SUMA 52
Junio 2006, pp. 77-86

iMÁTgenes 25, 26, 27 y última iMATgen

Su mirada recorrió los lomos del estante inferior y se detuvo en un título que le llamó la atención. Lo liberó de la hilera que lo aprisionaba y lo abrió al azar. Al menos eso era lo que pretendía, aunque el libro se abrió por una página señalada con un pliegue en la esquina superior. Quien lo practicó quería señalar un punto con una indicación perenne. Seguro que era cosa de su abuelo, fallecido hacía ya unos cuantos años. Fue precisamente el recuerdo de su muerte lo que le animó a entrar en la biblioteca. No sabía porqué, pero de repente le había venido a la mente la imagen del anciano leyendo ensimismado en aquel sillón antiguo, rodeado de incontables volúmenes, páginas, frases, palabras, letras.

Pasados los años, más maduro y no ya tan 'de Ciencias' como hasta entonces le habían calificado y él mismo se había considerado, se sentía impelido a imitar a su abuelo. Sentía el ansia de leer, pero no sabía qué. Así que se decidió a empezar la lectura de aquella página estigmatizada. Los textos impresos en cada una de las páginas que le ofrecía el libro estaban escritos en idiomas distintos. La página par, la de la izquierda, estaba escrita en inglés; la página impar, la de la derecha, en castellano. Era la esquina superior de ésta última la que estaba doblada. Ambos eran textos breves, con sus títulos destacando unos centímetros por encima de ellos:

FULL OF LIFE NOW
LLENO DE VIDA AHORA

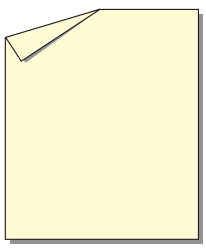
Leyó despacio, saboreando el significado de cada palabra y deteniéndose en los puntos al final de cada frase. No eran muchas, siete tan sólo, que la edición había dilatado hasta ocupar el equivalente a doce líneas. Terminada la lectura se quedó ensimismado sin ser consciente de que estaba llorando. No podía quitarse de la cabeza la última frase del poema:

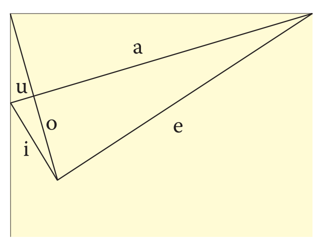
Be it as if I were with you.
(Be not too certain but I am now with you.)
Sé tan feliz como si yo estuviera a tu lado.
(No estés demasiado seguro de que no esté contigo.)

¿Eran las palabras del autor o las de su abuelo? ¿Eran las de Borges, el traductor? Eran las de todos, las de él, lector, también. Y era él, el lector, quien hacía hablar a quien las había escrito. El poema los reunía a ambos, autor y lector. El autor le proclamaba su amistad a través del tiempo y el espacio, aún sin conocerse. ¿Era ese el mensaje que quiso enviarle su abuelo? No se le ocurría canto a la amistad más bello. Jamás lo olvidaría. Y para dar fe de ello se dispuso a hacer otra señal doblando la esquina inferior de la página.

Cuando hubo acabado el dobladillo se fijó en un detalle. Él había plegado la esquina hacia adelante. En cambio, la esquina superior estaba plegada hacia atrás. Siguiendo la dirección imaginaria señalada por aquel vértice oculto, dio la vuelta a la hoja.

Detrás no encontró ningún texto impreso, pero sí algo manuscrito a lápiz. La pestaña doblada estaba perfilada a lápiz sobre aquella página par, al dorso del poema. Deshizo el doble y vio que el pliegue rectilíneo dejado en el papel también estaba resaltado a lápiz trazando el eje de simetría de los dos triángulos rectángulos, el original y el copiado. Y además, también los vértices rectos de uno y otro estaban unidos con un segmento. Junto a cada línea de la figura resultante había escrita una letra: a, e, i, o, u. Todo eso se recogía después en una serie de símbolos y expresiones abstractas que le resultaban familiares:





Miquel Albertí Palmer
imatgenes.suma@fespm.org

$$T(a,e,i) \sim T(e,a-u,o) \Rightarrow \frac{a-u}{e} = \frac{e}{a} \Rightarrow a^2 = e^2 + au$$
$$T(i,o,u) \sim T(a,e,i) \Rightarrow \frac{i}{u} = \frac{a}{i} \Rightarrow i^2 = a \cdot u \Rightarrow a^2 = e^2 + i^2$$

¡Su abuelo había demostrado el teorema de Pitágoras con el pliegue de un papel! Doblando la esquina se creaba un triángulo rectángulo y el segmento que unía el vértice de la página con el vértice del ángulo recto del triángulo copiado en ella determinaba tres triángulos rectángulos semejantes. Bastaba aplicar la proporcionalidad de Tales para llegar al teorema más grande de las Matemáticas. ¡Qué regalo! Su abuelo, a quien todos aquellos que le conocían habían considerado un verdadero hombre 'de Letras' incapacitado para los números le acababa de dar toda una lección. Ya no tenía ninguna duda de quien era el autor de esa demostración. A nadie del ámbito científico se le habría ocurrido jamás nombrar aquellos segmentos con las cinco vocales. ¿Por qué no se le ocurrió una idea tan sencilla a él, el primer aspirante a científico de la familia? Aquella frase volvió a su mente:

Sé tan feliz como si yo estuviera a tu lado.
(No estés demasiado seguro de que no esté contigo.)

