SUMA 54
Febrero 2007, pp. 43-49

Las Matemáticas y la evolución de las escalas musicales

La asignatura de Matemáticas y su Didáctica que se imparte en la titulación de Maestro en Educación Musical presenta una problemática muy específica, especialmente ligada a aspectos de motivación, que requiere tratamientos didácticos específicos de cara a evitar barreras en el aprendizaje de la materia. Existen interesantes relaciones entre música y matemáticas, cuyo uso en la programación permite introducir cambios innovadores que pueden conducir a una verdadera y deseada implicación del estudiante en la construcción del conocimiento didáctico-matemático escolar.

Mathematics and its Didactics is a subject taught as part of the degree of Teacher in Musical Education which has some problematic issues, especially those bound to motivation aspects. Such issues require specific didactic treatments that will avoid barriers in the learning process. There are valuable relationships between Music and Mathematics, whose use in the syllabus allows us to show innovating changes that can lead to a truthful and valued implication of the student in the construction of the knowledge scholastic didactic-mathematician.

En la programación de la materia Matemáticas y su Didáctica de la titulación de Maestro en Educación Musical de la Universidad de Jaén figura como objetivo global:

> Dotar a los estudiantes para maestros de esta titulación de una capacitación didáctico–matemática, de cara a la enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria.

Sin embargo, si se plantea siguiendo los descriptores de la materia, sin tener en cuenta la procedencia de estos alumnos, es posible que el estudiante no encuentre aspectos matemáticos para relacionar con su propia materia musical, lo cual puede conducirle a tener que considerar las Matemáticas como una asignatura demasiado atomizada y aislada del resto del currículo.

Teniendo en cuenta este fenómeno didáctico, el del aislamiento de la materia de Matemáticas y su Didáctica en el currículo de la formación del Maestro de Educación Musical, en la programación se introduce el siguiente objetivo general (correspondiente a las relaciones interdisciplinares):

> El estudiante debe conocer las relaciones entre las matemáticas y la música que le permitan dar significado, tanto a objetos de carácter musical como a objetos de tipo matemático, además de dotar de sentido a la evolución histórico–epistemológica de ambas ciencias.

Este objetivo general se descompone en varios objetivos específicos: Estudio, reflexión y discusión acerca de las relaciones existentes entre el desarrollo epistemológico musical y los conceptos matemáticos implicados, los sistemas de numeración matemáticos y las representaciones de las notas musicales según su duración y las sucesiones de números racionales y el valor de las notas musicales en las diversas escalas.

El trabajo que se desarrolla corresponde al primero de los objetivos específicos: estudio, reflexión y debate acerca de las relaciones existentes entre el desarrollo epistemológico musical y los conceptos matemáticos implicados. Además, dado que parece esencial acudir al contexto sociocultural como medio para poder explicar ciertos cambios y rupturas en la evolución musical, se efectuará un breve análisis de aquellos movimientos sociales que han podido tener repercusión en la historia de la música, lo cual, por otra parte, representa una interesante aportación interdisciplinar.

Ángel Contreras de la Fuente
María del Consuelo Díez Bedmar
Juan Pablo Pacheco Torres
Universidad de Jaén. Jaén

En este artículo, primeramente se desarrolla un estudio en el que se definen matemáticamente los conceptos de intervalo, escala y nota musical. En segundo lugar, basándose en los conceptos introducidos, se realiza un recorrido evolutivo de algunos de los sistemas musicales más importantes, desde la época griega hasta la actualidad. No se trata de ofrecer una propuesta didáctica concreta, sino facilitar la labor de enseñanza–aprendizaje a los profesores y estudiantes de educación musical por medio de unas orientaciones y herramientas didácticas que se consideran de utilidad.

El sonido está caracterizado, además de por su duración, por tres elementos: altura o frecuencia; intensidad o amplitud de la vibración sonora y timbre o forma de la vibración.

Intervalos, escalas y notas musicales

Teniendo en cuenta las aportaciones de Arenzana y Arenzana (1998) y Pascal y Tomas (2000), el sonido está caracterizado, además de por su duración, por tres elementos: altura o frecuencia; intensidad o amplitud de la vibración sonora y timbre o forma de la vibración. En este estudio nos centraremos en la altura del sonido.

