.

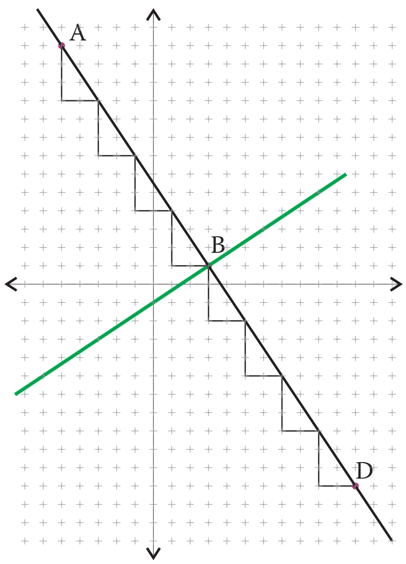

Figura 3

- Acostumbrados al empirismo de la trama, algunos alumnos localizan el punto D (fig. 3) descendiendo en escalones de igual pendiente. Saben –también lo aprendieron experimentalmente en la retícula– que tienen que bajar con pendiente –3/2. Queremos decir que Mateo no había oficializado aquello de $mm'=-1$. El hecho de que el punto B tenga coordenadas enteras les ha simplificado la tarea.

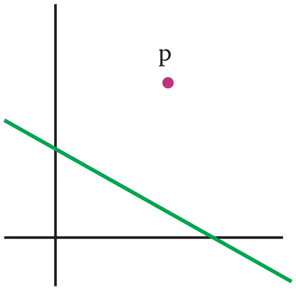

Figura 4

- Otros tienen las ideas confusas y hacen lo mismo ¡¡empleando una recta que no es perpendicular a r!! Pasa entonces Emilio al retroproyector a explicar sus escalones (correctos) y después, Mateo, que quiere que practiquen otros métodos, dibuja en la pizarra una situación parecida a la de la figura 4, trazada sin pensar, pide que pongan ecuación a la recta [después de discutirlo, acuerdan s: $y=-0{,}5x+2$ y $P(3{,}25;\ 3{,}7)$] y les propone que resuelvan de nuevo el problema.
- Jorge, mientras tanto, ya ha introducido técnicas *analíticas*, imponiendo la condición $d(M, P)=d(M, P')$, después de haber buscado M en la trama. Seguramente, al hacerlo, piensa sólo en una ecuación y no en una circunferencia.

Los timbres tocan siempre en el peor momento y el tema queda abierto para el día siguiente. Retoman el análisis del problema (fig. 1).

- La propuesta de la figura 4 ha sugerido a varios cortar la recta con la perpendicular desde P. Utilizan la idea para la fig. 3. Alguno, además, ha sido capaz de recurrir a la idea del punto medio para rematar el problema ($\frac{-5+x}{2}=3$, etc.).

Pero siguen discutiendo a partir de una pregunta de Mateo: *¿Cómo lo haríais con regla y compás?*

- Es así que aparece la circunferencia de la figura 5. Mateo la dibuja en la transparencia. De nuevo una trivialidad necesaria: por extraño que parezca, la mención de la circunferencia no es suficiente por sí sola para todos, y es obligado respetar el derecho a la sorpresa y la clarividencia y el impacto de la comprobación experimental.

- Habían leído el libro Radice2 en las vacaciones de Navidad, de manera que conocían la ecuación de la circunferencia de centro el origen y radio 1. En un grupo que convive durante nueve meses para desarrollar una asignatura, siempre hay personas que hacen de avanzadilla. Mateo hecha el cebo y hay quienes son capaces de construir la ecuación $(x-3)2+(y-1)2=208$. Queda ahora resolver el sistema.