¿Era Pitágoras quien le hablaba ahora? ¿Era Tales? La lectura del poema había revivido a Walt Whitman y a su abuelo y en aquella demostración revivían también ('llenos de vida ahora') Tales y Pitágoras. El consejo que tantas veces le dio su abuelo y que él nunca atendió hasta hoy se le revelaba con más fuerza que nunca: 'lee más, calcula menos'. Su abuelo era sabio. Reuniendo a Walt Whitman y a Pitágoras en el anverso y reverso de la hoja de un libro, el bosque del conocimiento, había transformado en poema el teorema. Todo un canto a la amistad de dos campos que hasta hoy él consideraba antagónicos.

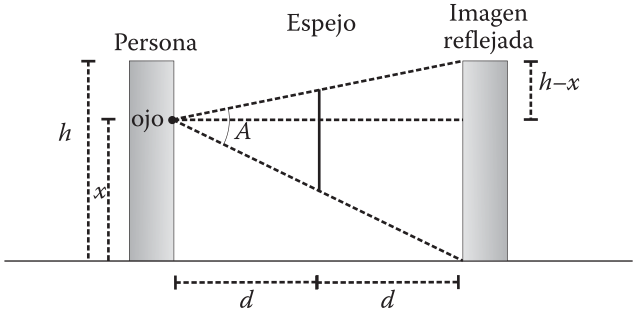
REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

WHITMAN, Walt (1991): *Hojas de Hierba.* Traducción del original de 1855 a cargo de Jorge Luis Borges. Editorial Lumen. Barcelona.

Sobre la iMATgen 22, en la que hablé de espejos de cuerpo y de rostro entero, un lector propone una cuestión interesante: ¿es ciertamente la mitad de la estatura la medida que debe tener un espejo de cuerpo entero o corregirse teniendo en cuenta la disminución del tamaño aparente de las cosas con la distancia?

Pienso que no hay lugar para la discusión porque precisamente se tomaron las visuales (véase la iMATgen 22 en SUMA 51) dirigidas desde el ojo de quien se mira en el espejo hacia su imagen reflejada, de modo que esas visuales representan ya la manera en que el reflejo es percibido por el sujeto y, por tanto, la disminución del tamaño en la distancia ya está considerada en el ángulo determinado por esas visuales.

Ese ángulo A no será la mitad del ángulo con el que se abarca la estatura completa del individuo. Su valor exacto puede calcularse conociendo h (estatura del sujeto), x (estatura ocular) y d (distancia a la que éste se sitúa del espejo):



$$A = \arctan\left(\frac{x}{2d}\right) + \arctan\left(\frac{h-x}{2d}\right) = \arctan\left(\frac{2hd}{4d^2 - x(h-x)}\right)$$

Pero ésta es una modelización geométrica muy simplificada de la realidad. Si consideramos como parte del cuerpo entero la punta de los pies, cabe preguntarse cuánto cambiaría la situación si sus puntas se adelantaran una distancia p por delante de la vertical de la visual. En tal caso el ángulo A no sería suficiente y necesitamos un espejo algo mayor que la mitad de nuestra estatura. El lector sabrá averiguar cuánto.

En la iMATgen 23 nos planteamos cuánto sobraba del mantel que cubría una mesa. Sin un análisis físico de la situación que tenga en cuenta la flexibilidad de la tela con la que está fabricado el mantel y la forma en que lo domina la fuerza de la gravedad no podemos comprender el problema en toda su amplitud. El de la Física es un aspecto que siempre hay que considerar al relacionar las Matemáticas con la realidad o estudiar fenómenos reales.

¿Qué sucede si dejamos caer un mantel circular encima de un palo vertical de modo que el extremo de éste coincida con el centro de aquel? ¿Se generan dos, cuatro o seis pliegues? ¿Hasta qué punto eso depende del radio del mantel? Y, en el caso general, ¿cuál sería la relación entre le número par de pliegues y la proporción entre los diámetros del mantel y de la mesa que cubre?

La iMATgen 24 nos llevó a una playa cuyo perfil puede modelizarse matemáticamente como una curva fractal. A continuación voy a hablar de otro perfil del mar. El que determinan el agua y el aire que flota encima de ella.

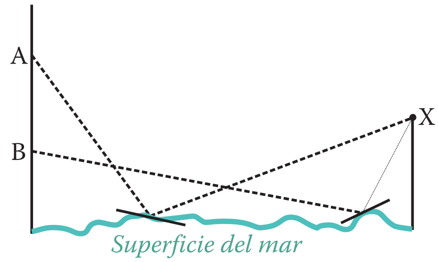
iMATgen 25

Seis barcos, cuatro veleros y dos yates, atracados en un muelle del *Port Vell* de Barcelona. Paseando por la pasarela de madera que se adentra en el mar me quedé prendado por las formas caprichosas de los reflejos de esos mástiles, burdas y obenques sobre la superficie del agua ligeramente agitada. Una algarabía de líneas virtuales que el oleaje transforma en cada instante.

¿Puede el reflejo de un segmento continuo y rectilíneo como es un mástil romperse en pedazos? ¿Pueden estos cruzarse entre sí o con los de otros mástiles? ¿Cuál es la causa de algún reflejo circular? ¿Se corresponden los extremos de las líneas de la parte inferior de las fotografía con los extremos de los mástiles? ¿Cómo comprender la imagen sin entender todo eso? Estamos tan acostumbrados a ver la superficie del agua en calma como un espejo que es muy probable que basemos en este esquema la interpretación de la imagen. En esa situación la reflexión es una función continua, derivable y biyectiva en la que cada punto del original se corresponde con uno de su reflejo. Pero este esquema no explica reflejos como los de la fotografía.