El teorema de Fourier nos informa de que en realidad un sonido complejo de frecuencia f se produce por una vibración que es la suma de varias vibraciones de tipo sinusoidales o sonidos puros. Es decir, por el sonido fundamental de frecuencia f y los armónicos de frecuencias $2f$, $3f$...

Intervalos

Considerando el hercio como unidad de medida de las frecuencias, se puede establecer una relación binaria en $(\mathbb{R}^*_+)^2$ entre los pares de sonidos, a través de sus frecuencias. Es decir, en $(\mathbb{R}^*_+)^2$ se define la siguiente relación:

$$(f_1, f_2) \sim (f_3, f_4) \Leftrightarrow f_2/f_1 = f_4/f_3$$

Se trata de una relación de equivalencia y las clases módulo ~ se denominan intervalos.

Una propiedad interesante es:

Un intervalo admite un representante único del tipo $(1, k)$.

En efecto, llamando $f_2 / f_1 = k$, se tendrá:

$$(f_1, f_2) \sim (1, f_2/f_1) \sim (1, k) \sim (f, kf)$$

Esto nos permite definir el intervalo I_k como:

$$I_k = \{(f, kf), f \in \mathbb{R}^*_+\}$$

De esta forma, el conjunto de intervalos es:

$$I = \{I_k, k \in \mathbb{R}^*_+\}$$

Con esta notación, los intervalos más conocidos son:

I_1 es el unísono y corresponde al conjunto (f, f).
I_2 es el intervalo de octava, $(f, 2f)$.
$I_{3/2}$ es el intervalo de quinta, $(2f, 3f)$.
$I_{4/3}$ es el intervalo de cuarta, $(3f, 4f)$...

Por otra parte, si consideramos el intervalo I_k con (f, kf) y dado que, evidentemente, $kf = kf$, tomando logaritmos:

$$\log (kf) = \log (k) + \log (f)$$

Podemos convenir en tomar un segmento de medida proporcional al logaritmo de k y entonces lo anterior quedaría:

$$kf = f + I_k$$

Que representado en una recta sería:

De esta forma tendremos:

$$\text{Med } (I_k + I_{k'}) = \text{Med } (I_k) + \text{Med } (I_{k'})$$

En $\mathbb{R}^*_+$ vamos a definir una ley de composición interna + de intervalos por medio de la ley siguiente:

$$(\mathbb{R}^*_+)^2 \times (\mathbb{R}^*_+)^2 \to (\mathbb{R}^*_+)^2$$
$$(1, k) \times (1, k') \to (1, kk')$$

que es compatible con la relación de equivalencia ~:

$$(1, k) \sim (f, fk)$$
$$(1, k') \sim (f, fk')$$
$$(1, kk') \sim (f^2, f^2kk')$$

Esto nos permite sumar los intervalos de la forma:

$$I_k + I_{k'} = I_{kk'}$$

La aplicación de ($\mathbb{R}^*_+$, x) sobre (I, +) es, por tanto, un isomorfismo, lo cual nos permite hablar de intervalos como elementos de I o como elementos de $\mathbb{R}^*_+$.

Escalas

Se llamará escala musical a todo subgrupo propio de $\mathbb{R}^*_+$. Así, por ejemplo, se tendrán las escalas:

- Pitagórica, como un subgrupo multiplicativo engendrado por 2 y 3:
  $$<2,3> = \{2^n 3^m,\ n \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}\}$$
- Temperada, que corresponde a $<2^{1/12}>$.

En el periodo griego, las matemáticas y la música estaban fuertemente conectadas.

Notas

Teniendo en cuenta los sonidos de frecuencias: f, $2f$, … $2^n f$… ($n \in \mathbb{N}$) y $f/2$, $f/4$,… $f/2^p$ ($p \in \mathbb{Z}$), en $\mathbb{R}^*_+$, dadas dos frecuencias f_1 y f_2 se define la relación binaria:

$$f_1 \,\Re\, f_2 \Leftrightarrow \exists\ n \in \mathbb{N}, f_2 = 2^n f_1$$

Esta relación $\Re$ es de equivalencia y las clases módulo $\Re$,

$$\{2^n f,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

se les denomina notas musicales.

