SUMA 46
Junio 2004, pp. 59-70

Los diez problemas de Apolonio

Este artículo es fruto de una colaboración entre dos áreas curriculares, Plástica y Matemáticas, que comparten un amplio campo de contenidos curriculares, y en él se resuelven los diez problemas de tangencias de Apolonio. En primer lugar, se hace un tratamiento sintético y se obtienen las soluciones con regla y compás *utilizando Cabri. A cada construcción le sigue su planteamiento analítico y se resuelven algunos ejemplos en el estilo de las coordenadas usando Maple. También se hace una breve reflexión sobre las aportaciones de ambos procedimientos en cada caso y, finalmente, se concluye el artículo con unas reflexiones generales.*

This article is the result of a collaboration between fields that may seem unrelated: Plastic Arts and Mathematics. They share a wide field of syllabus, and in this work we solve the ten problems of Apollonius from the two perspectives. First, the synthetic treatment is done by using the software Cabri and the solutions are obtained on the rule-and-compass *manner; then the corresponding analytic approach is considered, and we solve some of the examples using coordinates using Maple. Also a brief analysis in both procedures is done case by case. Finally, we end the article with general reflections.*

Apolonio de Perga (262-190 a.C.), que es ampliamente conocido por su tratado sobre las cónicas, no lo es tanto por su tratado sobre Tangencias. En éste, Apolonio describe el problema que hoy se conoce como Problema de Apolonio y que tiene este enunciado:

> *Dados tres objetos tales que cada uno de ellos puede ser un punto, una recta o una circunferencia, dibujar una circunferencia que sea tangente a cada uno de los tres elementos dados.*

Este problema da lugar a diez casos posibles y en alguno de ellos aparecen situaciones que obligan a un tratamiento particular. Según Boyer (1986), los casos más sencillos (tres puntos y tres rectas) ya aparecen tratados en los Elementos de Euclides. Apolonio trató estos dos casos junto a estos otros seis (dos puntos y una recta; dos rectas y un punto; dos puntos y una circunferencia; dos circunferencias y un punto, dos circunferencias y una recta; un punto, una recta y una circunferencia) en el *Libro I de las Tangencias*, y los dos casos restantes (dos rectas y una circunferencia, y tres circunferencias) en el *Libro II de las Tangencias*. Aunque desgraciadamente estos libros se han perdido, a través de Pappus de Alejandría (s. IV d.C.) se sabe que Apolonio resolvió los nueve primeros, y hoy en día se cree que fue Isaac Newton el primer matemático que resolvió por medio de la regla y el compás el problema de encontrar la circunferencia tangente a otras tres circunferencias.

Consultada la base de datos del ZDM, Matdhi, sólo aparecen cuatro trabajos relacionados con Apolonio y, de ellos, sólo el artículo de E. R. Lozano (1997), tiene que ver con el problema de tangencias, pero en él se trata la relación del problema de Apolonio con el de Soddy y, por tanto, sigue una orientación distinta de la que se hace aquí.

Se sabe que Apolonio resolvió los nueve primeros, y hoy en día se cree que fue Newton el primer matemático que resolvió el último.

Inés Ortega
Didáctica de la Expresión Musical, Plástica y Corporal.
Tomás Ortega
Analisis Matemático y Didáctica de la Matemática, Universidad de Valladolid.

El propósito de este artículo es mostrar como se pueden conjugar la visión de la geometría sintética, propia del Área de Dibujo, con la geometría analítica, propia de la Matemática, y desde la óptica de la Didáctica combinar los estilos de resolución de forma complementaria. Así se crea un marco interdisciplinar de analisis didáctico que puede permitir elegir las opciones de resolución y de razonamiento más apropiadas en cada caso.

A continuación se describen los problemas y las soluciones correspondientes, junto con sus procedimientos constructivos y resolutores, y las presentaciones que siguen se fundamentan en la argumentación universal y en la explicación, habida cuenta de que éstas son las características más valorados por los alumnos en los procesos de construcción de los razonamientos argumentativos, como se desprende de la investigación llevada a cabo por Ibañes y Ortega (2002 y 2004).

1. Circunferencia que pasa por tres puntos dados

Solución sintética.

Se considera que *P*, *Q*, *R* son los tres puntos dados. Estos puntos forman el triángulo *PQR* y como las mediatrices de sus lados se cortan en un punto, el circuncentro, que es el centro de la circunferencia circuscrita a dicho triángulo, sólo hay que trazar las tres mediatrices para determinar *O* y dibujar la circunferencia de centro *O* y radio *OR*.

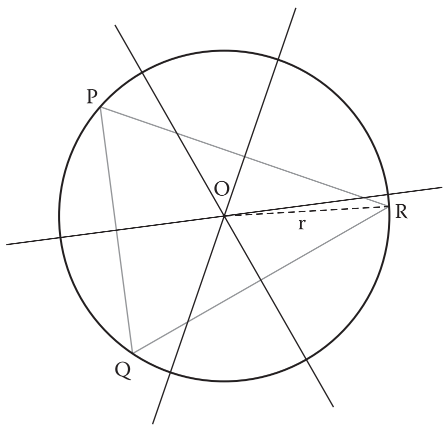


Figura 1. Circunferencia definida por tres puntos

Solución Analítica.

Considerando los puntos de coordenadas $P=(p_1,p_2)$, $Q=(q_1,q_2)$, y $R=(r_1,r_2)$, es usual hallar la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ que pasa por los tres puntos dados resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} dist(O,P)=dist(O,Q) \\ dist(O,P)=dist(O,R) \end{cases}$$

Otra manera de encontrar la solución es considerar que el centro, $O=(x,y)$, equidista de los puntos *P*, *Q*, *R* y resolver el sistema de las ecuaciones métricas correspondientes:

$$\begin{cases} dist(O,P)=dist(O,Q) \\ dist(O,P)=dist(O,R) \end{cases}$$

La primera ecuación representa a la mediatriz del lado *PQ* y la segunda a la mediatriz del lado *PR*. La solución del sistema, que es la intersección de las dos mediatrices, es el centro de la circunferencia. Una vez determinado este punto el radio se halla calculando la distancia de *O* a cualquiera de los puntos dados.

Es evidente que, en este caso, aunque el método sintético es más sencillo que el método analítico, sin embargo, el razonamiento de ambos es muy diferente y está basado en conceptos diferntes: en el caso sintético se utiliza el concepto de mediatriz, mientras que en el analítico o bien se utiliza la localización de una circunferencia que pasa por tres puntos o bién el concepto de equidistancia (mediatriz), y los correspondientes sistemas de ecuaciones se resuelven mediante manipulación simbólica, siguiendo las correspondientes reglas de sintaxis.

2. Circunferencia tangente a tres rectas dadas

Solución sintética.