Un punto *P*, el punto *Q* de la superficie que lo refleja y el punto *R* desde el que se ve el reflejo determinan un plano que llamaré *plano de reflexión*. Si el mar no está demasiado agitado como sucede aquí, la intersección del plano de reflexión de un punto del mástil con la superficie del agua será una línea ondulada continua y derivable compuesta por una serie de concavidades y convexidades que actúan como pequeños espejos cóncavos y convexos.

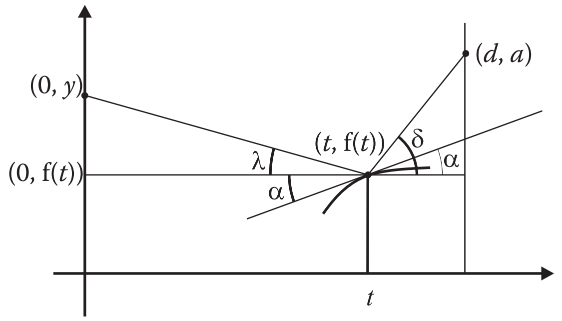
Sin ningún tipo de oleaje, el mar es un espejo y el mástil reflejado se verá invertido, boca abajo. Sin embargo, las concavidades y convexidades del oleaje dan lugar a situaciones como la representada en la figura siguiente. La reflexión percibida por el observador en *X* no será una imagen virtual invertida del segmento *AB*, sino directa:



Además, los reflejos de espejos cóncavos y convexos dilatan y contraen lo que reflejan, por lo que partes del mástil se percibirán más extensas que otras aún cuando tengan la misma longitud. También es posible que diferentes reflejos de un mismo punto converjan en la misma posición del ojo del observador, por lo que, además de romperse la continuidad y el orden, se rompe también la correspondencia biunívoca entre cada punto y su reflejo. Y si tenemos en cuenta que, en realidad, los valles y crestas de la figura anterior no son sólo concavidades y convexidades de una curva bidimensional sino de una superficie tridimensional, nos daremos cuenta de que sus reflejos no sólo se sucederán longitudinalmente, también transversalmente. De ahí que el plano de reflexión no sea siempre vertical, sino que puede estar inclinado. Esto hará que un punto o fragmento del mástil sea transformado en un arco transversal o, incluso, un anillo. He ahí la causa de los zigzagueos a izquierda y derecha en los reflejos de la imagen.

Sea *XY* un sistema de coordenadas en el plano de reflexión de un mástil situado en un intervalo positivo del eje de ordenadas. Supongamos que el ojo del observador está en el punto *(d, a)*, es decir, a una distancia $d>0$ del mástil y a una altura

a>0 sobre el nivel del mar representado en el intervalo [0, d] del eje de abcisas. Supongamos que el oleaje es una función continua y derivable (t, f(t)) para $t\in$ [0, d]. Entonces el ángulo de incidencia del rayo de luz que sale de un punto (0, y) del mástil sobre la curva (t, f(t)) será igual al ángulo de reflexión dirigido hacia el ojo del observador. Ambos ángulos se forman sobre la tangente a la curva en el punto (t, f(t)) correspondiente:



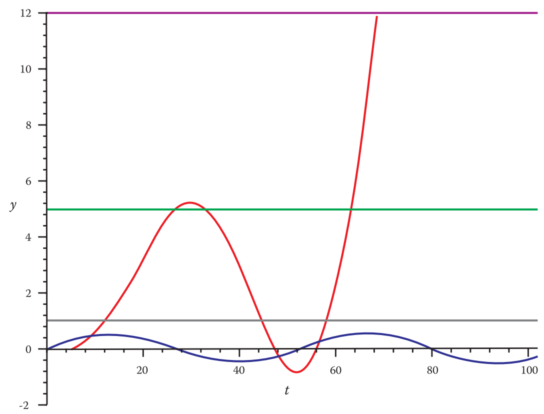
En tales condiciones podemos afirmar que: $\alpha+\lambda=\delta-\alpha$. Por tanto, $2\alpha=\delta-\lambda$. Además, tg(α)=f '(t). Gracias al cálculo trigonométrico:

$$tg(\lambda)=\frac{y-f(t)}{t} \quad \text{y} \quad tg(\delta)=\frac{a-f(t)}{d-t}$$

Siendo P(0, y(t, a)) el punto del eje de ordenadas cuyo reflejo por el punto $Q(t)$=(t, f(t)) del oleaje es visible desde R=(d, a) y utilizando las igualdades trigonométricas que relacionan la tangente de una suma de ángulos con las tangentes de cada uno de ellos, podemos escribir:

$$y(t,a)=f(t)+t\cdot\frac{\left(1-f'(t)^2\right)\left(a-f(t)\right)-2f'(t)(d-t)}{2f'(t)\left(a-f(t)\right)+\left(1-f'(t)^2\right)(d-t)}$$

Así sabemos qué puntos del mástil corresponden a los reflejos percibidos desde nuestra posición. Imaginemos un mástil de 11m. erguido sobre una embarcación cuya cubierta se encuentra 1m. por encima del nivel del mar y que se observa desde d=100m. y a una altura a=5m. La superficie del agua se agita según $f(t)$=0.5sin(0.12t), $t\in$ [0, d]. Todo esto se representa en la figura siguiente junto con la función y(t, a=0.05) correspondiente. La línea magenta corresponde al extremo del mástil; la línea verde a la altura de los ojos del observador; la línea gris es la altura de la cubierta del velero sobre el que está fijado el mástil; la curva azul es el oleaje; la roja, es y(t, a=5):



Los reflejos visibles del mástil se reducen a la parte de y(t, a=5) que queda por encima del nivel 1 , o sea, los intervalos [12, 44] y [57, 68], aproximadamente. En el primero, el recorrido de y(t) va desde 1m., la base del mástil sobre el barco, hasta un valor máximo (5.4m. aprox.) en t=31, para decrecer después y volver al nivel 1m. Esto significa que el reflejo visible será continuo en este intervalo, pero constituido por la conexión de dos reflejos distorsionados del mismo fragmento del mástil (sus 5,4–1=4,4 m inferiores): el primero, invertido; el segundo, directo; aquel más extenso que éste último. Más allá, en el intervalo [57, 68] el reflejo abarca el mástil entero.

