SUMA 51
Febrero 2006, pp. 53-60

En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. Un universo nacido de la nada (IV)

En el artículo anterior habíamos dejado a Ibn al-Banna (siglo XIII) en el Magreb, enunciando una fórmula que permite calcular el número de combinaciones de un orden cualquiera sin necesidad de recurrir al Triángulo, y a al-Farisi en Irán (ya a principios del XIV), utilizando esa herramienta matemática para determinar los órdenes numéricos y desarrollar una expresión combinatoria general de los números figurados[1]. En los tres artículos que siguen a continuación abordaremos las aportaciones del filósofo francés comparándolas con las obtenidas en clase. En los anteriores nos habíamos acercado al Triángulo Aritmético, a partir del álgebra y los recuentos, utilizando como recurso didáctico los problemas: *Coeficientes* y *El ratón Melquiades*. En este, *Bajo la atenta mirada de Alá* nos permitirá hacerlo de forma directa, analizando su estructura a través del estudio de sus propiedades. En los siguientes, la combinatoria será la protagonista.

Comenzaremos desarrollando como propuesta de trabajo una idea, presente también en la obra de Pascal: la de sembrar un 1 en un desierto de ceros.

Bajo la atenta mirada de Alá

Un día, recibió al-Mu'taman[2] un emisario del califa de Bagdad, era correspondencia habitual, nada fuera de lo común. Le hablaba de sus problemas y le informaba de rumores y certezas pero, sobre todo, le preguntaba por su obra, llamada a ser un compendio del saber matemático de la época en el oriente y occidente musulmán que, por aquel entonces era como decir en el mundo entero, si exceptuamos China e India. Pero había otra pregunta final que cerraba la misiva...

Billete de 500 FF, dedicado a Pascal

Hace mucho -decía el califa- que nuestros embajadores traen y llevan misivas de Saraqusta a Bagdag y siempre he querido pedirte que me cuentes cómo son tus desiertos, cómo tus oasis, tus ciudades, de dónde sopla el viento que arrastra las tormentas de arena... lo que me cuentan tus embajadores no me resulta creíble.

A lo que al-Mu'taman contestó: imagina el desierto como si fuera una página infinita de papel llena de ceros, ordenados

Carlos Usón Villalba
Ángel Ramírez Martínez
historia.suma@fespm.org

según el criterio de Alá, unos entre otros, una fila intercalada entre la otra. Imagina ahora que en esa estéril superficie se posa el dedo del creador e introduce un 1, un miserable 1. Pero los creyentes sabemos que la unidad en manos del Creador puede serlo todo. Por eso impone la condición de que se sumen ahora todas las filas de tal manera que la suma de dos elementos de una de ellas dé, como resultado, el valor intermedio de la siguiente... el fruto de esa sencilla operación es Al-Andalus.

El emisario tradujo con fervor quince propiedades de aquella fértil tierra, que Alá había bendecido, para ofrecer al califa como presente y quedó asombrado de la riqueza matemática de aquella estructura.

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Figura 1

El Triángulo Aritmético (de Pascal)

Así titula el filósofo francés el breve tratado que dedica a esta *figura*, según su propia forma de designarlo. Allí, tras definir la estructura, va enunciando sus componentes una a una con objeto de poder referirse a ellas con posterioridad. En realidad trabaja con una “esquina” del rectángulo aquel que obteníamos al resolver el problema del ratón Melquiades.

No hace alusión alguna a la Combinatoria, lo que no le impide enumerar algunas de sus relaciones más características en función del trazado de filas (*rangos paralelos*) y columnas (*rangos perpendiculares*). Así, en su primera propiedad, enuncia: *En todo triángulo aritmético todas las células del primer rango paralelo y del primer rango perpendicular son iguales a la generatriz.*

Tras determinar como criterio de formación de cada célula la suma de las dos que le preceden en su fila y columna, aborda su demostración suponiendo, al igual que proponíamos en *Bajo la atenta mirada de Alá*, que las células “exteriores” del triángulo sean ceros. Si denotamos[3] con (n, m) el número que aparece en la intersección de la fila n con la columna m tendríamos que $(n, 1) = (n-1, 1) + (n, 0)$ y, como todos los dígitos de la fila y columna 1 son unos y los de la fila y columna 0 son ceros, tenemos que $(n, 1) = 1 + 0 = 1$. Con lo que

$$(n, 2) = (n-1, 2) + (n, 1) = n-1 + 1 = n.$$

Esta sencilla propiedad sintetiza el modelo argumentativo de Pascal cuyo Triángulo, en lo que se refiere a la disposición de los números, se aleja claramente de la tradición china y se sitúa mucho más cerca de la árabe.