Veamos que toda nota admite un representante único perteneciente al intervalo $[f, 2f)$, $\forall f \in \mathbb{R}^*_+$.

En efecto, para cualquier nota de frecuencia f', se cumple que:

$$2^n \leq f'/f < 2^{n+1} \Leftrightarrow 2^n f \leq f' < 2^{n+1} f$$

Entre las notas puede establecerse una relación de orden del modo siguiente:

Sean f_1 y f_2 dos notas cualesquiera distintas y sean k_1 y k_2 sus representantes del intervalo $[f, 2f)$. Se define la relación:

$$f_1 < f_2 \Leftrightarrow k_1 < k_2$$

Por convenio la nota más pequeña es la DO y se les ha dado el nombre a las otras notas de RE, MI, FA, SOL, LA, SI, DO, estableciéndose la relación:

DO < RE < MI < FA < SOL < LA < SI < DO,

que constituyen el conjunto de las notas musicales naturales.

La música griega

En el periodo griego, las matemáticas y la música estaban fuertemente conectadas. La música se consideraba como una estricta disciplina matemática, donde se manejaban relaciones de números, razones y proporciones.

Según Pitágoras, todas las escalas e intervalos musicales tienen un fundamento matemático basados sobretodo, en las relaciones matemáticas del monocordio. La comprobación de que cuerdas con longitudes de razones 1/2, 2/3 y 3/4, producían sonidos armónicos, condujo a Pitágoras a construir la *escala diatónica* o de las quintas.

Entre estas razones de longitudes se establecen unas relaciones matemáticas interesantes:

$$\frac{3}{4} = \frac{1+\frac{1}{2}}{2}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{1+\frac{1}{\frac{1}{2}}}$$

Es decir, la media aritmética de 1 y 1/2 , y la media armónica de 1 y 1/2.

Por otra parte, la relación de frecuencias era: 2, 3/2 y 4/3, que corresponden a la octava, quinta y cuarta.

Dentro de la quinta, un sonido agradable es la tercera, un triplete en el que las frecuencias se relacionan como 4 : 5 : 6. Partiendo de la nota la, de frecuencia 440 hz., y multiplicando a la izquierda por 5/4 y a la derecha por 6/5 y reiterando el proceso, tendremos:

$$352 \xrightarrow{\text{x } 5/4} 440 \xrightarrow{\text{x } 6/5} 528 \xrightarrow{\text{x } 5/4} 660 \xrightarrow{\text{x } 6/5} 990 \xrightarrow{\text{x } 5/4} 1188$$

Si se pasan a una octava, multiplicando por 1/2 o por 1/4 cuando sea conveniente, tendremos:

264	297	330	352	396	440	495	528
do	re	mi	fa	sol	la	si	do

Esta escala recibe el nombre de *escala de la justa entonación* y se debe a Aristógenes. En esta escala, las relaciones entre las frecuencias de los sonidos van siguiendo los intervalos:

9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15

Pitágoras utilizó una escala parecida a ésta, puesto que los pitagóricos reconocían que para poder hacer música era necesario hacer correcciones a los intervalos puros, de aquí que se utilizaran los intervalos siguientes:

9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243

La diferencia entre las relaciones se debe al hecho de que doce quintas no equivalen exactamente a siete octavas, y la escala usual se obtiene repitiendo las quintas y octavas hasta que coincidan. Esta diferencia viene marcada por la coma pitagórica, cuyo valor corresponde a:

$$(3/2)^{12} : 2^7 = 1{,}0136\ldots$$

Este problema era bien conocido por los pitagóricos, quienes reconocieron que para hacer música era necesario hacer correcciones a los intervalos puros, de ahí que a la diferencia entre esos dos ciclos de 12 quintas y 7 octavas se le denominó como *pitagórica*. Su cálculo da motivo a introducir el concepto de logaritmo, que no sólo permite efectuar dicho cálculo sino que también es necesario para dar sentido a las *sumas* de sonidos.