Una brisa agita levemente la superficie del mar en un suave (derivable) oleaje aparentemente inofensivo que, sin embargo, retuerce, contrae, estira y rompe lo que de contínuo y rectilíneo hay en la realidad que refleja. Todo enredado en un galimatías de ***Segmentos a la deriva***.

Había quedado ahí, justo delante del café *Zurich*, en la *Plaça de Catalunya*, con un grupo de alumnos de primer curso de bachillerato y con un profesor que los acompañaría desde Sabadell. Les esperaba para asistir a una charla-taller organizada por la UB sobre *Estadísticas curiosas*. Pero lo más curioso fue lo que vi esta mañana, ahí, de pie, junto al bar más popular de toda Barcelona.

Llegué pronto, pero no me senté para tomar nada en la terraza. En lugar de eso pasé la mirada por las portadas de los periódicos del quiosco, pero tampoco compré ninguno. En el metro ya me había hecho con un ejemplar de un periódico gratuito. El café *Zurich* no es el de antes aunque se llame como se llamaba. Hace unos años derribaron casi por completo esa manzana de casas para construir en ella un centro comercial: *El Triangle*. Su nombre deriva de la forma de la planta de esa manzana, pero no será este el motivo de mi interés por la imagen. Lo único que se mantuvo, lo único que se reconstruyó, si es que puede decirse así, fue el café *Zurich*. Además de conservar algunos detalles arquitectónicos y decorativos, también se han mantenido en el café los camareros y su clientela, siempre la misma y siempre cambiante como el oleaje. Se supone que mucho de lo que hay ahora es lo mismo que había antes, y es verdad porque lo fundamental de ese lugar es la gente y no su arquitectura.

Pocos serán quienes viviendo o habiendo visitado Barcelona no se hayan citado alguna vez en el café *Zurich*. ¿Cuántas veces habré quedado allí con alguien? Como la cita que tenía esa mañana de octubre del año pasado. Al cabo de un rato de sentirme aburrido y de deambular como un felino enjaulado escudriñando los rostros que emergían del metro esperando reconocer a alguien, acabé por descansar la espalda sobre la baranda de las escaleras de acceso al metro. Entonces levanté la vista, contemplé las nubes que pasaban perezosas y me quedé contemplando esa fachada blanca que se levanta encima del *Zurich*.

Me pregunté también cuántas veces habría estado ahí dentro, en la *FNAC*, buscando libros y discos que llevarme a casa. Ahí compré *Los Diez Libros de Arquitectura*, de Vitruvio, y *Canto*, una joya sonora de *Charles Lloyd*. Y fue en ese momento que vi lo que va a constituir el tema de esta iMATgen. Dos columnas de ventanales alargados se abren en la fachada. Los de la izquierda formados por siete cristales, los de la derecha por cinco. Por tanto, aunque no sepamos cuáles son sus longitudes con exactitud, podemos conocer su proporción mediante la cantidad de cristales que los forman, es decir, 7:5. Mi sorpresa fue grande cuando quise tomar como unidad de longitud las losetas que embaldosan la fachada.

Los ventanales de la izquierda tienen una longitud de diez losetas; los de la derecha, siete. El observador tiende a pensar que esas losetas y todas las que teselan la fachada son iguales, pero no es así. A simple vista se aprecia que las dos losetas intermedias entre las dos columnas de ventanas son un poco más anchas que las demás. En cambio, las adosadas a las ventanas sí que parecen idénticas, tanto como sus cristales.

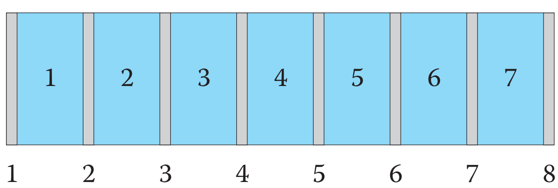
Entonces, y puesto que las ventanas de la izquierda tienen una longitud de diez losetas y las de la derecha siete, podemos concluir que la proporción de longitudes, tomando como unidad de medida una loseta, será 10:7. Uno espera que las dos proporciones obtenidas para los mismos elementos sean la misma. Es decir, que la proporción entre el número de cristales de las ventanas de cada lado y la proporción entre la cantidad de losetas junto a ellas coincidan. Sin embargo, y aunque por poco, no es así:

$$\frac{10}{7}=\frac{7}{5}\Leftrightarrow 50=49$$

La diferencia está en:

$$\frac{10}{7}-\frac{7}{5}=\frac{50-49}{35}=\frac{1}{35}$$

Esta pequeña fracción nos dice que los cristales de cada ventana y las losetas junto a ellos no pueden ser iguales todos a la vez. Si los cristales son iguales, las losetas son distintas. Y al contrario, si éstas son iguales, aquellos son diferentes. Si fuesen diferentes las losetas y cada una de las que flanquean el ventanal derecho tuviese una longitud de 35cm, las del ventanal izquierdo medirían 36cm, ya que (36–35)/35=1/35. Si los cristales fuesen los distintos y cada uno de los de la derecha midiese 70cm, los de la izquierda medirían 72cm, ya que (72–70)/70=1/35. En ambos casos obtenemos resultados de uno y dos centímetros difíciles de percibir visualmente. Podríamos sospechar que, tal vez, la cuestión estuviese en los marcos. Los cristales de las ventanas los tienen; las losetas, no. La ventana de siete cristales tiene ocho; la de cinco tiene seis.