Preocupado en exclusiva por *demostrar las verdades ya descubiertas y aclararlas de tal manera que la prueba resulte irrefutable* [...] *disponiendo las proposiciones en el orden más apropiado*[4], el filósofo francés se apoya habitualmente en un ejemplo, y en una notación semisintética, para generar un razonamiento, que en el caso que antecede, sería[5]:

1G	1σ	1π	1λ	1μ	1δ	1ε
1φ	2γ	3θ	4R	5S	6N	
1A	3B	6C	10ω	15ξ		
1D	4E	10F	20ρ			
1H	5M	15K				
1P	6Q					
1ν						

Figura 2

φ igual G *+ cero, es decir, φ igual G*
Así, A *igual* φ *+ cero, es decir,* φ
Así, σ *igual* G + cero, *y* π *igual a* σ + cero
y así para las demás.

Limitado por la ausencia de una buena notación, raramente se sale de este esquema, aborda la demostración de forma general o utiliza un proceso de inducción completa.

Pero, al margen de todo ello, lo que nos preocupa en este artículo es saber ¿cuáles son en realidad las propiedades que aporta Pascal en su tratado? Esas que, se supone, fueron mérito suficiente para que el eurocentrismo militante asociase su apellido al nombre de lo que él mismo denomina: Triángulo Aritmético.

La primera es señalar que no tiene por qué ser 1 su generador. En ese desolado desierto de ceros podríamos haber sembrado una cantidad cualquiera. El resultado hubiera sido otro triángulo, idéntico al que nos ocupa, pero en el que cada uno de sus términos quedaría multiplicado por ese número inicial.

En este artículo nos acercamos al Triángulo Aritmético analizando su estructura a través del estudio de sus propiedades.

La segunda[6], es la definición del propio criterio de formación: $(n, m) = (n, m\text{-}1) + (n\text{-}1, m)$. A partir de ahí se dedica a hacer un análisis empírico de las propiedades que va encontrando, en nada diferente del comportamiento de nuestros alumnos cuando les pedimos, en *Bajo la atenta mirada de Alá,* que busquen en él quince propiedades. Ausente por completo de su discurso el criterio de *inducción completa*, la aportación de una cantidad suficiente de ejemplos constituye tanto para Pascal como para la mayoría de nuestros alumnos y alumnas de 4º de ESO, esa prueba irrefutable a la que aludía el filósofo francés.

Así enuncia la *consecuencia II*[7]: *Cada célula es igual a la suma de todas aquellas del rango paralelo precedente comprendidas desde su rango perpendicular hasta el primero inclusive.* Carente, como hemos señalado antes, de una eficaz notación sintética, el enunciado resulta farragoso. Mucho más didáctica es la presentación de Adriana Muñoz y Diana Lorente en *La imprecisa frontera de un universo de dimensión irregular,* un trabajo de búsqueda sobre el Triángulo Aritmético, que obtuvo un meritorio tercer premio en el XIV Congreso Nacional de Jóvenes Investigadores. Ellas sí poseen una notación precisa y sintética a la hora de expresar sus resultados.

- **Propiedad 4**

1
1 1
+1 2 1
1 +3 3 1
1 4 +6 4 1
1 5 10 +10 5 1
1 6 15 20 +15 6 1
1 7 21 35 =35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}$$

Ellas necesitaron de los desarrollos factoriales para conseguir esa *prueba irrefutable* de la que habla Pascal:

$$1+(n+1)+\frac{(n+2)(n+1)}{2}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\cdot 2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(n+1)}{k!}-\frac{(n+k+1)(n+k)\ldots(n+2)}{k!}=0$$

Sacando factor común, entre los dos últimos miembros tenemos:

$$1+(n+1)+\frac{(n+2)(n+1)}{2}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\cdot 2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(n+2)}{k!}((n+1)-(n+k+1))=0$$

luego:

$$1+(n+1)+\frac{(n+2)(n+1)}{2}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\cdot 2}+\ldots$$
$$\ldots-\frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(n+2)}{k!}k=0$$

o sea:

$$1+(n+1)+\frac{(n+2)(n+1)}{2}+\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\cdot 2}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)}{(k-1)!}-\frac{(n+k)(n+k-1)\ldots(n+2)}{(k-1)!}=0$$

y repitiendo todo el rato lo mismo llegamos a

$$1-1=0$$

La *consecuencia III* de Pascal es copia de la anterior: *Cada célula iguala la suma de todas aquellas del rango perpendicular precedente comprendidas desde su rango paralelo hasta el* *primero inclusive*. Un enunciado que podría haber evitado en base a la disposición simétrica de los números en el Triángulo. Una distribución evidente y que, sin embargo, enuncia como *consecuencias V y VI* a pesar de la ya referida autoexigencia de *disponer las proposiciones en el orden más apropiado*.