Las tres rectas dadas *r, s, t* forman un triángulo *PQR*. Como es sabido, las tres bisectrices de los ángulos interiores de cualquier triángulo se cortan en un único punto, que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo, y, por tanto, sólo hay que dibujar las tres bisectrices para determinar el centro, *O1*. El radio se determina con los puntos de tangencia, y éstos se hallan trazando las perpendiculares por *O1* a cada uno de los lados. En la figura 2 se ha determinado *T1* trazando la perpendicular a *QR* por *O1.* También es conocido que las bisectices exteriores de dos ángulos y la interior del otro determinan los centros *O2, O3* y *O4* de tres circunferencias exinscritas. Como en el caso anterior, los radios *O2T2*, *O3T3* y *O4T4* se determinan trazando perpendiculares a las rectas tangentes desde estos centros.

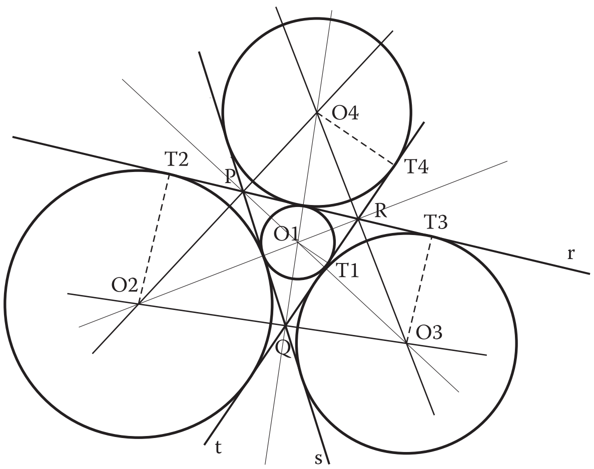


Figura 2. Circunferencia tangente a tres rectas secantes dos a dos

El trazado se simplifica mucho cuando dos de las rectas, *r* y *s*, son paralelas y la tercera, *t*, es secante. La figura 3 muestra esta construcción.

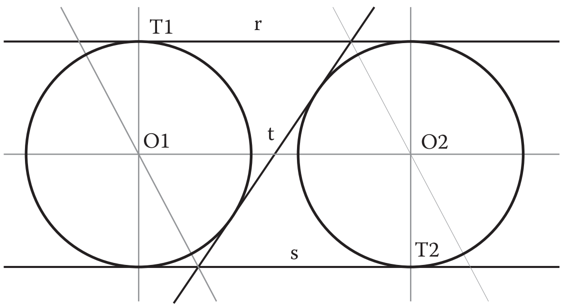


Figura 3. Circunferencia tangente a dos rectas paralelas y otra secante

Solución Analítica.

Después de la construcción anterior, es evidente que la distancia del centro a cada una de las rectas es la misma y, por tanto, las ecuaciones que determinan las coordenadas *(x, y)* del centro *O* de la circunferencia son las soluciones de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} dist(O,r) = dist(O,s) \\ dist(O,r) = dist(O,t) \end{cases} \qquad \begin{cases} dist(O,r) = dist(O,s) \\ dist(O,s) = dist(O,t) \end{cases}$$

¿Pueden estar aquí todas las soluciones que se han obtenido por el procedimiento sintético? Evidentemente sí. Cada ecuación es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las dos rectas que intervienen en la misma (las dos bisectrices) y, en consecuencia, cada sistema tiene cuatro soluciones: las intersecciones de los dos pares de bisectrices. Como el incentro, O_1, es el punto común de las tres bisectrices interiores, éste es una solución común a dos sistemas. Si consideramos que las ecuaciones de las tres rectas son: $4x+3y=12$, $-x+y=4$, $x+5y=2$, los sistemas formados por las ecuaciones de las bisectrices son:

$$\begin{cases} \dfrac{|-x+y-4|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|4x+3y-12|}{\sqrt{25}} \\ \dfrac{|-x+y-4|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|x+5y-2|}{\sqrt{26}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{|-x+y-4|}{\sqrt{2}} = \dfrac{|4x+3y-12|}{\sqrt{25}} \\ \dfrac{|4x+3y-12|}{\sqrt{25}} = \dfrac{|x+5y-2|}{\sqrt{26}} \end{cases}$$

Estos sistemas son respectivamente equivalentes a estos otros dos:

$$\begin{cases} 25(-x+y-4)^2 = 2(4x+3y-12)^2 \\ 26(-x+y-4)^2 = 2(x+5y-2)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25(-x+y-4)^2 = 2(4x+3y-12)^2 \\ 26(4x+3y-12)^2 = 25(x+5y-2)^2 \end{cases}$$

y cada uno de éstos es equivalente a cuatro sistemas lineales, que son los que resultan de conjugar los signos más y ménos de ambos miembros, como consecuencia de considerar las raíces cuadradas de ambos, lo que explica las cuatro soluciones de cada uno de los sistemas anteriores.

Estas ecuaciones son demasiadas o demasiado complicadas para obtener todas las soluciones manualmente, pero, por ejemplo, *Maple* resuelve el problema de forma inmediata. Sólo hay que introducir las siguientes instrucciones y en un instante se obtienen las cuatro primeras soluciones de *O*:

```
solve({25*(-x+y-4)^2-2*(4*x+3*y-12)^2,13*(-x+y-4)^2-
2*(x+5*y-2)^2});
allvalues(%);
evalf(%);
```

O_1= (-3,93; 5,50)

O_2=(-1,52; -2,47)

O_3=(0,04; -2,15)

O_4=(7,314; 35)

En éste y en todos los casos que siguen, y ya no se volverá a hacer ninguna referencia al respecto, los radios de las circunferencias tangentes se calcularían así:

- Si el dato es un punto P con $d(O,P)$
- Si el dato es una recta r con $d(O,r)$
- Si el dato es una circunferencia de centro C y radio r con $d(O,C)-r$ y $d(O,C)+r$

En este caso también es más sencillo el método sintético que el analítico, aunque se utilice software de ordenador, ya que es menos costoso hacer los dibujos con Cabri que escribir los sistemas de ecuaciones para Maple, incluso la elaboración del dibujo manualmente con regla y compás resulta menos gravoso que utilizar el software de cálculo. Por otra parte, el razonamiento que se sigue en ambos métodos puede considerarse similar, aunque es obligado destacar que el procedimiento sintético relaciona más conceptos. Por otra parte, los niveles de razonamiento que requiere la construcción sintética estarían en el nivel tercero de Van Hiele, nivel que, como señalan Clemens (1992), no se alcanza con facilidad por los alumnos.

3. Circunferencia que pasa por dos puntos dados y es tangente a una recta dada

Solución sintética.