Llamando x a la longitud del cristal e y a la longitud del marco, la longitud del ventanal izquierdo sería $7x+8y$, y, la del derecho, $5x+6y$. Para que las proporciones continúen conservándose:

$$\frac{7x+8y}{10}=\frac{5x+6y}{7}\Leftrightarrow 49x+56y=50x+60y\Leftrightarrow 0=x+4y$$

Imposible, ya que tanto x como y deben ser valores estrictamente positivos. Luego no hay medidas reales posibles para x ni para y que permitan dicha proporción y nos quedamos con la conclusión anterior: una de dos, o bien los cristales de cada ventanal son distintos, o bien son distintas las losetas blancas que los rodean. En las condiciones reales y prácticas de las dimensiones de la fachada esta diferencia de sólo 1/35 es inapreciable a simple vista. Sólo la reflexión matemática la detecta.

Las sorpresas no acaban aquí. En la parte que queda oculta en la fotografía, a la izquierda de esta fachada, pero correspondiente también al mismo edificio, hay otros ventanales de cuatro cristales flanqueados por seis losetas blancas. Esto da una ratio de 6:4. Igual que antes, sus cristales y losetas parecen iguales al resto de los elementos de la fachada, pero tampoco ahora es así:

$$\frac{6}{4}-\frac{10}{7}=\frac{2}{28}=\frac{1}{14}$$

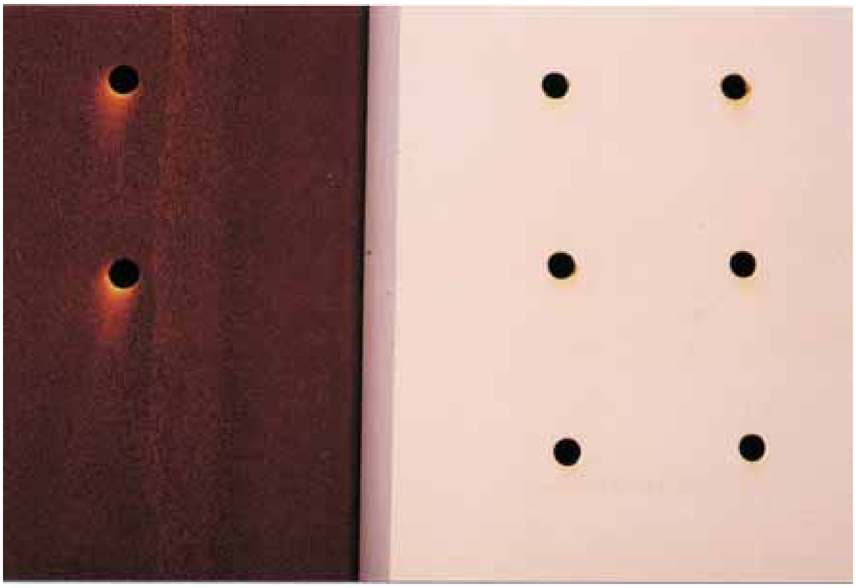
$$\frac{6}{4}-\frac{7}{5}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

En este caso las diferencias no son tan pequeñas, 1/14 y 1/10, pero, pese a todo, también son difíciles de apreciar visualmente desde la distancia.

Para elaborar esta iMATgen he vivido algo que siempre ha caracterizado al desarrollo de conocimiento matemático: no tener prisa y disponer de tiempo para reflexionar. Ya había estado en ese lugar muchas veces antes, pero nunca había tenido o no me había tomado el tiempo necesario para contemplar con calma esa fachada. Es la actitud del extranjero, propia del visitante recién llegado que se fija en todo porque lo que ve le parece distinto de lo que ya conoce. Lamento ahora no haberme fijado más en la fachada anterior a ésta. ¿Contenía algún secreto? ¿Eran antes tan caprichosos los arquitectos como parecen serlo hoy?

No me importó que mi colega y nuestros alumnos llegaran con bastante retraso. Se disculparon, pero yo les aseguré que no me había importado lo más mínimo esperarles. Mientras nos encaminábamos hacia la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Barcelona yo continuaba reflexionando ***Sobre el café Zurich***.

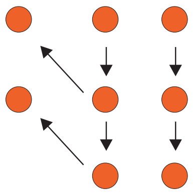
iMATgen 27



Varios agujeros separados por una sombra vertical cuya distribución recuerda la de los puntos de una ficha del *Dominó*. Los de la izquierda ribeteados de óxido, los de la derecha contrastantes sobre un fondo claro. ¿En una mesa, en una pared, en una puerta metálica? Son perforaciones ornamentales practicadas en la chapa metálica de una farola de diseño vanguardista. Las que están a la izquierda de la separación vertical realizadas en una parte de la chapa sin pintar, por eso el óxido a su alrededor; las otras, a la derecha, realizadas en la parte pintada, con perfiles más limpios.

