SUMA 55
Junio 2007, pp. 41-48

Relojes de agua, una oportunidad para calcular integrales

Este artículo propone una investigación sobre clepsidras (relojes de agua) para alumnos de 2º de Bachillerato. El cálculo integral será la clave para descubrir cómo la geometría de los recipientes condiciona el funcionamiento de estos mecanismos milenarios.

This article proposes an investigation on clepsydrae (water-clocks) for pupils of higher secondary school course. The integral calculus is the magic key to discovering how the containers geometry determines this ancient mechanism's operation.

El tiempo es una magnitud fascinante. Parece que avanza inexorablemente, sin parar, siempre hacia delante. No podemos recorrerla hacia atrás pero nuestra memoria nos dice que hubo un pasado.

Decía Kant[1] que el tiempo se construye por un proceso iterativo de adición de instantes. Este proceso constructivo, por el cual como seres cognoscentes creamos el tiempo, lo equipara al espacio y lo convierte junto a él en objeto de la Matemática.

Esta concepción del tiempo es la que perdura en la ciencia y permite que se pueda trabajar con él como variable independiente de los procesos físicos. Y es también la que permite medir intervalos de tiempo mediante la construcción de relojes.

Un reloj asocia intervalos de tiempo a determinados fenómenos que se producen con regularidad. Así los intervalos de tiempo son asociados en un reloj de sol a intervalos entre sombras. En un reloj mecánico a arcos de circunferencia recorridos por las agujas. En un reloj atómico a vibraciones. En una clepsidra es la salida o entrada de agua en un recipiente la que permite medir el tiempo.

La actividad que se propone como práctica para el cálculo integral en 2º de Bachillerato se basa en el estudio del comportamiento de los relojes de agua o clepsidras cuando presentan diferentes formas.

Metodología y nivel de aplicación

Según Real decreto 117/2004, de 23 de enero, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo del Bachillerato[2], uno de los objetivos concretos del área de Matemáticas es:

> Utilizar las estrategias características de la investigación científica y los métodos propios de las matemáticas (plantear problemas, formular y contrastar hipótesis, planificar, manipular y experimentar) para realizar investigaciones y explorar situaciones y fenómenos nuevos.

Por tanto, la actividad se plantea como una investigación guiada, en la que el alumno pueda libremente planificar y desarrollar ciertas partes del trabajo.

El hecho de escoger una investigación en torno a un objeto de uso cotidiano en la antigüedad, permite evitar la separación entre la mera adquisición de destrezas en el cálculo y la resolución de problemas relativos a fenómenos físicos y naturales y también cumplir con otro de los objetivos:

Elena Thibaut Tadeo
IES Comarcal Rocafort-Burjassot-Godella
Burjassot. Valencia

> Aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolas en la interpretación de las ciencias y en las actividades cotidianas.

La investigación deberá ser guiada con el fin de que el alumno no se encuentre desorientado. Por tanto para la investigación se le proporcionaran herramientas –también las relacionadas con las nuevas tecnologías– y métodos que le permitan llevarla a cabo. Con ello, los objetivos del área de Matemáticas que se persiguen son los siguientes:

> Desarrollar métodos que contribuyan a adquirir hábitos de trabajo, curiosidad, creatividad, interés y confianza en sí mismos para investigar y resolver situaciones problemáticas nuevas y desconocidas.

El nivel en el que se puede poner en práctica esta actividad es de 2º de Bachillerato, tanto en la modalidad de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud y de Tecnología como en la modalidad de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Los contenidos que se trabajan en dicha actividad se encuentran entre los que especifica el Real decreto 117/2004 para estos niveles:

- Primitiva de una función. Propiedades elementales.
- Cálculo de integrales indefinidas inmediatas, por cambio de variable o por otros métodos sencillos.
- Integrales definidas. Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow. Cálculo de áreas de regiones planas.
- Utilización de los distintos recursos tecnológicos (calculadoras científicas y gráficas, programas informáticos, etc.) como apoyo en el análisis gráfico y algebraico de las propiedades, globales y puntuales, de las funciones y en los procedimientos de integración.

