SUMA 54
Febrero 2007, pp. 75-78

El número de oro es plano. ¡Pásalo!

El número de oro Φ=1,618… es al plano, lo que el número plástico *P*=1,2471… es al espacio. Ver esto es el objetivo final de este clip. Pero permitan primero una breve visita a la familia de los números metálicos en la cual destaca con luz propia el áureo.

El triplete oro-plata-bronce hace recordar a las medallas olímpicas (récords deportivos) o a los aniversarios de boda (récords de paciencia). Lo sorprendente es que dichos calificativos también vayan unidos a tres singulares números irracionales.

Números metálicos

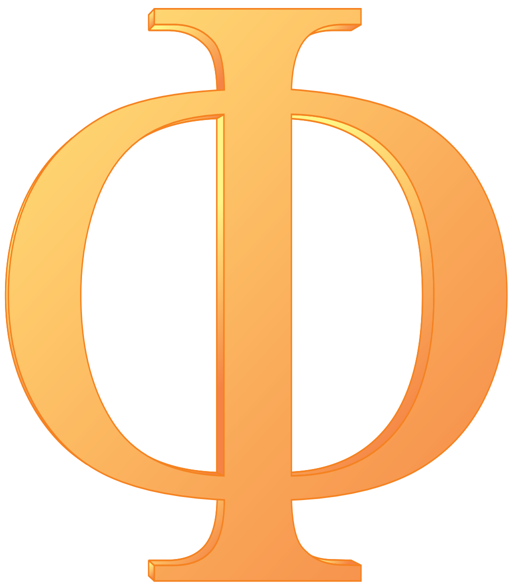
Todos surgen de una simple ecuación de segundo grado

$$x^2 = mx + n$$

donde los coeficientes m y n son números naturales. La solución positiva de la ecuación planteada es

$$x = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4n}}{2}.$$

Estas cantidades tan raras tienen una razón geométrica muy simple. Considere un natural m y un rectángulo de lados a, b de manera que $ma<b$ pero $b<(m+1)a$.



Claudi Alsina
elclip.suma@fespm.org

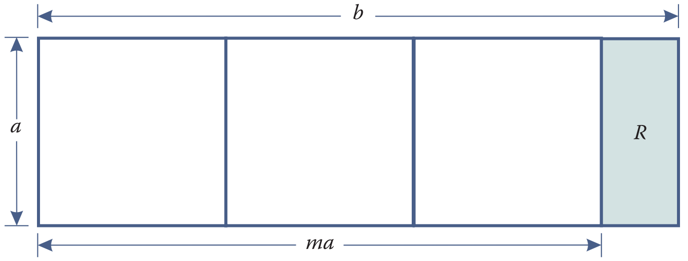


Figura 1

Entonces cabe preguntarse cuando al dividir el rectángulo dado en m cuadraditos de lado a y una pieza rectangular R tendremos la suerte (es un decir) de que la proporción entre el lado largo y el lado corto de R sea la misma que la de todo el rectángulo inicial de lados a y b (igual forma). Esto nos lleva a la condición:

$$\frac{a}{b-ma}=\frac{b}{a},$$

es decir $a^2 = b^2 - mab$ o dividiendo por a^2, reagrupando e introduciendo $x=b/a$

$$x^2 = mx+1,$$

que es la ecuación de los metálicos (para n=1).

Cuando m=n=1 resulta el número de oro Φ o divina proporción:

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1{,}61803...,$$

Cuando m=2 y n=1 resulta el número de plata

$$\sigma_{Ag}=1+\sqrt{2}=2{,}4142...$$

Finalmente, cuando m=3 y n=1 se obtiene el número de bronce

$$\sigma_{Br}=\frac{3+\sqrt{13}}{2}=3{,}3027...$$

Para otros valores de m y n se halla también el número de níquel, el de cobre, etc.