A mis alumnos les pregunté qué les sugería la fotografía. Entre sus respuestas había manchas, círculos y fichas de *Dominó*, pero nadie me habló de que, fuesen lo que fuesen, eran ocho. Cuando les hice esta observación algunos se rieron. Les pareció algo tan simple y obvio que ni siquiera habían considerado oportuno mencionarlo. ¿Puede alguien contemplar esta fotografía sin evocar mentalmente números como el dos, el tres, el seis y, sobretodo, el ocho? ¿Cómo se concreta este ocho que mis alumnos tacharon de evidente? En esto consiste comprender la imagen.

Una alumna, reflexionando más sobre la fotografía, dibujó lo siguiente:



La iMATgen se fragua al preguntarnos cómo concebimos estas ocho unidades. ¿Qué interpretación podemos deducir de la 'lectura' que hizo esa alumna a partir de su gráfico? De entrada, se diría que leyó de derecha a izquierda. A partir de ahí, veo dos posibles o muy probables interpretaciones. Una, que obtuviese el ocho como tres veces dos agujeros horizontales (h) de la derecha (d) más otros dos agujeros verticales (v) de la izquierda (i): $8=2dh{\cdot}3+2iv$. La otra, que considerara la parte derecha como dos columnas de tres unidades cada una y, por tanto, el ocho surgiese como: $8=3dv{\cdot}2+2iv$. Matemáticamente, ambas opciones son equivalentes, y no sólo entre ellas, también son equivalentes a muchas otras. Todo depende de cómo efectuemos las asociaciones, ya sea leyendo la imagen de izquierda a derecha (→) o de derecha a izquierda (←), agrupando agujeros vertical (v) u horizontalmente (h) y teniendo muy en cuenta la separación vertical y los fondos de distinta textura que determinan dos grupos, el de la izquierda (i) y el de la derecha (d).

La separación vertical es tan clara que de ella se derivan las interpretaciones más plausibles para las seis unidades o agujeros de la derecha:

$$6d = \left| \begin{array}{l} 2h \cdot 3 \\ \\ 3v \cdot 2 \end{array} \right.$$

Otras interpretaciones para estas seis unidades son de más difícil justificación psicológica porque distinguen cosas que no se ven distintas, como por ejemplo: 1+5. Éstas son interpretaciones a 'posteriori' que no hay que denostar, sino potenciar desde la perspectiva de la educación matemática, ya que en un problema matemático estos sinónimos pueden ser de gran utilidad.

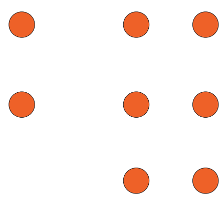
Las interpretaciones más plausibles para los dos agujeros de la parte izquierda son:

$$2i = \left| \begin{array}{l} 2v \\ \\ (3-1)v \end{array} \right.$$

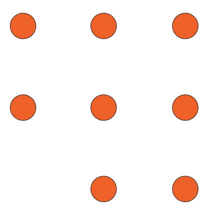
Este último caso es diferente. El $2i$ no aparece como resultado de la suma o cómputo de lo que hay, sino de lo que falta. Es la diferencia entre un 'todo' inferido por la forma de lo presente, un todo más extenso del que el presente se constituye en una parte o fragmento.

Pero el ocho no se genera mientras no seamos capaces de ver la imagen entera como un 'todo' aún mayor, olvidándonos de la barra de separación. Es al identificar rasgos comunes a ambos lados de la separación que la suma del 2 y el 6 cobra sentido en una unidad mayor y se crea el ocho. Teniendo en cuenta que podemos leerlo en uno u otro sentido, tanto de derecha a izquierda como de izquierda a derecha, y que podemos combinar estas dos posibilidades con las dos para el *6d* y con las otras dos del *2i*, tenemos hasta 2·2·2=8 posibilidades como las más plausibles para la interpretación del ocho.

La cosa no acaba aquí. Una vez visto el ocho como un todo y nos hemos liberado de la separación vertical lo que llama la atención es la forma configurada por esos ocho agujeros:



Ahora se hace evidente la ausencia de una unidad con la que completar ese ocho en otro 'todo' nuevo y más amplio, tanto figurativa como cuantitativamente: $3h \cdot 3v - 1$ ó $3v \cdot 3h - 1$. Así se crea el ocho como diferencia: $8=9-1$, lo que facilita aún otra interpretación ligeramente distinta basada en la homogeneidad figurativa que perfecciona esa distribución rectangular en una cuadrada por lo que $8=3^2-1$:



Las posibilidades se multiplican. Al leer hacia la derecha el primer 2 es vertical, cosa que no ocurre al leer en sentido opuesto, donde podemos optar entre ver tres grupos de dos unidades horizontales o dos grupos de tres verticales. De cualquier modo, se pone de manifiesto la relación entre los procesos de percepción visual y de lectura con las propiedades asociativa y conmutativa de la suma y del producto de números naturales. Matemáticamente, muchas más interpretaciones del 8 podrían sumarse a éstas, como 2+1+5 o 4+1+3, pero no resultarían tan coherentes con la imagen. ¿Son las anteriores equivalencias algebraicas transferibles al ámbito psicológico? ¿Concebimos las cosas así, de la manera en que matemáticamente se relacionan esos números enteros? ¿Es más inmediato percibir los 8 agujeros como 2+3·2 que como 3·3–1? ¿Se percibe antes lo que hay que lo que falta? Depende del intérprete y, al mismo tiempo, una posibilidad no excluye la otra. La educación matemática debe barajar todas las posibilidades fomentando la interpretación múltiple.