Además de estos contenidos concretos, implícitamente también se trabajan las funciones y sus propiedades, utilizando para ello un programa de representación de gráficas sencillo. Se pueden así aplicar los criterios de evaluación:

- Utilizar el concepto y cálculo de límites y derivadas para analizar, cualitativa y cuantitativamente, las propiedades globales y locales (dominio, recorrido, continuidad, simetrías, periodicidad, puntos de corte, asíntotas, intervalos de crecimiento) de una función expresada de forma explícita, representarla gráficamente y extraer la información práctica en una situación de resolución de problemas relacionados con fenómenos naturales.
- Aplicar el cálculo de límites, derivadas e integrales al estudio de fenómenos geométricos, naturales y tecnológicos, así como la resolución de problemas de optimización y medida de áreas de regiones limitadas por rectas y curvas sencillas que sean fácilmente representables.

Planteamiento

La actividad comienza mediante una breve búsqueda de información en torno al tema de la medida del tiempo.

¿Cuántos tipos de relojes conoces? ¿Cuáles se usaban en la antigüedad? ¿Se puede medir el tiempo absoluto?...

Para contestar estas preguntas y otras que puedan surgirle al alumno se puede recurrir a Internet para extraer información. En la bibliografía se pueden consultar varias referencias de utilidad. La sesión se puede desarrollar, pues, en el aula de informática.

Uno de los tipos de relojes empleados en la antigüedad eran las clepsidras o relojes de agua. Estos relojes, en su versión más sencilla, consistían en recipientes que se llenaban o vaciaban de agua, empleando siempre el mismo tiempo. Se puede encontrar información sobre ellas en la página web *Clepsidres*[3], en la que también hay una propuesta para construir una.

Las cuestiones que dan comienzo a la investigación son las siguientes:

> ¿Determina la geometría del recipiente el tiempo de llenado o de vaciado?
> ¿Se comportará igual si se llena que si se vacía?

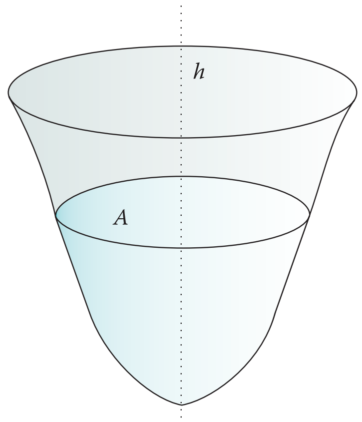
En actividades para el dibujo de gráficas, el uso de recipientes que se llenan a caudal constante es una forma conocida de introducir el análisis de funciones. Un ejemplo reciente se tiene en la página web *Lléname*[4].

Las posibles respuestas a la pregunta anterior requieren delimitar el problema. Lo más inmediato es pensar que un recipiente se llena con un caudal constante (un grifo abierto). Aunque esto no tiene porque ser así, es conveniente orientar la investigación hacia esta posibilidad para no complicar en exceso los cálculos.

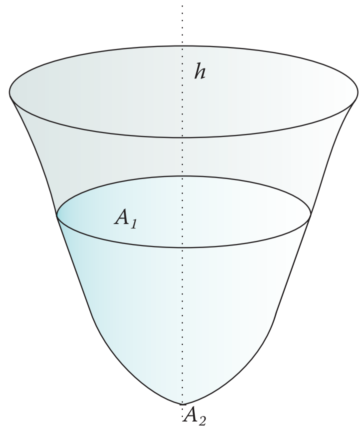
Sin embargo, para el vaciado de un recipiente la presión del agua hace que el caudal de salida varíe con el tiempo. El nivel que va alcanzando el agua modifica la velocidad de salida.

Si se define la velocidad de llenado o vaciado como la variación de nivel respecto al tiempo del agua del recipiente, es fácil deducir que en el primer caso será proporcional al caudal vertido e inversamente proporcional al área de la superficie del agua.