> *Nos preocupa en este artículo saber cuáles son en realidad las propiedades que aporta Pascal en su tratado. Esas que fueron mérito suficiente para que el eurocentrismo militante asociase su apellido al nombre de lo que él mismo denomina Triángulo Aritmético.*

Siguiendo el modelo de Adriana y Diana, al que estamos más acostumbrados, la *consecuencia IV* del filósofo francés Pascal quedaría así:

+1
+1 +1
+1 +2 +1
1 +3 +3 +1
1 4 +6 +4 +1
1 5 10 +10 +5 1
1 6 15 20 +15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 =56-1 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$$\binom{0}{0}+\binom{1}{0}+\dots+\binom{n}{0}+\binom{1}{1}+\binom{2}{1}+\dots+\binom{n+1}{1}+\dots$$

$$\dots+\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\dots+\binom{n+k}{k}=$$

$$=\binom{n+k+2}{k+1}-1$$

Pascal, insistimos, sin recurrir al método de inducción completa ni a la combinatoria, hace un razonamiento de este tipo: La suma de las celdas de la primera diagonal (la de los unos) es igual a 5. La suma de la segunda es igual a 15 y la de la tercera a 35 pero, por la propiedad anterior 1+5+15+35=56 luego 5+15+35=56-1.

Un modelo perfectamente generalizable, a pesar de que se apoye en un ejemplo particular. Un tipo de razonamiento absolutamente habitual en clase, que alabamos en Pascal y censuramos con dureza en el aula, reclamando otro más riguroso (algebraico para ser más exactos) y completo. Hemos insistido muchas otras veces en este tema de exigir un rigor suficiente y adaptado a cada edad y momento, pero lo volveremos a hacer: ¿quién tiene necesidad de ese grado sumo de formalismo? El alumnado no, el profesorado tampoco, nosotros como seres humanos parece ser que mucho menos, ¿entonces?... Sí, no cabe duda que fue la tradición euclidiana y burbakista la que nos generó una urgencia tal. Grabada a fuego en nuestras mentes por las universidades que expidieron nuestros títulos y nos adoctrinaron en la disciplina, hemos sido sus más fieles vasallos. Convertida en objetivo único parecemos empeñados en perpetuar la historia de unos estudios que fueron incapaces de darnos vida como matemáticos.

Esta *cuarta consecuencia* del filósofo francés no apareció en clase ni la hemos encontrado en el excelente libro de D. Seymour [1986]. Quizás porque su formulación surge con mucha más facilidad si se estudia un “Rectángulo Aritmético” como el que utilizó Pascal, que si se colocan los números en la disposición de Chu, o incluso en las de al-Karagi o ibn Mun’im[8].

A Pascal de la mano del alumnado

Para mostrar las *consecuencias VII*, *VIII* y *IX* aprovecharemos igualmente la presentación que de ellas hacen Diana y Adriana, en las propiedades 3 y 10 de *La imprecisa frontera de un universo de dimensión irregular*.

- **Propiedad 3**

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
+1 +4 +6 +4 +1 2^4
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\dots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

Analicemos la demostración de Pascal, dice así: *La primera es la unidad, la segunda es el doble de la primera, por lo tanto 2; la tercera el doble de la segunda, por lo tanto 4; y así al infinito.* Las alumnas, sin embargo descubren además que cada fila, leída como si fuera un único número[9], es una potencia de 11 (ver Propiedad 2) y que el resultado de multiplicar un número por 11 no es otro que el de sumar sus cifras, dos veces[10]. Resulta obvio entonces que cada fila sume el doble que la anterior y que esa suma haya de ser una potencia de dos.