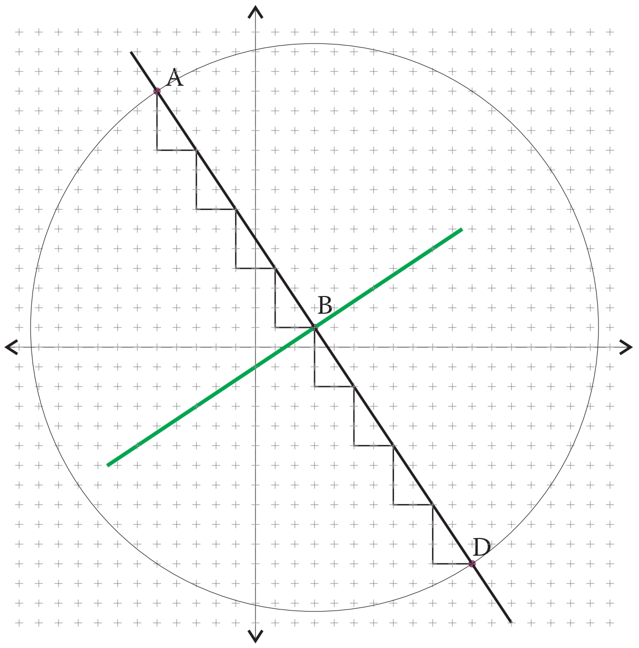

Figura 5

El libro de Radice es excelente para principiantes pero pueden quedarse con interpretaciones excesivamente simplificadas, no necesariamente atribuibles al autor.

¿Fin? Todavía no. Mateo sabe ya quiénes sentirán cierto pánico ante un sistema de segundo grado, así que propone que practiquen en casa, con la ventaja de que ya saben qué resultado tienen que obtener. Después, aprovechando de nuevo que han leído a Radice, repasa los métodos de resolución del problema que han aparecido en clase, recurriendo, claro, a una terminología razonable.

- Califica de experimental al de los escalones. Comenta lo que supone una concepción empirista o racionalista del conocimiento, y se atreve a calificarlo también de empirista. Alejandro Juez, desde la primera fila, recuerda a Hume: parece que la cosa va por buen camino.
- Antigua, o griega, la resolución con regla y compás.
- Analítico o cartesiano el último, manejando los objetos geométricos mediante ecuaciones. Recuerda a Radice y compara la producción artesanal con el trabajo algebraico en serie.

II

Su generosidad en el esfuerzo a la hora de redactar el comentario fue muy variada, como ocurre con cualquier trabajo que se les propone. Hubo quienes se limitaron a cumplir y quienes se aplicaron con entusiasmo –algunos, incluso, advirtieron de un error en la página 86– a una tarea tan “sorprendente” como leer un libro sobre historia de las matemáticas. Pero había quedado claro que, con mayor o menor intensidad, todos y todas lo habían leído y, precisamente por ello, Mateo se ve obligado a dedicar algo más de media hora a comentar sus textos. El libro de Radice es excelente para principiantes pero pueden quedarse con interpretaciones excesivamente simplificadas, no necesariamente atribuibles al autor. Mateo les advierte, entre otras cosas, de las siguientes:

- Hay más de 250 demostraciones del llamado teorema de Pitágoras y no está claro cuál pudo ser precisamente la de Pitágoras.
- El mismo Pitágoras es un personaje envuelto en la leyenda. No es discutible, sin embargo, la existencia de la secta de los pitagóricos y su influencia posterior.
- No sólo los romanos tuvieron un sistema de numeración distinto del que usamos en la actualidad.
- En el mundo islámico, no sólo en el cristiano, hubo resistencia a la implantación del nuevo sistema de numeración venido de la India. Un califa puede ordenar la traducción y difusión del sistema hindú, pero todas las sociedades han sido, y son, resistentes a los cambios. El ábaco, además, tenía sus ventajas sobre lo que hoy llamamos algoritmos de lápiz y papel.
- Sí se ha mejorado la exactitud del valor conocido de π. Radice cita la aproximación de Arquímedes y, como no vuelve sobre este tema, alguien sacó la conclusión de que había quedado parado desde entonces.
- Las matemáticas son una creación colectiva. Arquímedes, por ejemplo, no es el primero que se plantea cómo se mide la longitud de una circunferencia.
- *El árabe que inventó los algoritmos...* (cita textual de un alumno) no es una expresión muy afortunada. Tal y como funciona la escuela (el sistema educativo), ¿es sorprendente que haya que advertirles que siempre ha habido algoritmos, que cada pueblo ha desarrollado su propio sistema de numeración o sus métodos de control de los números, que las matemáticas son una creación colectiva...?
- Las matemáticas se han desarrollado muchísimo en los últimos trescientos años. [Alguien había interpretado la fecha en que detiene Radice su historia como el final de la Historia].