De manera sencilla se puede expresar:



$$dh \cdot A = Caudal \cdot dt$$



$$A_1 >>> A_2$$

$$-\frac{dh}{\sqrt{h}} A_1 = \sqrt{2g} A_2 dt$$

Pero si no se dispone de una fuente de caudal de agua constante, lo más cómodo es llenar un recipiente y esperar a que se vacíe por un orificio realizado en su base. En este caso se deben tener en cuenta la ecuación de continuidad y la de Bernouilli[5].

La ecuación de Bernouilli expresa la ley de conservación de la energía para un fluido no viscoso.

En nuestro caso, la ecuación de continuidad nos dice que el flujo de agua en cualquier sección del recipiente ha de ser el mismo, es decir, que el caudal que atraviesa cada sección ha de mantenerse constante:

$$A \cdot v = \text{cte}$$

Siendo v la velocidad del agua y A el área de la sección.

La ecuación de Bernouilli expresa la ley de conservación de la energía para un fluido no viscoso. En el caso del agua la ecuación sería:

$$P + gh + \frac{1}{2}v^2 = cte$$

Siendo P la presión que soporta el agua, h el nivel del agua, g la aceleración de la gravedad y v la velocidad del agua.

Aplicando esta ecuación a ambas posiciones de la clepsidra, interior y agujero en la base, se obtiene una ecuación para determinar el nivel de agua en función del tiempo[6]:

Bajo estas condiciones, se puede asegurar que no necesariamente empleará el mismo tiempo un recipiente en llenarse que en vaciarse, y lo que es más importante, que no lo hará de igual manera. Lo que sí está claro es que la forma del recipiente condicionará el valor del área de la superficie del agua en cada momento, por lo que la geometría de la clepsidra sí determina cómo será la variación del nivel del agua respecto del tiempo.

Desarrollo: 1ª etapa

Las ecuaciones anteriores permiten conocer a qué *ritmo* se llenará o vaciará un recipiente de una forma determinada. Con sólo realizar una integral podremos conocer la función que muestre la dependencia del nivel del agua respecto al tiempo.

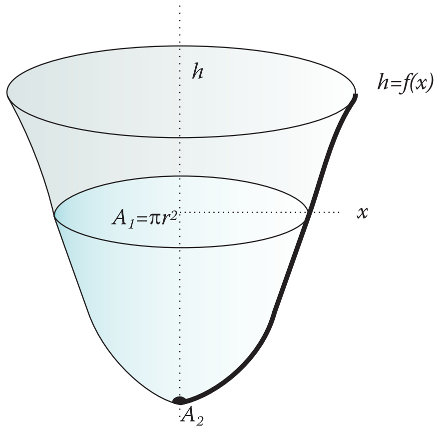
¿Cómo orientar al alumno en la búsqueda de esas funciones? Si una clepsidra ha de ser un objeto cotidiano, fácil y sencillo de utilizar, parece conveniente que se busque aquel recipiente que se llene o vacíe variando su nivel a intervalos constantes con el tiempo. De esta forma se podrá medir el tiempo estableciendo una relación directamente proporcional entre intervalos espaciales y temporales. Bastará con colocar una regla graduada en el centro del recipiente: cada centímetro que varíe su nivel se corresponderá con un mismo intervalo de tiempo.

Si a los recipientes que cumplen estos requisitos se les considera perfectos, la pregunta sería:

¿Qué forma tiene el recipiente perfecto?

Para que los alumnos pongan en práctica los contenidos referentes al cálculo integral correspondiente a su nivel, se deberá tomar como hipótesis que los recipientes son superficies de revolución. Se puede justificar esta particularización haciendo referencia al uso del torno en alfarería, que hace plausible la fabricación de recipientes de estas características.

Con este supuesto, la superficie del agua dentro del recipiente es un círculo, cuya área se puede expresar en función del radio. Y además, el contorno del recipiente se puede expresar mediante una función que relacione el nivel con una coordenada horizontal. Escogiendo los ejes adecuados, el radio de la superficie coincide con el valor de esta coordenada horizontal.