Estas joyas numéricas no son funciones sino números irracionales y presentan, matemáticamente, curiosas propiedades. Por ejemplo, fijados m y n considere una sucesión de números a_1, a_2, a_3,... donde los dos primeros términos son unos (a_1=a_2=1) y exista la relación de recurrencia

$$a_{k+2}=ma_{k+1}+na_k$$

es decir,

$$1,\ 1,\ m+n,\ m\cdot(m+1)+n\cdot 1...,$$

sucesión a partir de la cual puede calcular los cocientes de cada término por su anterior a_{k+2}/a_{k+1}Esta sucesión de razones tiende a un valor x y, gracias a la relación recurrente, vemos que

$$a_{k+2}/a_{k+1}=m+n\frac{a_k}{a_{k+1}}=m+n\frac{1}{a_{k+1}/a_k},$$

lo que fuerza a que $x=m+n/x$ es decir, $x^2 = mx + n$ y x es un número metálico.

Así para m=n tiene la famosa sucesión de Fibonacci

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...

cuyos cocientes tienden al número de oro Φ. Para m=2 y n=1 tiene

1, 1, 3, 7, 17, 41, 99, 140,...

cuyos cocientes tienden al número de plata. Y si m=3 y n=1 tiene

1, 1, 4, 13, 43, 142,...

las razones entre los cuales le llevarán al número de bronce.

El número de oro es omnipresente en la Naturaleza y en el Arte, esencialmente por dos razones: porque muchos fenómenos de crecimiento natural presentan cantidades que siguen la sucesión de Fibonacci y por haberse mitificado la proporción áurea como la más bella visualmente. Usted tiene proporción áurea si divide su altura por la altura de su ombligo (cintura)... y lleva un rectángulo de oro si posee una tarjeta de crédito o un DNI.

Capilla Medicea, Miguel Ángel, Florencia

Según Vera Spinadel y Jay Kappraff el número de plata aparece en el sistema romano para determinar la proporción de determinadas edificaciones y Kim Williams lo ha localizado en el pavimento del baptisterio de San Giovanni en Florencia y en la capilla de los Médici de Miguel Ángel.

Vamos a observar ahora un caso de raíz cúbica de interés especial: *el número plástico*.

Hans van der Laan (1904-1991)

Descubierto por el arquitecto (que era monje benedictino en Holanda) Hans van der Laan (1904-1991) este numerito P llamado místico o plástico (en el sentido doble de plasticidad artística) resulta ser la solución positiva de la ecuación cúbica $x^3 = x+1$, es decir

$$P^3 = 1 + P,$$

siendo P=1,329… Según Padovan el estudiante G. Cordounier también se ocupó de P en la misma época. En la sección anterior, visitando los números metálicos hemos visto que el primoroso número de oro Φ verificaba $\Phi^2=\Phi + 1$. Pues bien, el número plástico, por verificar $P^3 = P+1$ representa en muchas situaciones del espacio de dimensión 3 lo que el número de oro representa en el plano de dimensión 2. Observe la figura adjunta donde la caja de aristas $c<b<a$ se ha repetido dos veces en la forma indicada.

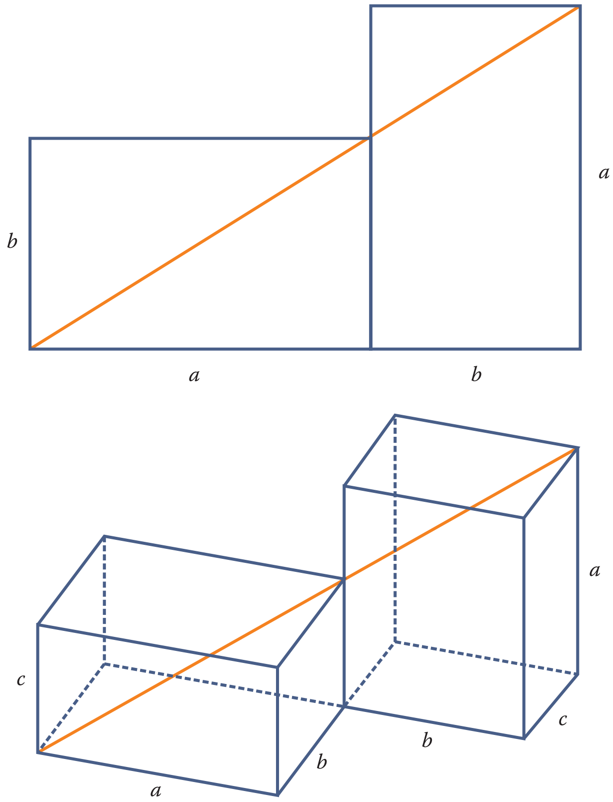


Figura 2

La propiedad de los rectángulos caracteriza Φ. En el espacio si la diagonal principal de la caja horizontal se prolonga y se impone que pase por el vértice superior correspondiente de la caja vertical entonces resulta que esto es posible sólo si $b=P\cdot c$, $a=P^2\cdot c$, con c arbitrario y P el número plástico.