La última de las interpretaciones anteriores incita al matemático a preguntarse si el ocho se relaciona siempre de ese modo con los cuadrados de los números naturales:

$$\begin{array}{c} 3^2-1=8=1\cdot 8 \\ 4^2-1=15=3\cdot 5 \\ 5^2-1=24=3\cdot 8 \\ 6^2-1=35=5\cdot 7 \\ \text{etc.} \end{array}$$

Parece que si se resta una unidad del cuadrado de un impar, el resultado es múltiplo de ocho; y que si se resta del cuadrado de un par, se obtiene un producto de impares consecutivos. De hecho, los productos de pares consecutivos se ocultan en los múltiplos de ocho: 8=2·4, 24=4·6, 48=6·8, 80=8·10, etc. Llegamos a una conjetura:

Si n **N** es impar, n^2-1 es múltiplo de 8 y producto de dos pares consecutivos.
Si n **N** es par, n^2-1 es producto de dos impares consecutivos.

En efecto, si n es par: $n=2\cdot k$ (k **N**) y entonces tenemos $n^2-1=4k^2-1=(2k+1)\cdot(2k-1)$. Luego n es producto de dos impares consecutivos. Si n es impar, $n=2k-1$ (k **N**) y entonces $n^2-1=(2k-1)^2-1=4\cdot k\cdot(k-1)$. Pero $k-1$ y k son consecutivos, por lo que uno de ellos es par. Luego $k\cdot(k-1)$ es par y por tanto $4\cdot k\cdot(k-1)= n^2-1$ es múltiplo de 8. La conjetura se ha hecho teorema.

Habrá quienes vean en esta iMATgen una aplicación de las propiedades asociativa y conmutativa de la suma de números enteros y consideren que son estas propiedades las que justifican el ocho. Yo opino lo contrario. Estas propiedades no son la causa, sino el efecto de nuestra interpretación de la realidad. Es a partir de la manera en que aprehendemos esos agujeros de la que se derivan las propiedades que dan lugar a fenómenos que necesitamos considerar iguales, independientes del orden en que se agrupan sus partes. No son las Matemáticas las que explican la imagen, es la imagen la que explica las Matemáticas. Una auténtica **Anti iMATgen del ocho**.

Última iMATgen

Sentado en la mesa de un bar del *Barrio Alto* lisboeta repaso mentalmente la jornada. He empezado tomando un tranvía para subir a la *Alfama* y perderme por sus calles viejas de fachadas desvencijadas, portones carcomidos, ancianas acarreando cestas medio vacías y gatos sentados en los alféizares imitando a sus amas en la contemplación del exterior. Tras un breve encuentro con un pavo real en los jardines del castillo de *San Jorge* he deshecho a pie el camino recorrido para bajar hasta la plaza del *Comercio*. Allí he tomado la fotografía.

En Lisboa se han ambientado novelas y películas. En *El invierno en Lisboa* Antonio Muñoz Molina narra el final de Santiago Biralbo, pianista de jazz; en *En la ciudad blanca* acaba la relación entre su protagonista, un marinero (Bruno Ganz), y su mujer. Aunque, bien pensado, tal vez su relación no acabase allí, sino que quizá fuese precisamente allí, en Lisboa, donde verdaderamente comenzó a ser sincera.

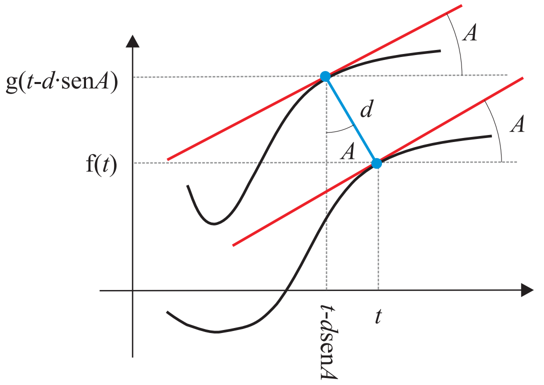
Sólo he visitado una vez Lisboa y pese a los elogios que le dedican algunos amigos míos, quienes valoran su melancolía y decadencia, a mi me pareció triste, vacía, el punto final de un trayecto, el 'se acabó' de una novela, de una película, el adiós de Europa. La imagen ilustra esa idea. Varios transeúntes regresando a casa tras una jornada de trabajo. Los últimos pasajeros del último autobús, recién apeados en la última parada, atravesando la plaza vacía de la estación. Lisboa es así, abierta a las aguas dulces del Tajo y a la mar salada del Atlántico, pero también cerrada sobre sí misma, sobre su pasado glorioso de calles estrechas y sinuosas, colina arriba, colina abajo. Ahí reside la Lisboa que atrae al viajero, en las huellas perennes de una gloria exagerada, moviéndose al ritmo de las curvas de los tranvías.

Donde estoy empieza a sonar, suave pero inexorable, una guitarra eléctrica. Reconozco ese sonido, esas notas, esa voz que abre el tema:

This is the end,
Beautiful friend
This is the end,
My only friend, The end ...

Canta Jim Morrison. El paralelismo con lo que siento es genial, pero hubiese preferido otra cosa para animarme un poco. Mientras dura la canción no puedo quitarme de la cabeza la imagen de unos raíles avanzando hacia un horizonte desconocido. El convoy traza curvas vertiginosas a izquierda y derecha mientras sube y baja como un tobogán. Mis ojos puestos en las dos líneas metálicas relucientes en el suelo. Su final no llega. Acabado el tema mis pensamientos vuelven donde estaban para preguntarme cómo comprender la imagen sin saber cuál es la naturaleza de esas curvas paralelas. ¿Qué las asemeja o distingue de un par de rectas paralelas? *This is the end, my friend*. En efecto, este es el final de la *Sección*, amigo lector, la última parada, la última iMATgen. No quiero abandonarla sin antes cantar al paralelismo que delimita la calzada de cualquier camino y del que algunos detalles anticipé en otras iMÁTgenes sin dar explicaciones.