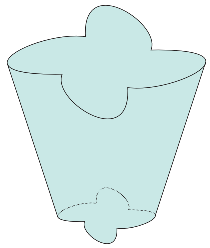
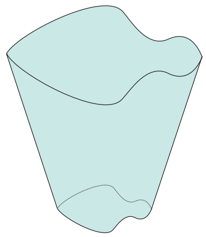
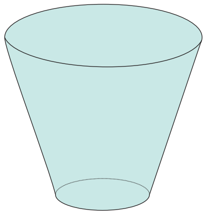
Recipiente que se llena a caudal constante:

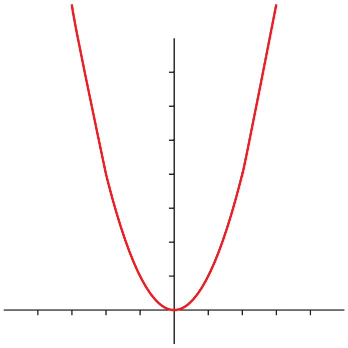
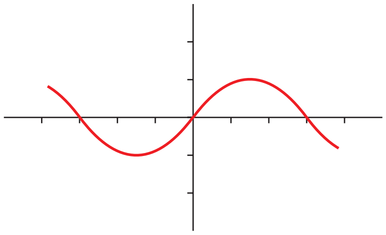
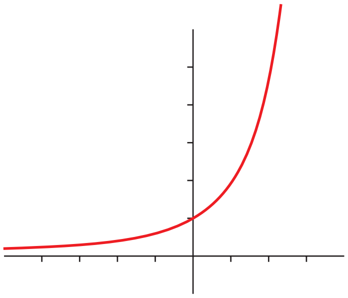
$$dh \cdot \pi \cdot \left[f^{-1}(h) \right]^2 = Caudal \cdot dt$$

Recipiente que se vacía por un orificio pequeño:

$$-\frac{dh}{\sqrt{h}} \pi \cdot \left[f^{-1}(h) \right]^2 = \sqrt{2g}\, A_2 dt$$

Es importante ir delimitando el problema con el alumno para evitar que se disperse y se pierda. La dinámica de grupos con participación activa es una forma de trabajo adecuada en esta primera etapa del desarrollo de la investigación más conceptual. Es conveniente realizar tablas de posibilidades que se irán restringiendo para permitir sacar conclusiones. Estas dos tablas sirven como ejemplo orientativo para ilustrar el proceso, aunque dependerá en última instancia de las propuestas de los alumnos:

Tipos de recipientes	Dibujo	Consideraciones
Sin simetría alguna		No podemos saber la relación entre el nivel y la coordenada horizontal (o resulta muy complicado para este nivel)
Con simetrías respecto a ejes verticales	Dos ejes 	Dificultad para calcular el área de la superficie
	Un eje 	Dificultad para calcular el área de la superficie
	De revolución 	Facilita el cálculo del área de la superficie

Tipos de contornos	Ejemplo	Gráfica	Consideraciones
Funciones potenciales	$y = x^2$		Las integrales son sencillas. Se obtienen recipientes al hacer las funciones.
Funciones trigonométricas	$y = \text{sen } x$		Difícil de integrar. Dificultad para ver la forma del recipiente.
Funciones exponenciales	$y = 2^x$		Difícil de integrar. Dificultad para ver la forma del recipiente.

Desarrollo: 2ª Etapa

En esta etapa se trata de averiguar qué forma tendrá ese recipiente perfecto, con los supuestos anteriores.

Al igual que en la etapa anterior es importante sistematizar el trabajo, no perdiendo de vista los objetivos conceptuales propuestos por el currículum. Por tanto, un método aconsejable es el de prueba y error. El alumno puede elaborar una tabla con las integrales que va a tener que realizar. Comenzando con funciones potenciales aseguramos que el alumno podrá realizar los cálculos sin problemas.