La figura 4 muestra los datos del problema: los puntos *A* y *B*, y la recta *r*. Es evidente que el centro tiene que estar en la mediatriz del segmento *AB*, y, por otra, la recta *AB* tiene que ser el eje radical de las circunferencias solución y, por tanto, si se determina la intersección, *M*, de este eje con r, los puntos de tangencia *T1* y *T2* cumplirán la relación métrica: $MT1^2=MT2^2=MA\times MB$. Por tanto, hay que construir una circunferencia auxiliar con centro en la mediatriz y que pase por AB, trazar una tangente a esta circunferencia por *M* (el punto de tangencia pertenece a la circunferencia de diámetro *OM*), y llevar esta distancia sobre *r* desde M para determinar *T1* y *T2*. Finalmente, las perperdiculares a *r* por *T1* y *T2* determinan los centros *O1* y *O2* sobre la mediatriz.

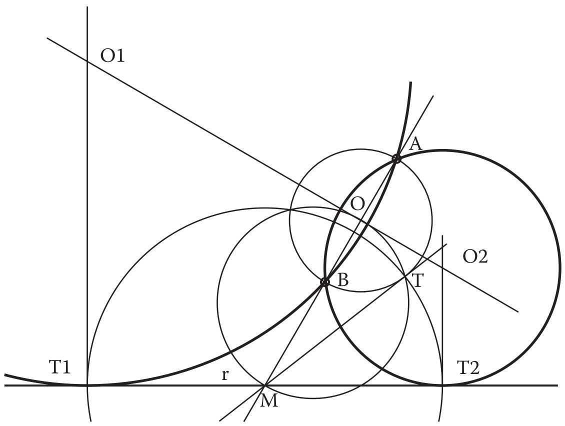


Figura 4. Circunferencia tangente a una recta *r* pasando por dos puntos *A* y *B*

La figura 5 muestra otras dos construcciones: una, cuando uno de los puntos está sobre la recta y, otra, cuando la distancia desde ambos puntos a la recta es la misma. Ambas son mucho más simples que la anterior y no necesitan ninguna aclaración adicional, aunque una explicación razonada, justificando las dos construcciones, es un buen ejercicio de reflexión y comunicación.

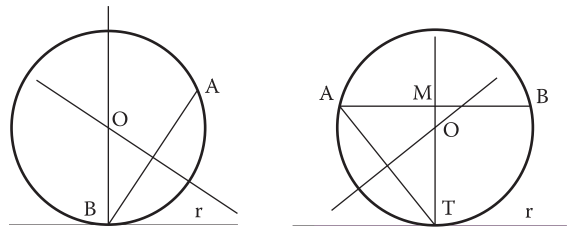


Figura 5. Circunferencia tangente a una recta *r* pasando por dos puntos *A* y *B* (uno sobre r y a igual distancia de *r*)

Solución analítica.

Se puede considerar que los puntos dados son $P=(p_1, p_2)$ y $Q=(q_1, q_2)$, y que la recta dada es *r*. El centro de dicha circunferencia, *O*, equidistará de los tres objetos y, por tanto, se hallará resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} dist(O,P)=dist(O,Q) \\ dist(O,P)=dist(O,r) \end{cases}$$

En este caso sólo hay una solución, que se obtiene con relativa facilidad por ser lineal la primera de sus ecuaciones, pero, aún así, quizás sea más corta en tiempo la construcción sintética. Este procedimiento, sin duda, es más complicado que el analítico, ya que tiene más etapas, pero es mucho más rico en razonamiento y, por consiguiente, si se llega a interiorizar en el sentido de Harel y Sowder (1996), se sabrán más cosas de dibujo y de matemáticas que con el procedimiento analítico, aunque, como en el caso anterior, esta construcción alcanza el nivel tercero de van Hiele y no es sencilla para los alumnos.

4. Circunferencia que pasa por un punto dado y es tangente a dos rectas dadas

Solución Sintética.

Se considera el punto *P* y las rectas *r* y *s* como en la figura 6. Por una parte, es evidente que el centro de la circunferencia solución tiene que ser un punto de la bisectriz y, por otra, la circunferencia solución también debe de contener al punto *P'* (simétrico de *P* respecto de la bisectriz). Esta observación permite reducir este problema al anterior y, por tanto, se llega a la solución siguiendo los mismos pasos.

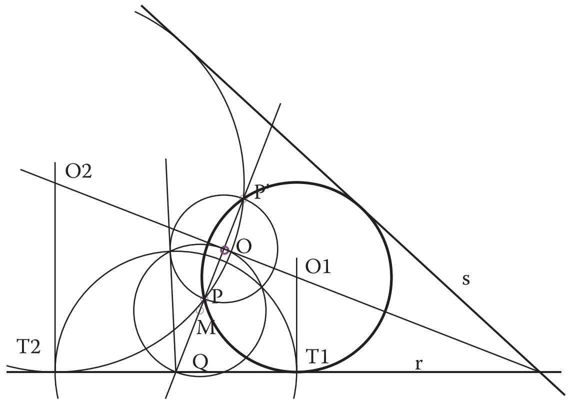
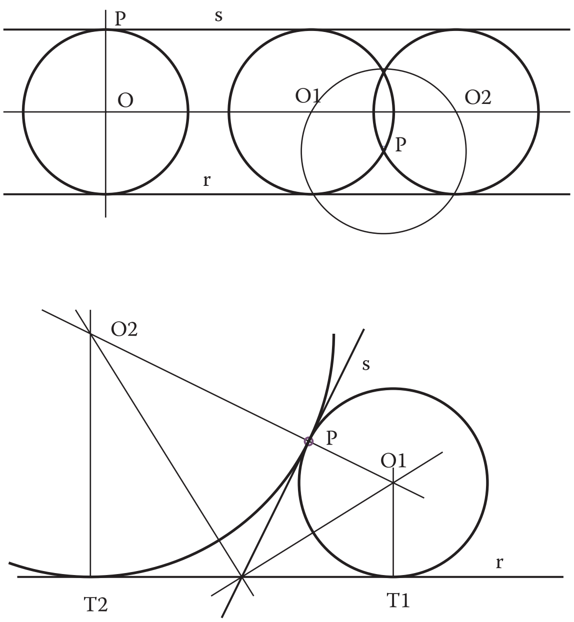


Figura 6. Circunferencia tangente a dos rectas pasando por un punto

En la figuras 7*a* y 7*b* se presentan dos casos particulares que son muy sencillos de construir y cuya explicación razonada es un buen ejercicio de reflexión y de comunicación.



Figuras 7*a* y 7*b*. Circunferencia tangente a dos rectas pasando por un punto. Casos particulares

Solución analítica.

