SUMA 51
Febrero 2006, pp. 99-105

De cabeza

El azar y sus problemas

El incierto mañana nunca nos pertenece
Goza del hoy. Y bebe a la luz de la luna,
de esa luna que en vano, milenio tras milenio,
nos buscará fielmente para darnos su brillo

Omar Jayyam

Contamos en este número con la inestimable colaboración de Santiago Fernández, responsable de la magnífica revista de matemáticas SIGMA, asesor de matemáticas del centro de profesores de Bilbao, autor de libros de historia de las matemáticas, agudo articulista y hombre cabal y entrañable, que nos plantea unos retos que tienen sus raíces en los orígenes de la matematización del azar. Un viaje en el tiempo para pasar un rato agradable con Pascal y Fermat.

Antonio Pérez Sanz

Estamos en la Francia del siglo XVII. Su sociedad gira en torno a una vigorosa monarquía. Allí viven grandes pensadores y literatos: Descartes, Fermat, Pascal, Moliere, Racine, etc. Los juegos de dados, cartas y tableros con fichas son los entretenimientos más frecuentes. Pero, los juegos, cada vez más complicados, y las apuestas cada vez más elevadas crean la necesidad de calcular sus probabilidades de manera racional.

Uno de los cortesanos del rey Luis XIV, llamado Antoine Gombauld, señor de Baussay, y más conocido con el sobrenombre de caballero De Méré, es un apasionado por el juego de los dados y las cartas, considerado como un jugador profesional, además de ser un hombre ilustrado e inteligente. Su ambición por mejorar los resultados en los juegos que él participa le llevan a plantearse una serie de preguntas que no

> Un problema sobre juegos de azar propuesto a un austero jansenista por un hombre de mundo fue el origen del cálculo de probabilidades.
>
> *Siméon-Denis Poisson (1781-1840)*

Santiago Fernández Fernández
Asesor de matemáticas del Berritzegune de Bilbao
santiagofer@berritzeguneak.net

sabe resolver. Busca aliados para resolver sus dudas, un amigo suyo, el duque de Roannez, le sugiere proponer tales cuestiones a un personaje de mente sagaz y penetrante: Blaise Pascal.

La historia es más o menos la siguiente: durante cierto viaje en carruaje, hacia el año 1652, camino de Poitou, el espiritual Pascal coincide con el mundano A.Gambauld (caballero de Méré) y sus amigos: el duque de Roannez y Damien Mitton. Al calor de la conversación el caballero propone sus cuestiones al joven Pascal. El primero de los problemas estaba enunciado, en los siguientes términos:

PROBLEMA 1: Se lanzan n veces dos dados cúbicos. Calcular el número de veces que es preciso lanzar los dados para apostar con ventaja al suceso de obtención del seis en los dos dados.

Meré le hace saber a Pascal que para él dos respuestas son posibles: 24 y 25. La primera obtenida mediante una regla teórica y la segunda mediante su experiencia de jugador profesional. Posteriormente le plantea otro problema que ya Luca Pacioli y Girolamo Cardano habían planteado un siglo antes, conocido como el problema *des partis* o *del reparto*.

Blaise Pascal, (1623-1662)

Pierre Fermat, (1601- 1665)

El problema en cuestión era el siguiente:

> **PROBLEMA 2: Dos jugadores deciden interrumpir el juego antes del término convenido; ¿cómo deberán repartirse las cantidades apostadas, según el progreso de la partida, para que dicho reparto sea justo?**

Durante dos años Pascal ponderó las cuestiones, especialmente la segunda, y finalmente comunicó sus resultados al jurista francés Pierre Fermat. En una de las primeras cartas, de la extensa correspondencia matemática que mantuvieron a lo largo de dos años, Pascal narra a Fermat el encuentro con De Méré y le hace saber cómo ha resuelto el problema del reparto en la partida interrumpida:

> He aquí aproximadamente como lo hago para saber el valor de cada una de las partidas cuando dos jugadores juegan, por ejemplo, en tres partidas, y cada uno ha puesto en el juego 32 monedas. Supongamos que el primero tenga dos y el otro una; ahora juegan una partida cuya suerte es que, si el primero la gana, gana todo el dinero que está en juego, a saber, 64 monedas; si el otro la gana, son dos partidas contra dos partidas, y por consiguiente, si quieren separarse, es preciso que retiren cada uno lo que han puesto, a saber, 32 monedas cada uno. Considerad, señor, que si gana el primero, le pertenecen 64; si pierde, le pertenecen 32. Ahora bien, si no quieren arriesgar esta partida y separarse sin jugarla, el primero debe decir: "estoy seguro de tener 32 monedas, porque la pérdida misma me las da; pero para las otras 32, quizá las tendré yo, quizás las tendréis vos; el azar es igual repartamos, pues, estas 32 monedas, mitad por mitad, y me dais, además de éstos las 32 monedas que me corresponden con seguridad". Tendrá, pues, 48 monedas y el otro 16.

La carta concluye con una frase muy conocida

> El caballero Meré tiene mucho talento, pero no es geómetra; esto es, como sabéis un gran defecto.
>
> *Carta De Pascal a Fermat*,20 de julio1654

Casi al unísono Fermat resolvió el problema por *un* método completamente distinto, lo cual fue para Pascal muy estimulante. *Ya ve*, escribió Pascal, *que la verdad es la misma en Toulouse que en París.*

A lo largo de la correspondencia puede verse no sólo la evolución de los problemas sino la admiración creciente de Pascal por el ingenio de Fermat, como lo demuestra la siguiente carta:

> Señor:
>
> Su última carta me ha satisfecho a la perfección. Admiro su método para los lotes, tanto más porque lo comprendo bien; es enteramente suyo, no tiene nada en común con el mío, y llega fácilmente al mismo resultado. Nuestra comprensión se ha establecido.
>
> Pero Señor, si en esto he competido con Vd., deberá buscar en otra .parte quien le siga en sus intervenciones numéricas, cuyos enunciados me ha hecho Vd. el honor de enviarme. Le confieso que esto me sobrepasa ampliamente; sólo soy capaz de admirarlas y le suplico humildemente que dedique su primer momento libre a concluirlas. Todos nuestros amigos las vieron el sábado pasado y las apreciaron de todo corazón: no es fácil soportar la espera de cosas tan bellas y deseables. Piense pues en ello, si le place y esté Vd. seguro de que soy, etc.
>
> *Carta de Pascal a Fermat*, 27 de octubre de 1654

Aclaraciones y pistas

Primer problema

El famoso caballero De Méré había hecho fortuna considerable a lo largo de los años apostando a obtener un seis en cuatro lanzamientos de un dado (si bien su conocimiento era empírico, también hay una razón matemática, ya que la probabilidad de que no salga el seis en ninguno de los cuatro lanzamientos es igual a $(5/6)^4$ = 0,48225 mientras la de que salga el seis en alguno de los cuatro lanzamientos será por tanto 0,51775. Basándose en este conocimiento, De Méré razonaba que en el caso de tirar dos dados para sacar doble seis y jugar con ventaja habría que tirar 24 veces los dados (utilizando un razonamiento proporcional simple).

En términos actuales podemos razonar de la siguiente manera: la probabilidad de obtener un seis doble en una tirada es 1/36, mientras que la probabilidad de NO obtener un seis doble en una tirada es 35/36. Sabiendo estos resultados y aplicando las leyes de la probabilidad podemos calcular la probabilidad de NO obtener un seis doble en n tiradas que será $(35/36)^n$. De dónde se deduce que la probabilidad de obtener al menos un seis doble en n lanzamientos será igual a:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^n$$

Para que se cumplan las condiciones del problema se ha de verificar que:

$$1-\left(\frac{35}{36}\right)^n > \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

$$1 > 2\left(\frac{35}{36}\right)^n$$

Tomando logaritmos decimales y despejando tenemos que :

$$n > \frac{\log 2}{\log 36 - \log 35}$$

$$n > 24{,}6$$

Por tanto se han de efectuar, como mínimo, 25 lanzamientos de los dos dados cúbicos.