Si se comienza por el recipiente que tiene como contorno una recta vertical, es decir, aquel de forma cilíndrica, se encontrará que para la clepsidra que se llena, este recipiente ya cumple con los requisitos planteados[7]:

$$\int A \cdot dh = \int Caudal \cdot dt$$

$$h = \frac{Caudal}{A} t$$

Pero en el caso de un recipiente que se vacía, no ocurre lo mismo. Para facilitar el cálculo de las integrales se situará el origen de coordenadas en el nivel del recipiente lleno:

$$-\int \frac{A_1}{\sqrt{h}} \cdot dh = \int \sqrt{2g} \cdot A_2 \cdot dt$$

$$h = -\frac{g \cdot A_2^2}{2 \cdot A_1^2} t^2$$

La condición requerida no se cumplirá hasta utilizar el recipiente cuyo contorno sea de la forma $h=x^4$.

$$-\int \frac{\pi \cdot h^{1/2}}{\sqrt{h}} \cdot dh = \int \sqrt{2g} \cdot A_2 \cdot dt$$

$$h = -\frac{\sqrt{2g} \cdot A_2}{\pi} t$$

Otro método que se utiliza es el de la generalización. Se puede utilizar como función contorno una función que represente a todas las potenciales, $h = x^n$, y calcular la integral. Imponiendo las condiciones requeridas sobre el resultado final, se calcula el valor de n que las satisface. Este método puede resultar complejo para los alumnos y requiere que se especifique el rango de valores de n (n>0), con lo cual no será válido para el caso de un recipiente que se llena. No obstante, es una opción que pueden escoger los alumnos.

$$-\int \frac{\pi \cdot h^{2/n}}{\sqrt{h}} \cdot dh = \int \sqrt{2g} \cdot A_2 \cdot dt$$

$$h^{\frac{4+n}{2n}} = -\frac{2n}{4+n} \frac{\sqrt{2g} \cdot A_2}{\pi} t$$

$$\frac{4+n}{2n} = 1$$

$$n = 4$$

También se puede deducir la respuesta sin necesidad de realizar integrales, utilizando métodos deductivos. En ese caso, el alumno demostrará tener claro el concepto de derivada. Se trata de considerar la variación del nivel respecto del tiempo y hacerla constante (relación lineal entre nivel y tiempo).

En el caso de un recipiente que se llena:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{Caudal}{A_1}$$

A_1 deberá ser constante.

En el caso de un recipiente que se vacía:

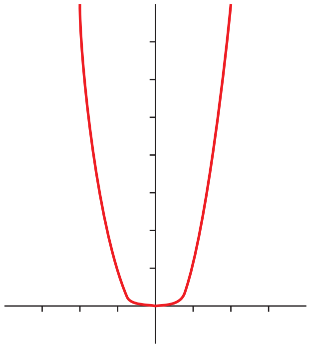
$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{h}}{A_1} \cdot \sqrt{2g} A_2$$

$$A_1 < \sqrt{h}$$

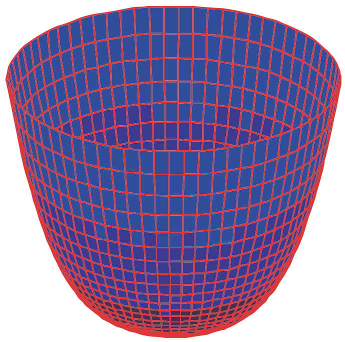
$$x^2 = \sqrt{h}$$

$$h = x^4$$

Para visualizar la forma de los recipientes se puede utilizar un programa de representación de gráficas. El Winplot de Peanut Software es una opción[8]. Se puede descargar gratuitamente a través de Internet, es sencillo de manejar y existe una versión en español.



$h = x^4$



Ampliación

Las clepsidras son cronómetros de épocas antiguas. Como objeto útil hoy en día, puede resultar difícil a nuestros alumnos encontrarles aplicación. Sin embargo, el hecho de utilizar funciones para determinar los fenómenos físicos no ha dejado de estar vigente.