Etc., etc. ¿Ingenuidades? En sus comienzos como enseñante, Mateo tuvo la suerte de conocer a José María, un colega de filosofía a cuya clase acudió en alguna ocasión integrándose en uno de los grupos de trabajo. La primera vez, al acabar, le preguntó a Mateo cómo lo había visto y como este dudara, se adelantó a responder él:

—¿Te ha parecido bajo el nivel de la discusión?
—Pues sí. No me atrevía a decirlo.
—Claro que ha sido bajo. Pero para esto estoy yo aquí: para que llegue a tener más altura. Los profesores de matemáticas y de ciencias deberíais venir a la clase de filosofía para que os dieras cuenta del nivel de abstracción y de expresión en el que se encuentran vuestros alumnos y alumnas y comparar luego con el nivel de los temas que les proponéis.

El sistema educativo no sólo no respeta ese nivel, sino que además no les acostumbra –más bien al contrario– a la libre interpretación y al estudio creativo. Mateo sabe que no sólo no debe escandalizarse por las opiniones que ha recogido sino que además le proporcionan una buena excusa para aportar más información. Sabe también, como le advirtió José María, que esa debe ser su actitud con las opiniones equivocadas sobre contenidos técnicos de matemáticas. Otra cosa es que consiga ser siempre coherente con lo que cree que debe hacer.

III

Pero también demostraron entusiasmo y una muy buena capacidad de expresión. Víctor Latre, por ejemplo escribe:

> No sabía nada sobre la historia de las matemáticas, por lo que una vez comenzada la lectura el libro sucumbió rápidamente, pese a que algunos apéndices me costaron un poco. Este libro me ha ayudado a aclarar algunas ideas básicas que no tenía muy claras. Me ha gustado comprobar cómo evoluciona el pensamiento matemático; además esta historia refleja algo que me causa perplejidad, aunque comprendo, y es el hecho de que la idea básica, la simple, la que da pie a grandes filosofías o fórmulas es la que tarda siglos en salir, una vez concebida se ramifica rápidamente pero tener esa primera y sencilla idea es lo que más cuesta.

El sistema educativo no sólo no respeta ese nivel de absatrcción, sino que además no acostumbra a los alumnos –más bien al contrario– a la libre interpretación y estudio creativo.

Joel Per insiste también en las ideas básicas desde un aspecto más vital:

> Yo creo que más que un libro de matemáticas, o *un libro que explica matemáticas*, este es un libro que nos hace razonar sobre las matemáticas, consiguiendo que lleguemos a una conclusión mucho más amplia de las matemáticas (yo, por ejemplo, sabía que habían habido grandes personas como Euclides o Pitágoras, pero realmente nunca había caído en la cuenta de la importancia real que tuvieron esas personas en la historia de las matemáticas, en el razonamiento, en otras palabras, en el desarrollo intelectual de la humanidad), olvidando por un momento las cuentas, los números, los algoritmos, etc., para hacernos ver que es más una forma de pensar, una especie de ser vivo que evoluciona gracias a nuestra conciencia, y yo creo que esto tiene bastante importancia porque *te abre un poco los ojos*. Es decir: te imaginas por un momento en la posición de Arquímedes intentando descubrir la fórmula para hallar la medida de una circunferencia y es cuando te das cuenta de que ellos realmente no lo sabían, que no les venía explicado en el colegio desde siempre como a nosotros, que estamos hartos de verlo, no, ellos tuvieron que dar un paso mucho más grande para facilitar la vida a todas las generaciones posteriores, y yo creo que es ahí, cuando ya comienzas a ver la fórmula $l=2\pi r$ de una manera diferente, con un concepto mucho más genial y amplio.