Se puede considerar que el punto es $P=(p_1,p_2)$ y que las rectas

dadas son *r* y *s*. En este caso hay dos soluciones y los centros de estas dos circunferencias, *O1* y *O2*, se obtienen resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} dist(O,P) = dist(O,r) \\ dist(O,P) = dist(O,s) \end{cases}$$

Para el punto $P=(1, 2)$, y las rectas *r* y *s* de ecuaciones respectivas $x+y-1=0$ y $2x-y-2=0$, las ecuaciones y los cálculos derivados de las mismas no son tan sencillos, ya que se trata de dos ecuaciones cuadráticas en *x* y en *y*. Utilizando Maple, se tiene:

```
solve({sqrt((x-1)^2+(y-2)^2)-abs(x+y-1)/sqrt(2),sqrt((x-
1)^2+(y-2)^2)-abs(2*x-y-2)/sqrt(5)});
allvalues(%);
evalf(%);
```

O1= (0,79; 1,27)
O2=(0,24; 4,65)

Las construcciones sintéticas siguen siendo sencillas, los cálculos complicados y el razonamiento que se sigue en ambos estilos es bien diferente, si bien, el método sintético tiene una etapa más que el anterior lo que implica una mayor dificultad.

5. Circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a una circunferencia dada

Solución sintética.

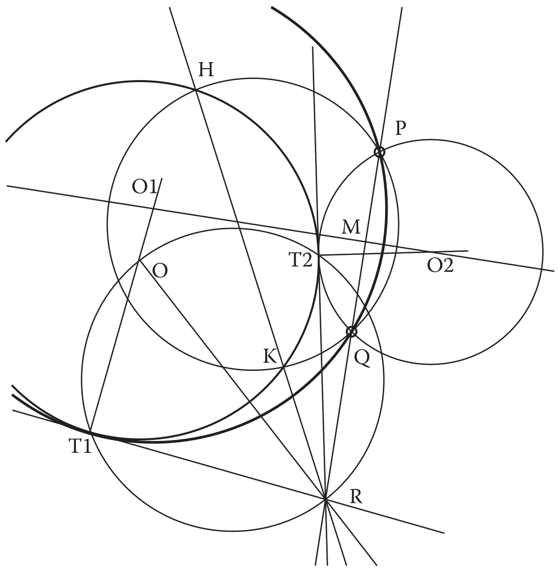


Figura 8*a*. Circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a otra circunferencia

Considerando que los puntos son *P* y *Q*, y que el centro de la circunferencia dada es *O*, surgen dos casos según que los puntos sean interiores o exteriores a la circunferencia dada, casos que se construyen de forma similar y que están representados en las figuras 8a y 8b. Se traza la mediatriz del segmento *PQ* y la recta *PQ*. Los centros de las circunferencias solución tienen que estar en la mediatriz y la recta *PQ* será el eje radical de las dos circunferencias solución. Se traza una circunferencia auxiliar que pase por *P* y *Q*, y que corte a la circunferencia dada. El eje radical de estas dos circunferencias, junto con el eje radical de las circunferencias solución determinan el centro radical, R, de las tres circunferencias y, por tanto, las tangentes trazadas desde *R* a la circunferencia dada determinan los puntos de tangencia *T1* y *T2*. Los centros solución, *O1* y *O2*, son las intersecciones de la mediatriz a *PQ* con las rectas *OT1* y *OT2*, respectivamente. Cuando los puntos son interiores a una de las circunferencias dadas la construcción es similar.

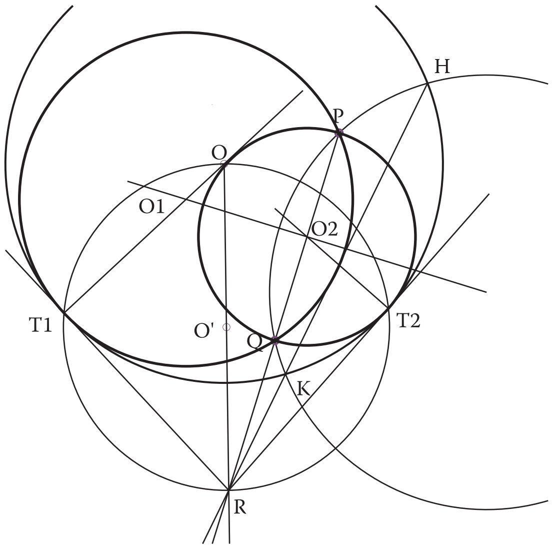


Figura 8*b*. Circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a otra circunferencia

Cuando uno de los puntos, por ejemplo, *P*, está sobre la circunferencia, la construcción es muy sencilla, tanto si es exterior como si es interior. Las figura 9*a* y 9*b* recoge estos dos casos, que no necesitan explicaciones adicionales. Sin embargo el descubrimiento y exposición de las mismas es un buen ejercicio.

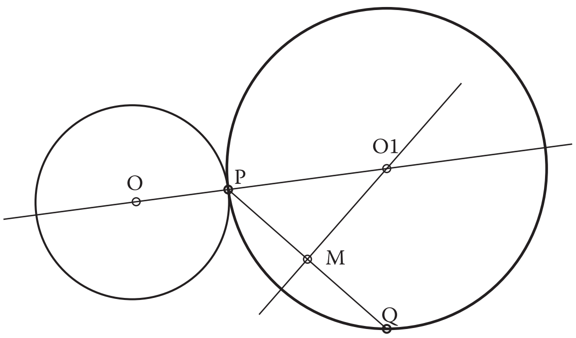


Figura 9*a*. Circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a otra circunfernecia. Caso particular

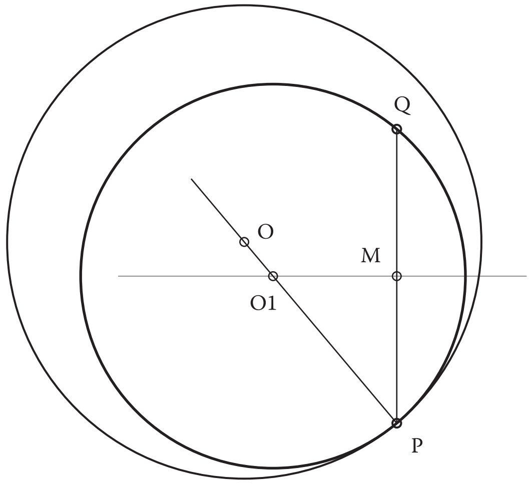


Figura 9*b*. Circunferencia que pasa por dos puntos y es tangente a otra circunfernecia. Caso particular

Solución analítica.