Actualmente la mayoría de los relojes son electrónicos. La cuestión es:

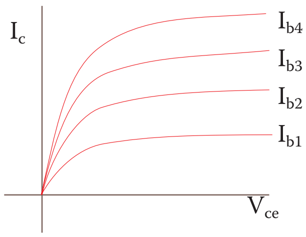
¿Qué componentes electrónicos se asemejan a una clepsidra en su comportamiento?

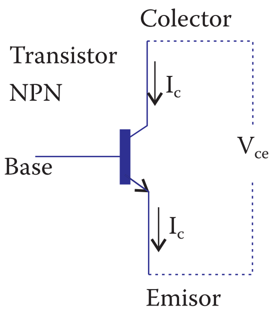
Esta pregunta está especialmente orientada para aquellos alumnos que cursen la modalidad de Tecnología. Si una clepsidra funciona como un cronómetro es lógico pensar en circuitos temporizadores.

El circuito integrado 555 en modo monoestable permite generar un pulso a la salida de duración ajustable mediante una resistencia y un condensador. Esto permite utilizarlo como temporizador.

Un condensador actúa como una pequeña batería recargable que se descarga cuando cesa de llegarle corriente. En este caso el agua sería la corriente eléctrica, analogía utilizada para enseñar las magnitudes eléctricas. Con condensadores se pueden construir temporizadores sencillos pero sobre los cuales se tiene poco control del tiempo.

Continuando con la analogía, si queremos un componente electrónico que varíe el flujo de corriente, es decir, la intensidad, al igual que lo hace la clepsidra que se vacía, se podría pensar en un transistor. Mediante los transistores se puede controlar el paso de corriente mediante una señal de baja intensidad. Siguiendo con la analogía, esta señal representaría el caudal que sale por el agujero de la clepsidra, que está relacionado con su tamaño. Al variar la tensión (el nivel del agua) la corriente que pasa también variará. Y lo hará según las curvas características de cada transistor:





En la zona de conducción del transistor, la intensidad que pasa aumenta linealmente con la intensidad de la base, al igual que en las clepsidras, en las que un orificio mayor supone un caudal también mayor.

En otros ámbitos de la tecnología también se pueden encontrar temporizadores hidráulicos, que por el hecho de trabajar

con agua guardan cierta similitud con una clepsidra. Las válvulas reguladoras de caudal unidas a depósitos de presión permiten retardar una determinada acción.

Conclusiones

Los trabajos de investigación en el aula de Matemáticas fomentan el uso del método científico, permiten la conexión con otros ámbitos del saber y afianzan la autoestima de los alumnos al permitirles aprender por sí mismos.

La propuesta de investigar el funcionamiento de los relojes es una manera de desarrollar diversos contenidos del área de Matemáticas. En concreto, escoger las clepsidras como objeto de estudio en un nivel de 2º de Bachillerato hace posible poner en práctica los conocimientos que tienen los alumnos sobre funciones y cálculo integral, teniendo la posibilidad de interpretar los resultados.

Nuestra necesidad constante de medir el tiempo hace que el tema no carezca de actualidad, pudiendo ser conectado con otras tecnologías como la electrónica y la hidráulica. Así mismo, su punto de partida hace que pueda relacionarse con otras disciplinas, como el arte o la historia, permitiendo una interacción interdisciplinar.

Las opciones que se muestran en este artículo no son las únicas. La investigación es abierta y por tanto el alumno interesado tiene la posibilidad de plantearse otras preguntas y buscar otros caminos. Preguntarse por otro tipo de recipientes, otro tipo de fluidos, realizar hipótesis sobre recipientes en cascada... son algunas de las cuestiones que los alumnos pueden plantearse.

Si bien no es fácil construir una clepsidra cuya forma responda a un contorno $h = x^4$ sí se pueden encontrar recipientes de plástico con los que practicar y tomar medidas para la elaboración de gráficas.

O bien se puede simular mediante un programa de ordenador (Flash por ejemplo) el descenso del líquido según las ecuaciones calculadas.