Merece consideración que unos 60 años más tarde el matemático A. de Moivre (1667-1754) encontró una regla para resolver este problema de manera aproximada:

$$n = N \cdot \ln 2$$
$$n = 36 \cdot \ln 2 = 24{,}85 \simeq 25$$

Dónde N coincide con el número de casos posibles.

Segundo problema

Este problema tiene más enjundia que el problema anterior y ha sido uno de los principales escollos en el nacimiento de la probabilidad.

Ya hemos visto una solución al mismo en una de las cartas remitidas por Pascal al jurista P. Fermat. Para ejemplificar mejor el problema supongamos la siguiente situación:

> **Dos jugadores deciden interrumpir el juego antes del término convenido; Supongamos que al Jugador *A* le faltan 2 puntos para ganar la bolsa y al jugador *B* le faltan 3, ¿cómo deberán repartirse las cantidades apostadas, según el progreso de la partida, para que dicho reparto sea justo?**

Evidentemente el vencedor absoluto quedará decidido como máximo en cuatro juegos más. Enumeremos todos los casos posibles resultados de estos cuatro juegos, usando *A* y *B* para denotar al vencedor de cada partida

AAAA	*AAAB*	*AABB*	*ABBB*	*BBBB*
	AABA	*ABAB*	*BABB*	
	ABAA	*ABBA*	*BBAB*	
	BAAA	*BAAB*	*BBBA*	
		BABA		
		BBAA		
Casos en los que gana *A*			**Casos en los que gana *B***	

Como vemos hay un total de 16 casos posibles de los cuales en 11 casos gana el A el premio y en 5 gana el B. Esta solución fue dada, también por Pascal en una carta remitida el 24 de agosto de1654 a Fermat. En este caso los 16 eventos son equiprobables, y por razones de simetría Pascal ha razonado de la manera anterior. Además se dio cuenta de la relación que tenían estos números con su famoso triángulo de Pascal. En efecto si observamos el triángulo numérico:

1	1	1	1	**1**	1	1
1	2	3	**4**	5	6	
1	3	**6**	10	15		
1	**4**	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Los valores obtenidos por Pascal se pueden obtener a través del esquema anterior, como el mismo Pascal explica en una de sus cartas.

En efecto : 1+4+6 =11, mientras que 1+4 =5.

Conviene notar que la manera de resolver este problema en la actualidad no sigue los pasos dados por Pascal, ya que únicamente estudiamos los siguientes casos:

AA	*ABBB*
ABA	*BABB*
ABBA	*BBAB*
BAA	*BBB*
BABA	
BBAA	
Casos en los que gana *A*	**Casos en los que gana *B***

Sin embargo, hemos de señalar que estos 10 casos *no son equiprobables*; sus respectivas probabilidades se pueden calcular, obteniendo:

$$P(AA) = {}^{1}/_{4}$$
$$P(ABA)=P(BAA)= P(BBB) = {}^{1}/_{8}$$
$$P(ABBA)=P(BABA)= \ldots {}^{1}/_{16}$$

Por tanto,

$$P(A \text{ gane la partida}) = \frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$$
$$P(B \text{ gane la partida}) = \frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{5}{16}$$

Si quieres resolver más problemas de este tipo consulta la bibliografía.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOURSIN, J. L. (1958): *Las Estructuras del Azar*, Ediciones Martínez Roca, S.A., Barcelona

DE MORA CHASLES, M.S.(1989): *Los inicios de la Teoría de la Probabilidad. Siglos XVI y XVII*, Serv. Ed. Universidad del País Vasco, Bilbao

GARCÍA CRUZ, J. A.(2000): "Historia de un problema: el reparto de una apuesta". Revista *SUMA*

Alguien hay ahí...

Con SUMA alegría, y alguna incidencia por culpa del servidor de Internet de la FESPM que dilató el tiempo de recepción convirtiendo en meses lo que debían ser días, hemos podido comprobar que sí hay alguien que lee lo que en estas páginas se escribe. No sólo que lo lee, sino que pleno de entusiasmo y desafiando los duros calores de la estepa castellana brinda su pluma, además en un buen tono cervantino, y su mente para ayudar a don Quijote y a Sancho a deshacer sus entuertos matemáticos.