Se puede considerar que los puntos *son* $P=(p_1,p_2)$, $Q=(q_1,q_2)$ y que la circunferencia *C* tiene centro *O* y radio *r*. En este caso hay dos soluciones y los centros de tales circunferencias, *O1* y *O2*, se obtienen resolviendo los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} dist(O,P) = dist(O,Q) \\ dist(O,P) = dist(O1,O) - r \end{cases}$$

$$\begin{cases} dist(O,P) = dist(O,Q) \\ dist(O,P) = dist(O2,O) + r \end{cases}$$

Los sistemas de este caso dan lugar a ecuaciones cuárticas y, aunque se pueden resolver por cuadraturas, esta tarea de resolución es muy complicada y requieren ser tratados con software adecuado. Considerando $P=(3, 2)$, $Q=(-2, 1)$ y que la circunferencia tiene ecuación $(x-1)^2+(y+4)^2=22$, el primer sistema de ecuaciones, del que se obtendría la primera solución, es:

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2=(x+2)^2+(y-1)^2 \\ \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y+4)^2} \end{cases}$$

Maple aporta esta solución de forma casi instantánea con esta única instrucción:

```
solve({(x-3)^2+(y-2)^2-(x+2)^2-(y-1)^2,sqrt((x-3)^2+(y-
2)^2)-sqrt((x-1)^2-(y-1)^2)+2});
```

O2=(0,66; 0,67)

Análogamente, el segundo centro se calcula con la instrucción siguiente:

```
solve({(x-3)^2+(y-2)^2-(x+2)^2-(y-1)^2,sqrt((x-3)^2+(y-
2)^2)-sqrt((x-1)^2-(y-1)^2)+2});
```

O2=(1,16; -1,80)

Como ya es habitual en comentarios precedentes, las ecuaciones siguen siendo complicadas, pero aquí, además, la construcción sintética requiere establecer unas conexiones conceptuales importantes (mediatriz, potencia, eje radical, centro radical) y, por tanto, se trata de un procedimiento más rico en conexiones. Por el contrario, el planteamiento analítico sigue utilizando el concepto de distancia, si bien tiene la dificultad añadida de considerar que la circunferencia dada puede ocupar una posición interior o exterior, y que ésta se fija con el signo de la constante que representa la longitud del radio.

6. Circunferencia que pasa por un punto y es tangente a dos circunferencias dadas

Solución sintética.

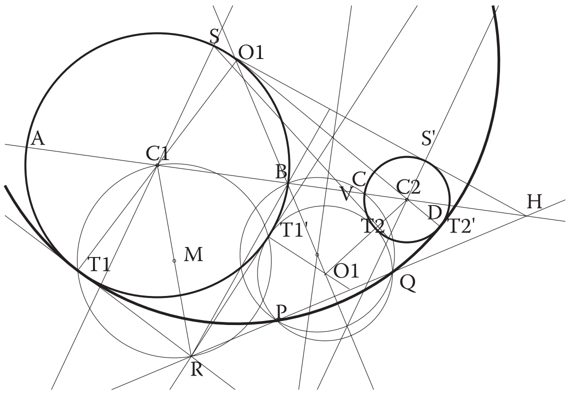


Figura 10. Circunferencia que pasa por un punto dado y es tangente a dos circunferencias dadas

Considerando que los centros de las circunferencias dadas son C_1 y C_2, que sus radios respectivos son r_1 y r_2, y que el punto dado es *P*, como muestra la figura 10, es muy sencillo calcular el centro de la homotecia directa de las circunferencias dadas, *H*, y el centro de la homotecia inversa, *V*. Los puntos *B* y *C* son inversos uno de otro en la inversión de polo *H* y potencia la misma que la razón de la homotecia de centro *H*, y el concepto de potencia implica que cualquier circunferencia que contenga a esos dos puntos (*B* y *C*) es una circunferencia tal que sus pares de puntos alineados con *H* son inversos uno de otro. Ahora se considera la circunferencia determinada por *P*, *B* y *C*. Esta circunferencia determina con las dos circunferencias dadas los ejes radicales (en la figura sólo se ha dibujado el que corta a *PH* en *R*), y este punto, *R*, permite hallar fácilmente el punto de tangencia *T1*, ya que $RT1^2=RA\times RB=AP\times RQ$. Con el otro eje radical se hallaría otro punto de tangencia y con éste el segundo centro. Los otros dos centros se determinarían haciendo una construcción similar considerando como polo, en lugar de *H*, el centro de homotecia inversa *V*.

La figura 11 muestra el caso particular con el punto P situado en la circunferencia de centro *C1*. Aquí los puntos de tangencia de la segunda circunferencia dada son *Th* y *Tv*, y los centros respectivos *Oh* y *Ov*.

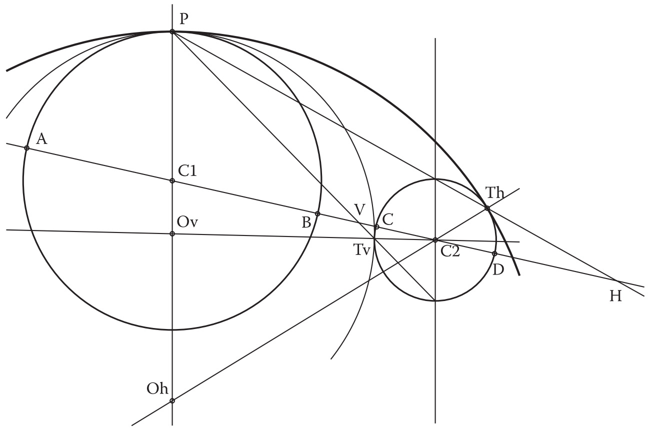


Figura 11. Circunferencia tangente a otras dos dadas conocido el punto de tangencia de una de ellas.

Solución analítica.

El centro, *O*, de la circunferencia solución, *C*, equidista del punto y de las circunferencias dadas y cuando éstas son exteriores tiene cuatro soluciones. Los centros de las circunferencias solución, *O1*, *O2*, *O3* y *O4*, son las soluciones de los cuatro siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} dist(O,P) = dist(O,C_1) - r_1 \\ dist(O,P) = dist(O,C_2) \pm r_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dist(O,P) = dist(O,C_1) + r_1 \\ dist(O,P) = dist(O,C_2) \pm r_2 \end{cases}$$

En esta construcción sintética entra en juego el concepto de inversión y su relación con el de potencia y eje radical y, por tanto, ésta es muy rica en conexiones, pero no es fácil establecerlas y, según la clasificación de dificultades de Socas (1997), bastantes alumnos pueden tener dificultades ligadas a los procesos de pensamiento matemático. La aprehensión de estos saberes supone un aprendizaje mayor, pero desde el punto de vista de los niveles de Van Hiele, esta construcción podría estar en el cuarto nivel y, consecuentemente, las dificultades de aprendizaje son notorias.

7. Circunferencia que es tangente a dos rectas y a una circunferencia dadas

Solución Sintética.