Didácticamente, es un momento adecuado para destacar el concepto físico de frecuencia y los conceptos matemáticos de fracción y sucesión, como elementos físicos y matemáticos que modelizan los diferentes sonidos.

El barroco

En este periodo el nuevo lenguaje musical será la tonalidad, donde cada nota tiene una función y todas están jeraquizadas, siendo la tónica la nota principal. En la implantación de la tonalidad tiene mucho que ver la afinación temperada, donde, por ejemplo, el do sostenido es igual al re bemol.

El uso de la escala cromática supone utilizar 12 semitonos iguales con lo que se resolvió el problema de cambio de tonalidad sin reajuste de la afinación. Por tanto, la coma pitagórica ya no aparecía. Además, se eliminan las cuarta y quinta justas.

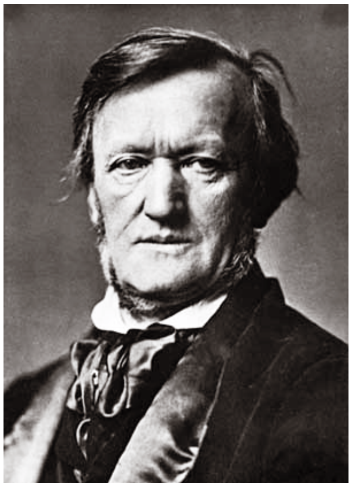
El valor del semitono es $\sqrt[12]{2} = 1{,}0594631$

Si llamamos a éste *f*, como la octava se divide en doce intervalos iguales, la razón de frecuencias será:

1	f	f^2	f^3	...	f^{11}	$f^{12}=2$

Los intervalos distan de ser perfectos. El principal avance en este campo se produce gracias a la afinación temperada, totalmente impuesta en este periodo, y según la cual todos los semitonos son casi iguales.

Fryderyk Franciszek Chopin (Zelazowa Wola, Polonia, 1 de marzo de 1810 — París, 17 de octubre de 1849) es considerado el más grande compositor polaco, y también uno de los más importantes pianistas de la historia. Su perfección técnica, su refinamiento estilístico y su elaboración armónica han sido comparadas históricamente con las de Johann Sebastian Bach y Wolfgang Amadeus Mozart por su perdurable influencia en la música de tiempos posteriores.



Wilhelm Richard Wagner (Leipzig, Alemania, 22 de mayo de 1813 — Venecia, Italia, 13 de febrero de 1883), compositor, director de orquesta, poeta y teórico musical alemán.

Para calcular las frecuencias asociadas, tendremos en cuenta la nota *la* con 440 hz:

$si \quad 466{,}16 \cdot \sqrt[12]{2} = 493{,}88$

$si_b \quad 440 \cdot \sqrt[12]{2} = 466{,}16$

$la \quad 440 = 440$

$la_b \quad 440 : \sqrt[12]{2} = 415{,}30$

...

$do \quad 440 : \left(\sqrt[12]{2}\right)^9 = 261{,}63$

El romanticismo

Los compositores románticos continúan haciendo cada vez más complejo el lenguje tonal, convirtiéndose a veces en tonalidad poco estable e incluso difusa. Un ejemplo de esta difusión tonal lo podemos ver en la bitonalidad, según la cual un fragmento musical puede ser escrito en dos tonalidades de manera simultánea.

Como se indica en www.anarkasis.com/pitagoras/061_modulo, Chopin, en su obra 24 preludios, dispuso las 24 tonalidades en un dodecágono, según las horas del reloj, siguiendo el ciclo de quintas (cada nueva tonalidad está 7 semitonos más arriba).