¡Si! Nos ha escrito desde la Universidad de Valladolid, brindando sus respuestas y sus atinadas observaciones Alfonso J. Población Sáez, profesor del Departamento de Matemática Aplicada y una de las personas que más sabe del extraño binomio cine-matemáticas.

Sólo una puntualización a las atinadas sorpresas que Alfonso pone en boca de don Quijote. Cosa del diablo sería, como bien dice don Quijote en la respuesta, que fuesen 4 chorizos y cada uno pesase 10 kg, y también que fuesen 8 chorizos de $^{30}/_{7}$ kg. ¡Mire bien, vuestra merced que aquellos que allí se parecen no son kilos, sino onzas castellanas...! Kilos y metros...Aún tardarán varios siglos en aparecer tan extrañas unidades en nuestros pagos. Sin duda don Quijote y Sancho hablarían de varas y de onzas, medida harto extendida en aquella época y que para los amantes de las unidades de peso francesas equivalía a 28,75 gramos. Así que cada chorizo pesaría unos 123 gramos y los 8 juntos casi un kilo.

Antonio Pérez Sanz
decabeza@fespm.org

De cómo nuestros amigos resolvieron sus enigmas tras una agitada vigilia.

Respuesta a los ...*Entuertos matemáticos* del n.º 48 de *SUMA*

Ensimismados en sus cuitas y cavilaciones, escudero y caballero viéronse sorprendidos por la noche, por lo que de nuevo tuvieron que dormir al raso. No tardaron en conciliar el sueño, aunque a eso de las cuatro de la madrugada, despertose Sancho a consecuencia de un fuerte estruendo, que al instante descubrió como ronquido propio. Después de paliar sus más elementales necesidades, percatose de que su señor parecía presa de una tan feroz batalla, a tenor de las voces y aspavientos que profería, que, preocupado, determinó despertarlo en ese mismo instante:

—¡Señor, mi señor! ¿Qué le sucede a vuesa merced, que parece lidiar con los más pavorosos monstruos de todo el averno?

—(Gritando) ¡No puede ser! ¡Es imposible! ¿eh?¿Qué sucede? ¿Quién osa distraer la mente de...? (Despertando) ¡Ah, Sancho, eres tú! Me temo que los chorizos no me han sentado tan bien como su sabor barruntaba.

—No miente ahora tan suculenta pitanza, que ya son horas desde que este infortunado tragadero no tiene sino vagos recuerdos.

—¡Siempre pensando en lo mismo! Deberías aprender de mí, que dándole vueltas y requiebros al día pasado, aparecióseme en sueños un extraño personaje ataviado con una especie de bata blanca y un puntiagudo objeto con el que trazaba signos en un papel, que no paraba de llamarme zoquete. Me habló de los albañiles de la venta diciéndome que si a fueran las hileras de cinco bloques de adobe de uno, y b las de a siete del otro, entonces en vista de los bloques sobrantes tendríamos que

$$5\,a + 2 + 7\,b + 4 = 100$$

o sea que

$$5\,a + 7\,b = 94,$$
$$\text{y de ahí } a = (94 - 7b)/5.$$

Alfonso Jesús Población Sáez
Dpto. Matemática Aplicada
Universidad de Valladolid
http://gauss.mat.eup.uva.es/~alfonso

Como los adobes son cantidades enteras, los posibles valores para (a, b) sólo podrían ser (16, 2), (9, 7) y (2, 12). Entonces le comenté que, aunque ninguno de ellos parecía muy despierto, tampoco eran tan torpes como para tomar cantidades muy desiguales de bloques de adobe, pudiendo así descartar la primera y la tercera opción, ya que corresponden respectivamente a 12 y 89 adobes, y 82 y 18. Así que, uno cogió 47 adobes y el otro 53, que es lo que corresponde al segundo par indicado. Y lo curioso, Sancho, es que lo entendí perfectamente.