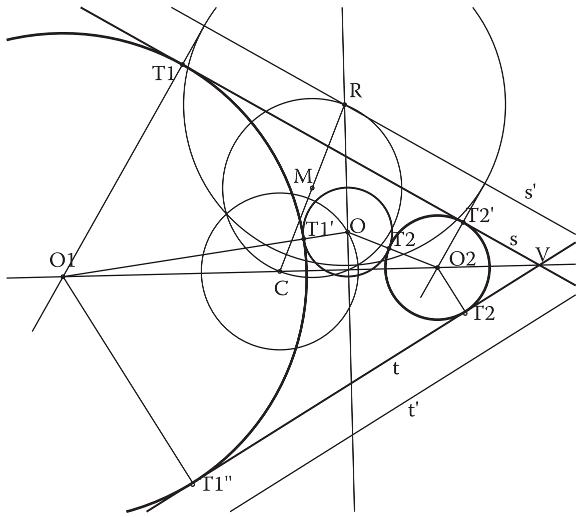


Figura 12. Circunferencia tangente a otra circunferencia y a dos rectas dadas

La figura 12 muestra este procedimiento y en ella se han considerado que los datos son las rectas *s* y *t*, y la circunferencia de centro *O* y radio *r*. Este caso se puede reducir al caso 4, ya tratado antes, considerando las rectas *s'* y *t'* paralelas a las dadas y separadas de éstas el radio de la circunferencia dada. Así, ahora se considera el problema de trazar la tangente a estas nuevas rectas *s'* y *t'* pasando por el centro, *O*, de la circunferencia dada. Las circunferencias solución del problema original tienen el mismo centro que las circunferencias solución a este problema y sus radios, *OT1* y *OT2* son *r* unidades menor que *O1O*. También se podían haber considerado paralelas interiores y, entonces, el radio tendía que aumentarse en *r* unidades.

Se podrían considerar casos particulares que tendrían que ver con la posición de la circunferencia respecto de las rectas dadas, casos que se resuelven con cierta facilidad y que no consideramos aquí.

Solución analítica.

El centro, *O*, de la circunferencia solución, *C*, equidista de la rectas dadas y de la circunferencia dada. Por tanto, *O* es la solución de los sistemas que expresan esa equidistancia:

$$\begin{cases} dist(O,s)=dist(O,t) \\ dist(O,s)=dist(O,C)-r \end{cases} \qquad \begin{cases} dist(O,s)=dist(O,t) \\ dist(O,s)=dist(O,C)+r \end{cases}$$

Los comentarios del problema anterior siguen siendo válidos también aquí.

8. Circunferencia que pasa por un punto y es tangente a una recta y a una circunferencia

Solución Sintética.

Se considera la figura 13 y en ella los datos son el punto *P*, la recta s y la circunferencia de centro *O* (que tiene radio *r*). La clave consiste en considerar una inversión de polo *P* y potencia arbitraria (por ejemplo, la potencia de la circunferencia dada respecto del punto *P*) La circunferencia de centro *P* y radio *PA* (distancia de *P* a los puntos de tangencia de las tangentes a la circunferencia dada que pasan por *P*) es una circunferencia de puntos dobles en la inversión anterior, y la consideración de esta circunferencia es la clave de la solución de este problema. Ahora se dibuja la circunferencia inversa de la recta dada (circunferencia de centro *C* y radio *CP*) y a continuación se trazan las cuatro tangentes comunes a esta circunferencia y a la circunferencia dada (*T1T1', T2T2', T3T3', T4T4'*). Se hallan las inversas de estas tangentes, ya que como la inversión conserva los ángulos, al ser tangentes a la circunferencia dada y a la circunferencia inversa de la recta dada, sus inversas, que son circunferencias, pasan por *P* y son tangentes a la recta y a la circunferencia dadas. Por otra parte, como la circunferencia de centro *P* y radio *PA* es de puntos dobles, los puntos de intersección de las rectas tangentes con esta circunferencia son puntos de las circunferencias solución y por tanto, los centros de las mismas se hallan trazando las mediatrices de los segmentos determinados sobres las rectas tangentes por la circunferencia de puntos dobles y por las mediatrices de los segmentos que determinan los puntos anteriores con *P*. La precisión es importantísima y se recomienda hacer el trazado con *Autocad*, ir marcando los pasos con colores o grosores y trazos de puntos, y tener sumo cuidado en los enlaces para no considerar puntos que por proximidad a los que se deben se confundan con ellos. La posibilidad de agrandar la imagen en pantalla facilita (posibilita) esta labor y con ella se eliminan los errores.

Solución analítica.

El centro, *O*, de la circunferencia solución, *C*, equidista de los tres objetos dados y se obtienen cuatro soluciones, dos cuando la circunferencia dada sea tangente exterior y otras dos cuando sea tangente interior a la circunferencia solución, Denotando por *P* al punto dado, por *t* a la recta dada y por C_1

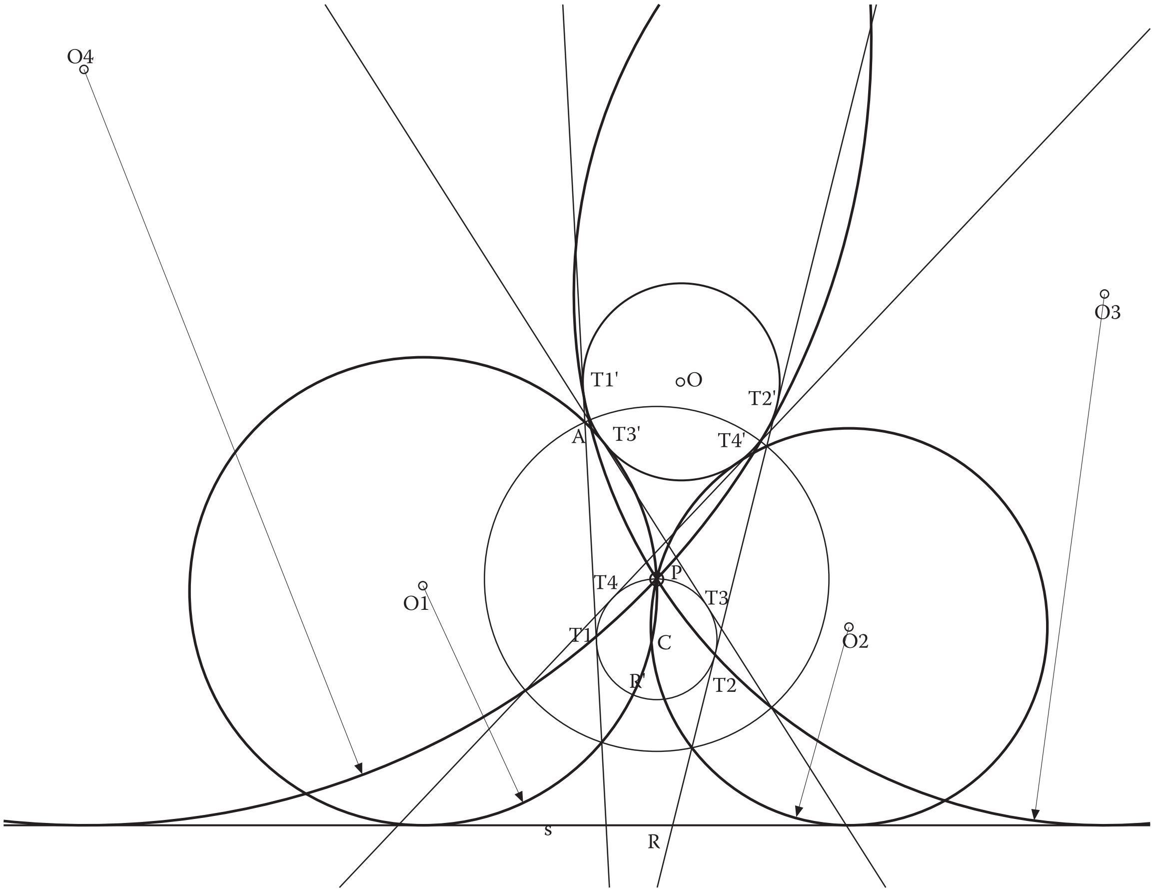


Figura 13. Circunferencia tangente a una recta, a una circunferencia y pasando por un punto

y r_1 al centro y radio de la circunferencia dada se tienen los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} dist(O,P) = dist(O,t) \\ dist(O,P) = dist(O,C_1) - r_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dist(O,P) = dist(O,t) \\ dist(O,P) = dist(O,C_1) + r_1 \end{cases}$$