Primero estudiemos el caso correspondiente a una curva funcional $(t, f(t))$ en el plano XY. ¿Cómo se relaciona con su paralela a una distancia d? La normal en cada punto a la curva original debe ser también normal a la paralela y todos los segmentos que dichas normales comunes determinan deben tener la misma longitud. El *quid* de la cuestión está en la pendiente en cada punto:



Las pendientes en puntos homólogos de ambas curvas deben ser iguales. Luego:

$$f'(t)=g'(t-d\cdot\sin A)$$

Además, como se puede apreciar en la figura anterior: $g(t-d\cdot\sin A)=f(t)+d\cdot\cos A$. Teniendo esto en cuenta y también que $\operatorname{tg}A=f'(t)$, esas igualdades proporcionan una parametrización $(x(t), y(t))$ de la paralela a $(t, f(t))$ a una distancia d:

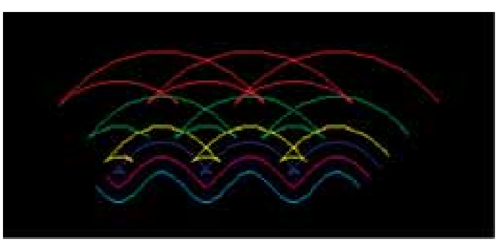
$$x(t)=t-d\sin A=t-\frac{d\cdot f'(t)}{\sqrt{1+f'(t)^2}}$$

$$y(t)=f(t)+d\cdot\cos A=f(t)+\frac{d}{\sqrt{1+f'(t)^2}}$$

En una curva expresada en forma paramétrica, $(u(t), v(t))$, la pendiente en cada punto vale $\operatorname{tg}A=v'(t)/u'(t)$. Su paralela $(x_d(t), y_d(t))$ a distancia d será:

$$\begin{cases} x_d(t)=u(t)+d\cdot\sin\left(\operatorname{arctg}\dfrac{v'(t)}{u'(t)}\right) \\ y_d(t)=v(t)-d\cdot\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{v'(t)}{u'(t)}\right) \end{cases}$$

Véanse varias paralelas a la gráfica de $f(t)=\sin t$ para diferentes distancias: d=0 (aguamarina), d=1 (lila), d=2 (azul), d=3 (amarillo), d=5 (verde) y d=8 (rojo):



¡Las paralelas pueden cortarse unas a otras y también a sí mismas! No sucedía esto con las rectas paralelas. Precisamente en ellas el hecho de no tocarse nunca constituía un aspecto tan fundamental que era usado como sinónimo de paralelismo. Así lo recoge el diccionario: 'paralelo,la: Aplíquese a las líneas o planos equidistantes entre sí y que por más que se prolonguen no pueden encontrarse' (DRAE, 1992, p.1527). Esta definición es válida para las líneas rectas, pero insuficiente para líneas curvas y superficies que no sean planas. Otra cosa que queda clara en la figura anterior es la esencia circular del paralelismo. Las curvas paralelas están hechas de arcos que comparten los mismos centros.

Los raíles del tranvía de la imagen no se cruzarán como los de la figura, aunque teóricamente podrían hacerlo para desespero y riesgo de sus pasajeros, quienes percibirían fuertes sacudidas en las esquinas y vaivenes que se crearían. Esa posibilidad queda pues reservada a las ***Curvas heterónimas*** de los bordes de un camino.

Lisboa es un lugar donde terminan los caminos, pero en el que, sin embargo, justo antes del fin, los caminos se rebelan contra su destino retorciéndose en curvas y nudos. Es su último intento de posponer el trance. Mientras dura esa demora el visitante que recorre esos caminos crea sus propios paralelismos para aliviar el cansancio, la soledad y la tristeza que sucede a la llegada a la meta, antesala de lo irremediable. No hablo de absurdos, sino de realidades dignas de los más grandes poetas y filósofos. Fue precisamente *Alberto Caeiro*, heterónimo de Fernando Pessoa, quien arremetió contra quienes pretenden aprehender la realidad con los números. Tal vez la tristeza de esta despedida no esté en la despedida misma, sino en la cruda certeza del poema de *Caeiro* sobre imágenes y números[1].

Una hilera de árboles a lo lejos, allá en la ladera.
Pero, ¿qué es una hilera de árboles? Árboles, solamente.
Hilera y el plural árboles no son cosas, son nombres.
¡Tristes de las almas humanas que todo lo ordenan
y trazan líneas entre cosa y cosa
y colocan letreros para nombrar árboles absolutamente reales
y dibujan paralelos de latitud y longitud
sobre la propia tierra inocente, más verde y florida que todo eso!

NOTA

1 *Um renque de árvores lá longe, lá para a encosta. / Mas o que é um renque de árvores? Há arvores apenas. / Renque e o plural árvores não são cousas, são nomes. / Tristes das almas humanas, que põem tudo em ordem, / Que traçam linhas de cousa a cousa, / Que põem letreiros com nomes nas árvores absolutamente reais, / E desenham paralelos de latitude e longitude / Sôbre a própria terra inocente e mais verde e florida do que isso!* Fernando Pessoa en palabras y en imágenes. Segunda edición del número doble 7 y 8 de la revista Poesía. Ediciones Siruela. Madrid 1995.