Por último señalar que, si bien el enfoque hacia niveles superiores era necesario si se quiere incorporar el cálculo integral, existe la posibilidad de practicar con las clepsidras en los primeros cursos de ESO, como introducción a la dependencia funcional[9]. ■

NOTAS

1 DE LORENZO, J. (1992): *Kant y la matemática*, Ed. Tecnos, Madrid, pp. 133-136.

2 http://www.um.es/infosecundaria/titulaciones/legislacion/curriculo.pdf

3 Clepsidres: http://usuarios.lycos.es/thibauttadeo/index.htm

4 Lléname de Rafael Losada Liste:

http://www.iespravia.com/mates/recipientes/

5 Considerando en todo momento flujos de agua no turbulentos en estado estacionario.

6 APÓSTOL, T. M. (1984): *Cálculus*, Editorial Reverté, Barcelona, pp. 432-433.

7 Utilizando el teorema fundamental del cálculo integral en el intervalo $\forall h \in [0, h_0]$ siendo h_0 la altura del recipiente.

8 Peanut Software. http://math.exeter.edu/rparris/

9 La tradición y lo novedoso en la enseñanza de las ciencias: ¿Cómo medimos el tiempo?

http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza&articulo_id=9274

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

APÓSTOL, T. M. (1984): *Cálculus*, Editorial Reverté, Barcelona.

DE LORENZO, J. (1992): *Kant y la matemática*, Ed. Tecnos, Madrid.

DÍAZ, J. L. (2002): *Tecnología industial II*, Edebé, Barcelona.

REAL DECRETO 117/2004, de 23 de enero, por el que se desarrolla la ordenación y se establece el currículo del Bachillerato. BOE n.º 42, Miércoles 18 de Febrero 2004, pp. 7575-7662.

ROJAS, R. (2003): Tecnología 4º ESO, Santillana, Madrid.

TIPLER, P. A. (1985): *Física*, Editorial Reverté, Barcelona.

En Internet:

Ancient Clock:

http://library.thinkquest.org/23062/mclock4.html

Building a water clock:

http://www.sciencenetlinks.com/Lessons.cfm?DocID=2

Clepsidras:

http://fluidos.eia.edu.co/hidraulica/articuloses/accesorioshidraulicos/clepsidra/clepsidra.html

http://usuarios.lycos.es/thibauttadeo/

http://www.ubr.com/clocks/pub/clep/clep.html

Clocks:

http://www.darylscience.com/Demos/Clocks.html

El tiempo, una cuestión compleja y apasionante:

http://aula.elmundo.es/aula/noticia.php/2006/01/26/aula1138211263.html

Festival de fluidos (Medellín 2001):

http://fluidos.eia.edu.co/fluidos/clepsidra/clepsidra.html

¿Hay ciencia en el tiempo de María Zambrano?

http://serbal.pntic.mec.es/~cmunoz11/thibaut45.pdf

Histoire de la mesure du temps:

http://members.aol.com/lagardesse/

La tradición y lo novedoso en la enseñanza de las ciencias: ¿Cómo medimos el tiempo?

http://www.quadernsdigitals.net/index.php?accionMenu=hemeroteca.VisualizaArticuloIU.visualiza&articulo_id=9274

Lléname de Rafael Losada Liste:

http://www.iespravia.com/mates/recipientes/

Midiendo el tiempo:

http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar/act_permanentes/historia/histdeltiempo/pasado/tiempo/p_midien.htm

Primeros ejemplos históricos de mecanismos de control:

http://automata.cps.unizar.es/Historia/Webs/primeros_ejemplos_historicos_de_.htm

Problema de la clepsidra:

http://www.omerique.net/twiki/bin/view/Calcumat/ProblemaClepsidra

Proyecto de Alfabetización Científica–Módulo *¿Cuánto dura un recreo? Intervalos y duraciones:*

http://redteleform.me.gov.ar/pac/file/Recreo.pdf

Time and the History of his measurement:

http://www.zetnet.co.uk/sea.jnp/earth.4/time.htm