• **Propiedad 10**

+1

+1 +1

+1 +2 +1

+1 +3 +3 +1

+1 +4 +6 +4 +1 2^5-1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$$\binom{0}{0}+\binom{1}{0}+\binom{1}{1}+\ldots+\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^{n+1}-1$$

Aquí, el exordio de Adriana y Diana es, en todo, coincidente con el de Pascal. Dicen ellas: *La demostración resulta evidente puesto que es la suma de la progresión geométrica de las diferentes potencias de 2 que habían salido en la propiedad 3.*

Enuncia ahora Pascal una serie de *consecuencias* que merece la pena reseñar por su originalidad. La que enumera como *X* se podría enunciar así[11]: Si tomamos un número cualquiera de células consecutivas de una fila, desde su inicio, su suma es igual al doble de la suma de otras tantas de la fila anterior, después de restarle la última. Es decir:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{k}=$$
$$=2\cdot\left(\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\ldots+\binom{n-1}{k}\right)-\binom{n-1}{k}$$

Un análisis superficial de las filas pares permite observar que, sus células centrales son, todas ellas, múltiplos de dos. Una consecuencia que se deduce de forma evidente del hecho de cada una de esas células centrales es suma de otras dos de la fila precedente que, por simetría del Triángulo, han de ser iguales. Esta es la que Pascal enuncia como *consecuencia XI*.

Las que siguen son propiedades mucho más ajenas, si cabe, a nuestra experiencia docente, puesto que aluden a los cocientes entre diferentes términos del triángulo. La *consecuencia XII*, expresada en notación combinatoria, dice:

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}=\frac{k+1}{n-k}$$

Y, efectivamente,

$$\frac{\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}}{\dfrac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(k+1)!}}=\frac{k+1}{n-k}$$

Pero Pascal razona de otro modo y, por primera vez, hace uso del proceso de inducción completa, apoyándose, una vez más, en la propia definición de las células del Triángulo como suma de las dos que le preceden.

Las *consecuencias XIII*, *XIV* y *XIX*, expresadas también en forma combinatoria, serían:

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k}}=\frac{n-k+1}{n+1}\quad,\quad\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+1}{k+1}}=\frac{k+1}{n+1}\quad\text{y}\quad\frac{4\cdot\binom{2n}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}}=\frac{2n+2}{2n+1}$$

Pascal, como cualquier alumno o alumna que se acerca al Triángulo Aritmético, parece haber sacado la impresión de que el número de propiedades que encierra es ilimitado y que cada nueva regularidad que encuentras parece más bonita que la anterior. Advierte: ...dejo muchas más de las que doy; es una cosa extraña hasta qué punto es fértil en propiedades. Todo el mundo puede ejercitarse en ello.

Las que llevan los números *XV*, *XVI*, *XVII* y *XVIII* son corolario de las numeradas como *II* y *XII*. Quizás por ello, Pascal termina esta descripción diciendo: *Se pueden extraer de ahí muchas otras propiedades que suprimo puesto que cada uno puede concluirlas fácilmente, y aquellos que desearan hacerlo* *encontrarán algunas más bellas que las que yo pudiera dar*[12]. Como prueba de sus palabras recogemos la *propiedad 11* del trabajo de Adriana y Diana.

• Propiedad 11

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Si vamos dividiendo ordenadamente los números alternos en azul vamos obteniendo el cociente de los consecutivos, en rojo. Con lo que tenemos que

$$\frac{\binom{n}{n-1}}{\binom{n+2}{n+1}}=\frac{\binom{n+1}{n-1}}{\binom{n+2}{n}}$$

que se puede demostrar porque

$$\frac{n}{n+2}=\frac{\frac{(n+1)n}{2}}{\frac{(n+2)(n+1)}{2}}$$

pero, podemos pasar a comparar el resto de las filas y entonces ***¡¡¡oh sorpresa!!!****, entre la segunda y la tercera también funciona una cosa parecida:*

$$\frac{\binom{n}{n-2}}{\binom{n+3}{n+1}}=\frac{\binom{n+1}{n-2}}{\binom{n+3}{n}}$$

que se puede demostrar por el mismo razonamiento y que nos lleva, de forma general, a que se tendría que cumplir que

$$\frac{\binom{n}{n-k}}{\binom{n+k+1}{n+1}}=\frac{\binom{n+1}{n-k}}{\binom{n+k+1}{n}}$$

Y, efectivamente, con su acostumbrado método factorial, demuestran que se cumple.