De esta forma se está estudiando la aritmética modular de congruencias módulo 12. Para una mayor operatividad, las notas se representan de la forma siguiente:

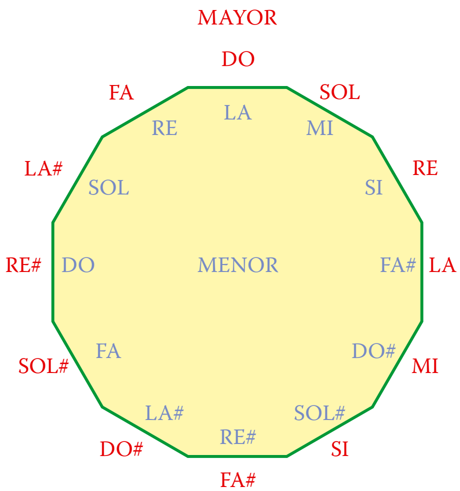
Si es el modo *mayor* (comienza por *do*):

do ≅ 0; do# ≅ 1; re ≅ 2; re# ≅ 3; mi ≅ 4; fa ≅ 5;
fa# ≅ 6; sol ≅ 7; sol# ≅ 8; la ≅ 9; la# ≅ 10; si ≅ 11

Si es el modo *menor* (comienza por *la*):

la ≅ 0; la# ≅ 1; si ≅ 2; do ≅ 3; do# ≅ 4; re ≅ 5;
re# ≅ 6; mi ≅ 7; fa ≅ 8; fa# ≅ 9; sol ≅ 10; sol# ≅ 11

Por tanto, la disposición en el dodecágono es:



Donde vemos que, partiendo de la nota 0, sumando 7 al ser ciclo de quintas, con respecto al módulo 12, tendremos:

$$0 \equiv 7 \equiv 2 \equiv 9 \equiv 4 \equiv 11 \equiv 6 \equiv 1 \equiv 8 \equiv 3 \equiv 10 \equiv 5.$$

La atonalidad

En este periodo de Wagner y Mahler, se vislumbran unos intentos reales de ruptura de la norma de la tonalidad en la que la aleatoriedad musical se va abriendo camino. Es decir, la ruptura con la tonalidad depende del uso de las relaciones matemáticas de modo no convencional. La música recurre, cada vez más, a las matemáticas no como modelización que explica la música de siempre, esto es como herramienta; sino

Gustav Mahler (Kaliste, República Checa, 7 de julio de 1860 — Viena, Austria, 18 de mayo de 1911), compositor de música clásica, fue conocido en vida como uno de los más importantes directores de orquesta y de ópera de su momento, pero después ha venido a ser reconocido como uno de los compositores post-románticos más importantes.

que, por el contrario, las matemáticas pasan a ser creadoras de música, constituyéndose en objeto de creación musical.

Un ejemplo lo tenemos en la obra de Bartók (www.anarkasis.com/pitagoras/menu.htm), *Música para instrumentos de cuerda, percusión y celeste*, en la que utiliza algunos términos de la serie de Fibonacci, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...

Otra creación musical interesante a partir de una sucesión matemática aparece en Jonson (2001). Es decir, como señala este compositor, partiendo de un objeto matemático se llega al objeto musical. Por ejemplo, con un simple automatismo como el siguiente:

$$n \longrightarrow n, n+1, n$$

Teniendo en cuenta que, por las codificaciones ya sabidas, podemos comenzar con do = 0 ..., se generan las siguientes sucesiones numéricas:

0
010
010 121 010
010121010 121232121 010121010
...

las cuales se corresponden con partituras musicales.

El dodecafonismo

Algunos compositores, al considerar que el atonismo era insuficiente para dar cabida a su creación artística, recurrieron a nuevos lenguajes musicales naciendo así un nuevo sistema (análogo, en cierto sentido, al tonal) que se adaptaba al cromatismo total: el sistema dodecafónico, el cual renuncia totalmente a la tonalidad y llega a ser un método para componer con 12 sonidos con la única condición de estar relacionados entre sí.

Veamos cómo se traducen los principios anteriores matemáticamente. Un compositor puede comenzar organizando una secuencia cualquiera de notas:

DO LA$_\flat$ LA SOL$_\flat$ FA SI SI$_\flat$ RE MI$_\flat$ RE$_\flat$ SOL MI

Esta sucesión original de notas constituye el material musical para toda la pieza. De dicha sucesión pueden derivarse otras, las cuales siguen unos determinados principios matemáticos. Las operaciones musicales que se pueden extraer son las de *transposición* —se respeta el orden de los intervalos de la sucesión inicial, aunque se trasladan las notas n semitonos hacia arriba (P_n)—; *inversión* —se invierte la dirección del intervalo— y, por último, *retrogradación* —la misma sucesión de notas pero tocadas desde el final hasta el comienzo—.