Hemos respetado sus palabras y algunas primeras aproximaciones ingenuas a cuestiones concretas; creemos que merece la pena resaltar su interés y la frescura de sus escritos. Recordando la terminología en que se han desarrollado recientes polémicas, interpretamos estos textos como una petición de que en las aulas se imparta, antes que matemáticas, *el hecho matemático*. Es decir, cultura matemática. Se trata de que una fórmula pase a tener vida, por sí sola y como hecho histórico; que pueda ser *un concepto mucho más genial y amplio*.

IV

Esta sección se llama *Desde la Historia* y la mayor parte de esta colaboración parece que haya sido escrita desde la didáctica práctica (la teórica nos produce sarpullidos alérgicos), pero, ¿es posible para nosotros, profesores y profesoras de Secundaria, separar los dos enfoques en el día a día? La Historia debería ser uno de los hilos conductores de nuestro trabajo sin necesidad de que fuera por ello necesariamente visible. Las características de cada grupo y de cada nivel académico son las que determinarán el momento y la forma en que hará su aparición en el aula. Hay muchas formas de utilizarla.

1) *Datos aislados de diferente grado de profundidad en primer ciclo y 3º de ESO.* Sin que nos opongamos a los meramente biográficos, nos interesan más si aportan carga matemática, sociológica o ideológica. Las ilustraciones 6, 7, 8 y 9 son útiles para 2º y 3º ESO. La fotografía 9 es un

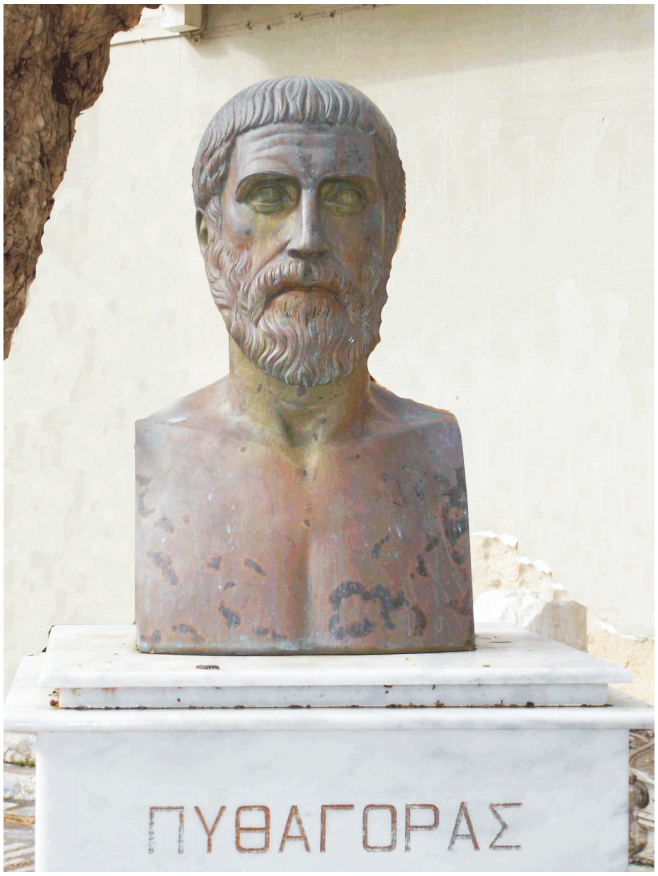

Ilustración 6. Busto de Pitágoras

Ilustración 7. Pitágoras comparando los números y los sonidos. Catedral de Chartres (s. XII)

bonito ejemplo de matemática escolar dignificada en una decoración pública de un edificio prestigiado. El Pitágoras gótico es sencillamente encantador y su naturalidad y terrenalidad trabajando contrastan con el hieratismo platónico de la escultura clásica: un tema interesante de conversación que puede aparecer –¿por qué no?– en clase de matemáticas. La tablilla babilónica –un listado de ternas pitagóricas– puede ser difícil de explicar en estos niveles de ESO, pero sirve para romper con el eurocentrismo que impregna sibilinamente nuestros currículos escolares.