No podemos saber si esa emoción que destilan Adriana y Diana fue compartida por el estudioso francés; ahora bien, de lo que no cabe duda es de que Pascal, como cualquier alumno o alumna que se acerca al Triángulo Aritmético, parece haber sacado la impresión de que el número de propiedades que encierra es ilimitado y que cada nueva regularidad que encuentras parece más bonita que la anterior. Cuando hace referencia a sus distintos usos advierte: *...dejo muchas más de las que doy; es una cosa extraña hasta qué punto es fértil en propiedades. Todo el mundo puede ejercitarse en ello*[13].

Y es cierto, cada nueva manera de asomarse a él encierra un filón interminable de propiedades. Una bonita colección de ellas podemos ver en D. Seymur [1986] aunque nosotros seguimos prefiriendo el minucioso análisis de Adriana y Diana.

• Propiedad 2

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1 **14641=11⁴**
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$(10+1)^n$

Es decir: cada fila contendría los dígitos de una potencia de 11 si no hubiera llevadas:$11^0=1$; $11^1=11$; $11^2=121$*; etc. En base 11 serían los números 1, 10, 100, etc.*

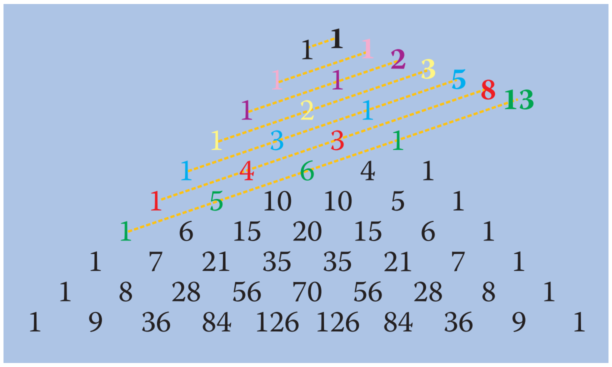
• Propiedad 5

1
−1 +1 =0
−1 +2 −1 =0
−1 +3 −3 +1 =0
−1 +4 −6 +4 −1 =0
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

$(1-1)^n = 0$

• **Propiedad 6**

Aquí vamos cogiendo los números intercalando la filas, como si miráramos por los huecos que dejan filas y columnas o sea, al "bislai" o, como dicen los viticultores de nuestra tierra, "al tresbolillo". Cada color representa el resultado de esa mirada y todo lo que se ve en una misma línea se suma. El resultado es la sucesión de Fibonacci.



• **Propiedad 7**

```
                  1
                1   1
              1²  +2²  1²
            1   3   3   1
          1   4  =6   4   1
        1   5  10  10   5   1
      1   6  15  20  15   6   1
    1   7  21  35  35  21   7   1
  1   8  28  56  70  56  28   8   1
1   9  36  84 126 126  84  36   9   1
```

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

• **Propiedad 8**

```
                  1
                1   1
             ×1  ×2   1
          ×1   3  ×3   1
          1  ×4  ×6   4   1
        1   5 ×10 ×10   5   1
      1   6 ×15  20 ×15   6   1
    1   7  21 ×35 ×35  21   7   1
  1   8  28  56  70  56  28   8   1
1   9  36  84 126 126  84  36   9   1
```

$$\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k+1}\cdot\binom{n+1}{k}\cdot\binom{n+1}{k+2}\cdot\binom{n+2}{k+1}\cdot\binom{n+2}{k+2}$$

es un cuadrado perfecto

• **Propiedad 9**

```
                  1
                1   1
              1   2   1
            1  +3  +3   1          =4²
          1  +4  +6   4   1
        1   5  10  10   5   1
      1  +6 +15  20  15   6   1
    1  +7 +21  35  35  21   7   1   =7²
  1   8  28  56  70  56  28   8   1
1   9  36  84 126 126  84  36   9   1
```

$$\binom{n}{1}+\binom{n+1}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n+1}{2}=$$
$$=X_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1$$

Donde X_{n+1} es el (n+1)-ésimo número cuadrado.

Acerca de los órdenes numéricos

En cualquier caso, debemos señalar que el primer acercamiento de Adriana y Diana al Triángulo se fraguó en el estudio de los *números con forma, números figurados* o, como dirá el propio Pascal, *órdenes numéricos.* A las aportaciones que hiciera el sabio francés en este campo dedicaremos el próximo capítulo de esta larga serie de entregas que venimos agrupando en torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. Antes debemos aclarar que el verdadero interés que motivó la investigación de Diana y Adriana, hoy estudiantes de medicina y fisioterapia respectivamente, la clave que les hizo persistir en su búsqueda fue la distribución fractal, en esta estructura matemática, de los múltiplos de un número cualquiera (para ellas primo o potencia de primo). Aunque, quizás, lo que las hizo merecedoras del galardón fue el haber sido capaces de generar Triángulos Aritméticos diferentes y tratar de buscar en ellos las propiedades que compartían con el de Pascal. Pero de eso hablaremos en otro momento.