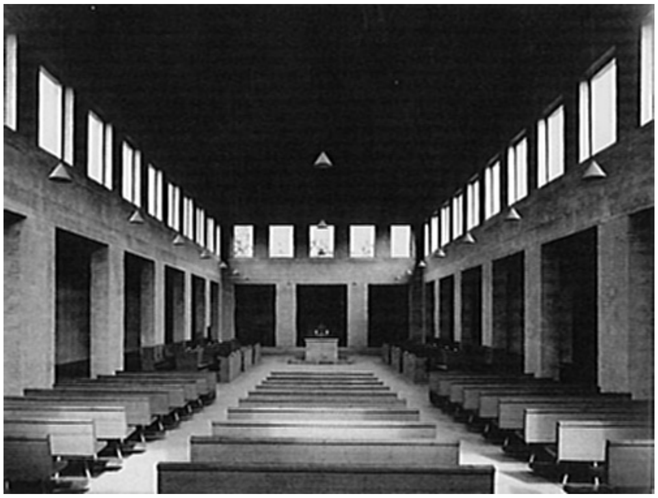


Figura 2

El padre van der Laan estudió proporciones de las iglesias románicas y descubrió que muchas de estas proporciones se correspondían con las correspondientes a los términos de la sucesión

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9,...$$

Esta sucesión empieza por tres unos y cada término es igual a la suma de los dos antepenúltimos, resultando que los cocientes

$$\frac{1}{1},\frac{1}{1},\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{2}{2},\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},\frac{7}{5},\frac{9}{7},...$$

tienden precisamente al número plástico P (como van der Laan trabajó en sus obras la sucesión anterior en sus escritos sólo cita de pasada a P). Hace pocos años Ignacio Millán verificó, por ejemplo, que el claustro de la iglesia románica de Sant Pau del Camp de Barcelona, responde a este tipo de proporciones.

Para pensar un rato

Le proponemos tres cuestiones:

1. Sea C un punto de un segmento AB. Si el volumen del cubo de lado AC es igual al volumen del paralelepípedo de aristas AB, CB y $AB+AC$ entonces $AB:AC=P$.
2. Sea una corona obtenida por dos circunferencias de igual centro O y radios a, b con $a<b$. Considere la elipse de centro O y semiejes a y b. Demuestre que el área de la elipse es igual al área de la corona si y solo si $b/a=\Phi$. Pase ahora al espacio haciendo girar la corona y la elipse alrededor del eje mayor. Demuestre que el volumen del elipsoide es igual al volumen entre las dos esferas si y sólo si $b/a=P$ (número plástico).
3. En la primera figura hemos mostrado una característica geométrica de los rectángulos metálicos cuya proporción verifica $p^2=mp+1$. ¿Existe una propiedad geométrica característica de los rectángulos cuya proporción verifique $p^2=mp+1$ con m, n enteros positivos y $n>1$? ■

PARA SABER MÁS

SPINADEL, V.W. de (1998), *From the Golden Mean to Chaos*, Pub. Vicente López, Buenos Aires.

DAMÍAN, F. y FUENTE, Miguel de la (2001), *Matemáticas, Naturaleza y Arte*, Pub. Junta de Andalucía, Córdoba.

R. PADOVAN, R. (1994), *Dom Hans van der Laan*, Modern Primitive, Amsterdam.

LAAN, H. van der (1960), *Le Nombre Plastique; quinze Leçons sur l'ordonnance architectonique*, Brill, Leiden.

ALSINA, C. y GARCIA-ROIG, J.L. (2001), “On plastic numbers”, *Journal of Mathematics & Design*, Vol. 1, nº 1, 13-19.

Normas de publicación en página 143.
Boletín de suscripción en página 144.