Los comentarios anteriores siguen siendo válidos aquí y, además, en este caso se introducen los conceptos de autoinversa y autoinversa de puntos dobles. En este caso tienen especial importancia el hecho de que la inversión conserve los ángulos y la propiedad de que este movimiento del plano sea involutivo. Esta construcción requiere enlazar varios pasos (bastantes) y, por tanto, está en el nivel máximo de Van Hiele, lo que es un indicativo de su dificultad y de la profundidad de su razonamiento.

9. Circunferencia que es tangente a una recta y a dos circunferencias dadas

Solución sintética.

Si en lugar de considerar la circunferencia de centro *O* y radio r_1, la circunferencia de centro *P* y radio r_2, y la recta s_1, se consideran el punto *P*, la circunferencia de centro *O* y radio r_1+r_2, y la recta s_1' (paralela a s_1 pero distante de ésta r_1, alejándose de *P*), el problema se habría reducido al anterior. Como muestra la figura 14, las circunferencias solución de este nuevo problema resuelven el de partida considerando circunferencias con centros en los mismos puntos, *O1* y *O3*, y radios respectivos R_1-r_2 y R_4-r_2. Con la misma circunferencia de radio r_1+r_2 y la paralela a s_1 acercada r_2 unidades a *P* se habrían obtenido otras dos soluciones, y con la circunferencia auxiliar de centro *O* y radio r_1-r_2 se habrían obtenido otras cuatro.

La figura 14 también muestra las tangentes a s_2 y a la misma circunferencia anterior obtenidas considerando la paralela s'_1 acercada r_2 unidades a *P*. Se trata de otros datos, pero se aprovecha la construcción anterior para que, ahora, se vea que los radios de las circunferencias solución se incrementan en r_2 unidades.

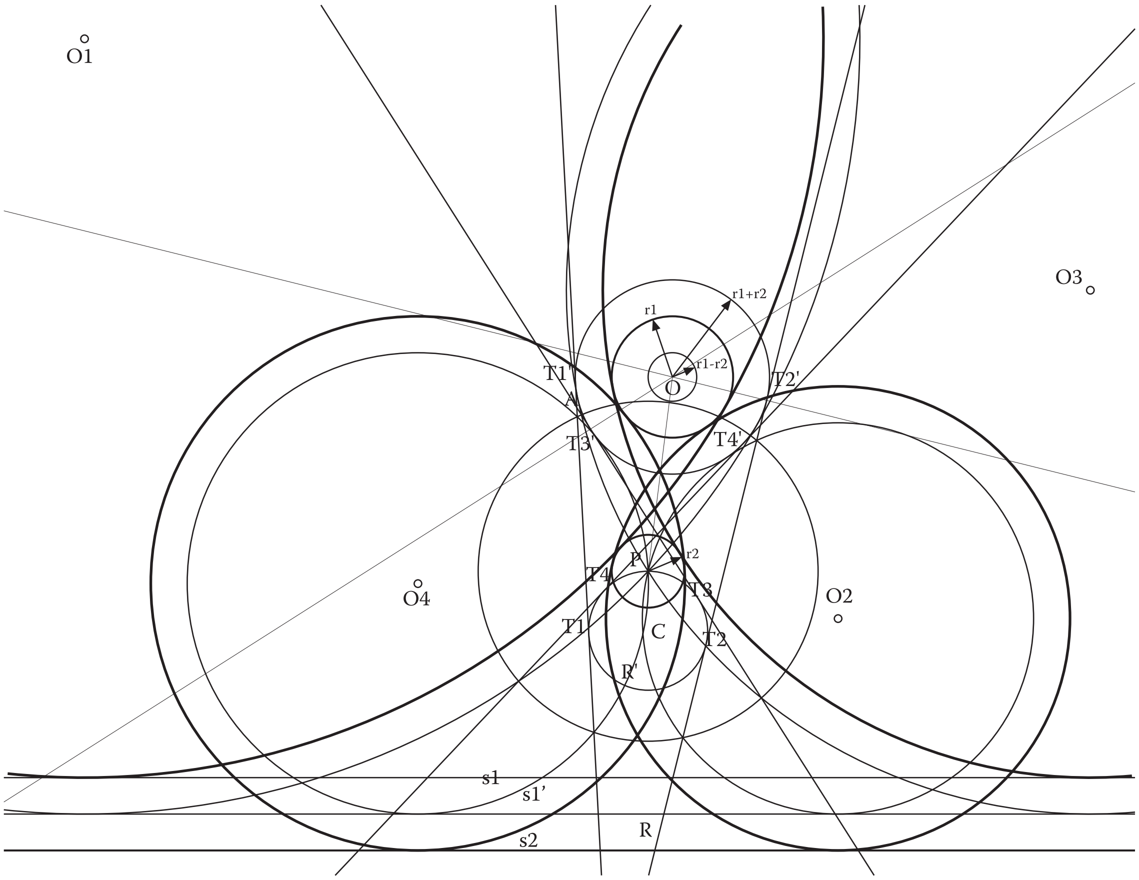


Figura 14. Circunferencia tangente a una recta y a dos circunferencias dadas

Si el punto *P*, está en la circunferencia o en la recta, el procedimiento para obtener la solución es muy fácil y, por esta razón no se explicita aquí. Sin embargo, puede ser un buen ejercicio resolverlo de forma sintética, justificando explícitamente los pasos de la construcción. Explicación y gráfico formarían un texto argumentativo, texto que en la terminología utilizada por Ibañes y Ortega (2004) tiene que tener razonamientos universales que sean capaces de explicar, convencer y persuadir de la realidad que se muestra.

Solución analítica.