Llegados a este punto y a estas alturas del discurso, si algo resulta evidente es: por una parte, su interés didáctico y por otra que ni sus orígenes ni el estudio que el sabio francés hizo de su estructura justifican que el Triángulo Aritmético lleve su nombre. Más bien al contrario, tanto por la diversidad de usos que se le ha dado como por las propiedades que encierra, si de algo es símbolo es de universalidad. ■

NOTAS

[1] La misma época en que Chin Chiu Shao realiza un estudio en profundidad del mismo y Chu Shih Chieh lo utiliza para resolver ecuaciones de orden superior en El precioso espejo de los cuatro elementos.

[2] No tenemos datos para afirmar que al-Mu'taman escribiera acerca del Triángulo Aritmético. Son las afirmaciones de Ahmed Djebbar (1995), acerca de que estaba informado de los aspectos esenciales de la producción científica árabe de su época y de épocas anteriores, y la influencia que su obra parece haber tenido en la de Ibn al-Banna e Ibn-Muncim, a tenor de sus propios testimonios, las que nos sugirieron la idea de novelar esta historia que nos permite reflexionar en clase sobre la producción científica del magreb y al-Andalus entre los siglos VIII y XV.

[3] Pascal no recurre a esta notación que hoy nos resulta tan familiar y asociamos a la geometría cartesiana.

[4] Reflexiones sobre la geometría en general en PASCAL, B., 1996, *Ensayos. Correspondencia. Pensamientos*, Ediciones 29, San Cugat del Vallés (Barcelona)

[5] Pascal introduce letras para designar los distintos elementos del triángulo, pero con ello no aporta ningún tipo de generalidad. Sirven, exclusivamente para designar, de forma diferente, números que pueden ser iguales.

[6] En realidad introduce otras propiedades relacionadas con la posición de las cifras. Sin respetar en rigor el enunciado del autor, serían las siguientes:

a. Una célula y su recíproca tiene sus rangos, vertical y horizontal, invertidos, es decir si una es (n, m) la otra es (m, n) .
b. Dada una célula (n, m) todas las que conforman con ella una misma base (líneas punteadas en figura 2) verifican que la suma de sus rangos es $n+m$ y sobrepasa en una unidad al de la base.
c. Cada base contiene una célula más que la anterior y el número de células que contiene coincide con su rango.

[7] Así denomina Pascal los resultados que va obteniendo: consecuencia I, II, III, etc. Adriana y Diana utilizarán: Propiedad 1, 2, etc.

[8] Ahmed Djebbar [2001].

[9] $1= 11^0$, $11= 11^1$, $121= 11^2$, $1331= 11^3$, etc.

[10]
$$\begin{array}{r} 1331 \\ \underline{\times 11} \\ 1331 \\ \underline{1331} \\ 14641 \end{array}$$

[11] Hemos modificado su redacción adaptándola a un modelo expositivo mucho más actual.

[12] Concluye el párrafo con el siguiente aserto: *Termino por tanto con el problema siguiente, que completa este tratado: Dados los exponentes de los rangos perpendicular y paralelo de una célula, encontrar el número de la célula sin utilizar el Triángulo Aritmético*. Que nosotros traduciríamos como: encontrar el término que ocupa lugar k+1 de la fila n sin hacer uso de la combinatoria, y que nos devuelve al Magreb, al siglo XIII y a la figura de Ibn al-Banna.

[13] Hacerle caso es una apasionante aventura didáctica, que es posible disfrutar gracias a que los libros de texto nos han hurtado esas propiedades de forma sistemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Añadiremos a la ya citadas en los artículos anteriores:

SEYMOUR, D., 1986, *Visual Patterns in Pascal's Triangle*. Dale Seymour Plublications. Palo Alto (California).

DJEBBAR, Ahmed, 1995, "La contribution Mathématique d' Al-Mu'taman et son influence hors d'Al-Andalus" en *Actes du colloque international sur «Huit siècles de mathématiques en Occitanie, de Gerbert et des Arabes à Fermat»*, pp. 35-46. Edita CIHSO (J. Cassinet), Toulouse.