2) *Contenidos matemáticos puros y duros.* Volviendo al teorema *kou-ku*, la demostración de Euclides es muy útil en primero de bachillerato, puesto que permite enlazar con el teorema del coseno. La generalización de Ibn Qurra3 también sirve para este nivel. Las dos se presentan muy bien con *CABRI* o *GEOGEBRA*. En cualquier caso, la didáctica sacerdotal da un halo de quietismo e intangibilidad a los resultados matemáticos que hace interesante reutilizar los materiales del punto anterior también en el bachillerato. Por cierto, que la ignorancia histórica suele ir acompañada de la ausencia de carga semántica. Este curso, cuando Mateo propuso en su grupo de 1º de bachillearto que dibujaran con *CABRI* cuadrados sobre los lados de distintos tipos de triángulos y pidieran al programa que diera sus superficies, un alumno le hizo esta observación:

—Veo que se da la igualdad cuando el triángulo es rectángulo.

Incluso, cuando preguntó al alumno más interesado –va incluso al taller de talento matemático en la Universidad– suponiendo que conocía la relación de áreas, su respuesta fue:

—Bueno, habitualmente no te fijas en estas cosas.

En general, no asociaron previamente el llamado teorema de Pitágoras con la actividad propuesta. Ocurre que la práctica al uso en las aulas lo convierte en una mera rutina aritmética desconectada de la *realidad*. Evitamos explicitar conclusiones para no cargar demasiado a los lectores y lectoras de SUMA, que bastante nos aguantan.

3) Lectura de fragmentos seleccionados –porque vienen a cuento en ese momento– o textos completos, como el de Radice.

Y aunque la historia no esté presente en el aula de forma tangible, explícita, debe estarlo en nuestra mente. Como antídoto contra todos los dogmatismos didácticos en que nos educaron y en los que pretenden que eduquemos y contra todos los dogmatismos ideológicos en que nos educaron y en que pretenden que eduquemos. Para ello puede ser necesario desconfiar de la historia escrita, puesto que enfoca el pasado desde la perspectiva del presente. Pero a esto, a la desconfianza hacia la historia escrita, nos dedicaremos en el siguiente artículo. ■

Ilustración 8. Tablilla de arcilla con un listado de ternas pitagóricas.
Se piensa que fue fabricada entre los años 1800 y 1650 a.C.

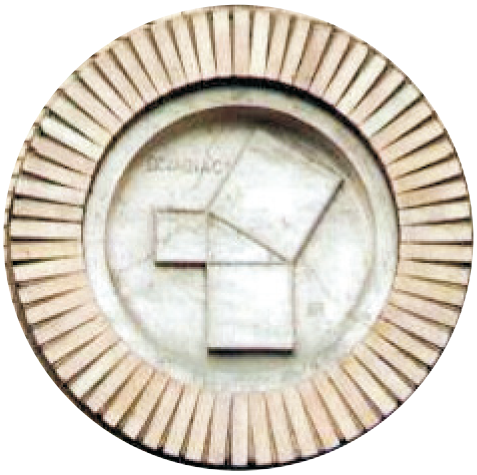

Ilustración 9. El Teorema de Pitágoras en la fachada del Paraninfo de la Universidad de Zaragoza (finales del s.XIX)

NOTAS

[1] Recuperamos a Mateo, el profesor que resumía a todos los amigos del *Colectivo del Martes* en aquel entrañable libro *¿Queréis la escuela?* En la portada, la respuesta de los estudiantes estaba en cerrada en un bocadillo en el que había dibujado un diplodocus amarillo con un lacito azul.

[2] Lucio Lombardo Radice: *La matemática de Pitágoras a Newton*, Ed. Laia. Barcelona, 1983 (La primera edición en italiano es de 1971).

[3] Ya tocamos estos temas en *En el entorno del teorema kou-ku (II y III)*, SUMA, n.os 45 y 46.