El Quijote, Dalí

—¿Cuál era entonces el motivo de vuestra penosa inquietud?

—Ya te lo dije, Sancho, que no me escuchas. ¡Los chorizos, pardiez, eran los chorizos!

—Cuénteme, cuénteme, pero como vos mismo dijisteis no hace mucho (ver cap. XXI, 1ª parte), *sed breve en vuestros razonamientos que ninguno hay gustoso si es largo*.

—El tal espectro, que no podía ser sino pariente del muy ruin Alifanfarón de la Trapobana, merced a su suficiencia y a su superior conocimiento (aunque él lo llamó "supremo conocimiento", pero no entendiéndolo como nosotros lo hacemos, sino como "el menor de los conocimientos superiores"), al mencionarle lo de "la suma de todos los pesos de todas las parejas o ternas posibles", después de insultarme de nuevo, me dijo que no estaba claro que quería decir. ¿Se refería a que iba pesando los n chorizos a pares y luego a tríos y los iba apartando después de cada pesada pudiendo sobrar uno o ninguno en las parejas, y uno, dos o ninguno en las triadas? Si tal fuera me probó que era imposible, básicamente porque la diferencia de pesos de pares a tríos era muy elevada. Entonces dijo que a lo mejor se refería a ir pesando todas las posibles parejas y tríos que se pudieran hacer con los n chorizos (lo cual le pareció, con todos los respetos, una gilipollez).¿Habría entonces que pesar la pareja 1–2, y luego la 2–1, hablándome de no sé qué variaciones? Entonces tendríamos 4 chorizos, ¡de 10 kg cada uno! ¡No, no y no, exclamé! Entonces me dijo que lo mejor sería considerar las parejas y ternas repetidas como una sola, hablando de no sé qué combinaciones, y escribiendo $n(n-1)p = 240$, $n(n-1)(n-2)\ p = 1440$. Colocó entonces la segunda encima de la primera separadas por una raya, y empezó a tachar expresiones iguales, terminando por decir 8 chorizos de peso 30/7 cada uno. Cosa del diablo me pareció, profiriendo entonces que eso tampoco podía ser, y en esas estaba cuando me despertaste.

—¿Recuerda mi señor que tras despedirnos de los pastores estuve cavilando, a mi manera, el número de ovejas que tendrían?

—¡Cómo no lo voy a notar, si estuviste extrañamente en silencio largo rato!

—Pues háceme que eran 8 ovejas señor, con la finca cuadrada de 4 m de lado (16 m^2 de superficie y 8 postes separados entre sí 2 m) y la rectangular de 8 × 2, con 10 postes con idéntica separación.

—Pero Sancho, eso no sirve, que paréceme que has llegado a esa idea casualmente, o por la cuenta que dicen "de la vieja" (que era sin duda lista) o merced a algún demonio vespertino que pasara por el camino. Que no te oiga el súcubo ese que a mí me vino, que no hay cosa que más le cabree que las cosas sin demostrar.

—Pues sabed (herido en su amor propio) que me da igual lo que diga ese Alifanfa lo que sea, y por ende lo que digáis vos, que a mí la cuenta me cuadra. Y además observad (e hizo en el suelo el siguiente dibujo).

o	o	o	o	o	o
X	o	X	o	o	o
o	o	o	o	o	o
X	X	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o
o	X	X	o	o	o

Las cruces son las coles que la tendera pudo coger (esas u otras en similar distribución). Y me da igual lo que digáis, resuelto está.

Y en esto diose media vuelta para intentar recuperar el sueño perdido que en tal disputa ya oyeron algún gallo madrugador. El día volvería a ser largo y quizá lleno de nuevos enigmas, quebrantos y conflictos. Sin embargo nuestro caballero no logró conciliar el sueño, (recordaba otra expresión inexplicable para él que la aparición le había mostrado, algo así como $xn + yn = zn$, con $n>2$), lamentándose de no haber tenido a bien leer en su momento algún tratado más algebraico o geométrico en lugar de alguno de los muchos de caballerías que Dios puso en sus enjutas y torpes manos.