Hay que respetar las dos reglas más importantes de la composición dodecafónica:

- La sucesión original debe ser seguida con exactitud, y no puede ser repetida hasta que cada nota haya sido tocada.
- Debe evitarse cualquier combinación de notas que impliquen tonalidad.

Las sucesiones pueden presentarse linealmente (melódicamente) o en forma de acordes (armónicamente).

Para una mayor clarificación, modelicemos numéricamente las operaciones anteriores, para ello codificaremos la sucesión anterior (DO = 0; RE$_b$ = 1; RE = 2;...; SI$_b$ = 10 = t; SI = e = 11)

0 8 9 6 5 e t 2 3 1 7 4

la cual se denotará por P_0.

Apliquemos la transposición a la misma:

Si fijamos n = 1, para hallar P_n se tiene que efectuar la operación matemática siguiente:

$(n + i)$ mod 12, siendo i el número del orden posicional de la nota.

En el caso del ejemplo n se ha tomado 1. Luego, para hallar P_1, tendremos:

1 9 t 7 6 0 e 3 4 2 8 5

Apliquemos ahora la inversión:

Matemáticamente consiste en reemplazar cada intervalo por su complemento mod 12 según el valor de la inversión. En el caso de que fijemos I_1, se tendrá:

$$0 + 1 \sim 1 \text{ (mod 12)}$$

$$8 + 5 \sim 1 \text{ (mod 12)}$$

$$6 + 7 \sim 1 \text{ (mod 12)}$$

...

Por tanto, la sucesión numérica correspondiente a I_1, respecto de P_0, es:

1	5	4	7	8	2	3	e	t	0	6	9
RE$_b$	FA	MI	SOL	LA$_b$	RE	MI$_b$	SI	SI$_b$	DO	SOL$_b$	LA

Si aplicamos la retrogradación, que consiste en hacer reversible el orden de P_0, para R_1 (una unidad más), tendremos:

5	8	2	4	3	e	0	6	7	t	9	1
FA	LA$_b$	RE	MI	MI$_b$	SI	DO	SOL$_b$	SOL	SI$_b$	LA	RE$_b$

De cada una de éstas cuatro, salen 11 posibilidades más. Luego, hay en total 48 posibles versiones.

Conclusiones

Mediante un estudio epistemológico de la evolución musical, se establece la relación entre la música y las matemáticas a través de las dimensiones musical y matemática, que dotan de sentido e interés al estudio de la asignatura de *Matemáticas y su Didáctica* en tercer año de la titulación de Maestro en Educación Musical.

> *El concepto físico de frecuencia y los conceptos matemáticos de relación binaria, relación de equivalencia, relación de orden, grupo, subgrupo e isomorfismo entre otros, permiten la modelización matemática de los sonidos musicales.*

El concepto físico de frecuencia y los conceptos matemáticos de relación binaria, relación de equivalencia, relación de orden, grupo, subgrupo e isomorfismo entre otros, permiten la modelización matemática de los sonidos musicales, lo cual permite al estudiante de educación musical encontrar unas relaciones significativas entre Matemáticas y Música muy importantes sobre todo para su formación matemática, aunque también para su formación musical.

En la descripción evolutiva de los distintos periodos musicales también se trabajan conceptos como el de fracción, número irracional, congruencias módulo m y sucesión, que se considera inciden positivamente en la motivación de cara a su formación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARENZANA, V. y ARENZANA, J. (1998): “Aproximación matemática a la música”, *Números, Revista de didáctica de las matemáticas*, Vol. 35, pp. 17-31.

JOHNSON, T. (2001): *Found Mathematical Objects*, www.entretemps.asso.fr/Seminaire, pp. 1-19.

PASCAL, C. y TOMAS, N. (2000): *Musique et Mathématiques*, TER, Université de la Méditerranée, pp. 1-41.