El centro, *O*, de la circunferencia solución, *C*, equidista de cada una de las circunferencias y de la recta dadas (*C1*, *C2*, *t*) y las posiciones exteriores o interiores de las circunferencias dadas, respecto de la circunferencia solución, posibilitan que haya cuatro soluciones cuando aquellas sean exteriores respecto a ésta. Denotando a los centros de las circunferencias dadas por *C1* y *C2*, y a sus radios respectivos por r_1 y r_2, la siguiente tabla muestra estas cuatro posibilidades:

Exteriores	Interiores	Sistemas	Soluciones
C1 C2	-	$dist(O, C_1)-r_1=dist(O, C_2)-r2=dist(O, t)$	O_1
C1	*C2*	$dist(O, C_1)-r_1=dist(O, C_2)+r_2=dist(O, t)$	O_2
C2	*C1*	$dist(O, C_1)+r_1=dist(O, C_2)-r_2=dist(O, t)$	O_3
-	*C1 C2*	$dist(O, C_1)+r_1=dist(O, C_2)+r_2=dist(O, t)$	O_4

Los radios se obtienen evaluando una de las distancias consideradas en cada caso.

Si se considera que las ecuaciones de las circunferencias y de la recta, respectivamante, son:

$$x^2+y^2=1, \quad (x-4)^2+(y+1)^2=4, \quad y\text{-}2x=4$$

el sistema que corresponde al primer caso es éste:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \pm 1 = \sqrt{(x-4)^2+(y+1)^2} \pm 2 \\ \sqrt{x^2+y^2} \pm 1 = \dfrac{|y-2x-4|}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

Las ya citadas instrucciones de *Maple* determinan dos soluciones para el centro

```
solve({sqrt(x^2+y^2)-1-sqrt((x-
4)^2+(y+1)^2)+2,sqrt(5)*(sqrt(x^2+y^2)-1)-abs(y-2*x-4)});
allvalues(%);
evalf(%);
```

O1=(1,85; 2,67)
O2=(-0,28; -4,57)

Tanto si las circunferencias fuesen secantes, como si fueran tangentes el número de soluciones se reduce a dos ya que, en el primer caso, ambas tendrían que ser interiores o exteriores a la circunferencia solución y, en el segundo, una debiera ser exterior y otra interior. ¿Hay más casos? Sería muy interesante hacer una clasificación de todas las posibilidades, incluyendo un esquema gráfico de la posición de los datos y de las posibles soluciones.

Habría que considerar aquí los comentarios del caso anterior, teniendo en cuenta que, ahora, se trata de un problema con una etapa más.

10. Circunferencia que es tangente a tres circunferencias dadas

Solución sintética.

Si en lugar de considerar las circunferencias dadas, de centros y radios respectivos C_1 y r_1, C_2 y r_2, y P y r_3, se consideran las circunferencias de centros y radios respectivos C_1 y r_1+r_3, C_2 y r_2+r_3, y el punto P (P y r_3-r_3), este problema se reduce al caso sexto, ya tratado anteriormente. Como muestra la figura 15, la solución del problema actual tiene el mismo centro *O1* que la solución del caso sexto y el radio se incrementa en r_3 unidades. Las otras soluciones se hallan igual.

Solución analítica.

El centro, *O*, de la circunferencia solución, *C*, equidista de cada una de las circunferencias dadas (C_1, C_2, C_3) y las posiciones, exteriores o interiores, de las circunferencias dadas respecto de la circunferencia solución posibilitan que, cuando las circunferencias dadas sean exteriores, haya hasta ocho soluciones. Denotando a los centros de las circunferencias dadas por C_1, C_2 y C_3, y a sus radios respectivos por r_1, r_2 y r_3, la siguiente tabla muestra estas posibilidades:

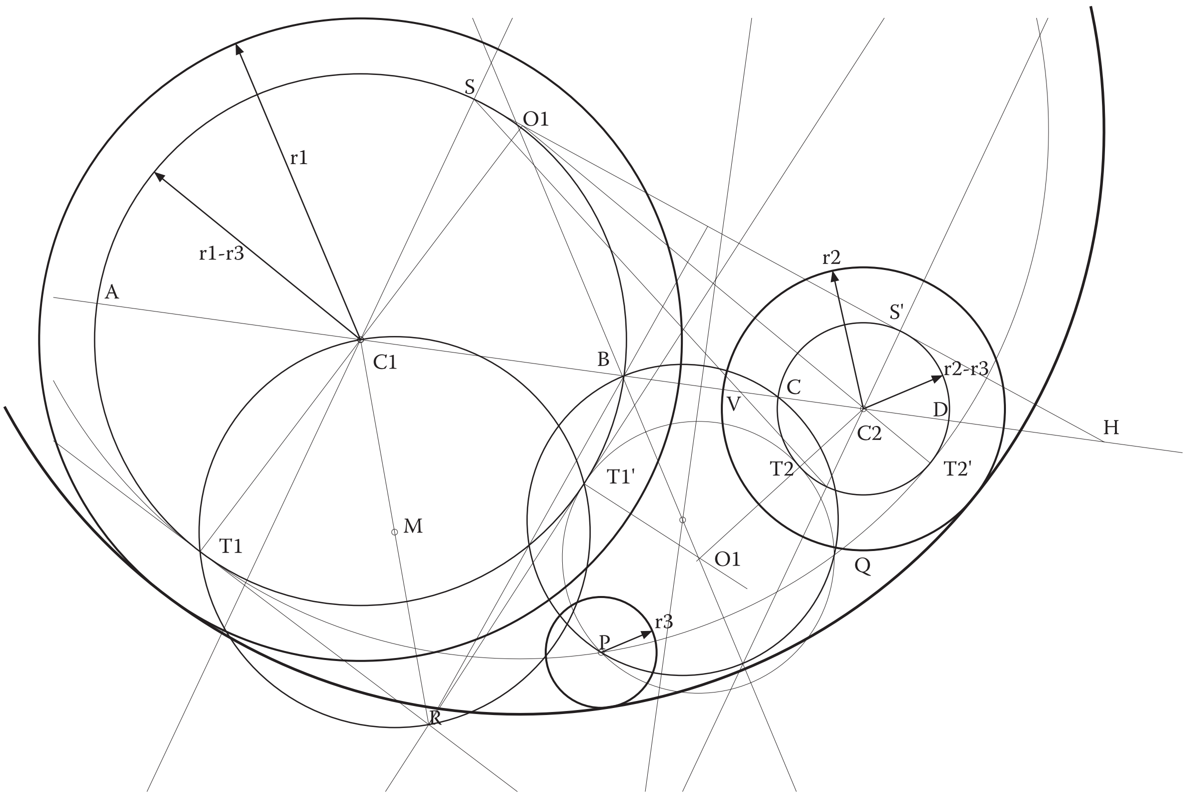


Figura 15. Circunferencia tangente a tres circunferencias dadas

Considerando las circunferencias dadas por las ecuaciones:

$$x^2+y^2=1,$$
$$(x-4)^2+(y-4)^2=4,$$
$$(x+5)^2+(y-6)^2=9,$$

analíticamente, los ocho casos resultan de combinar los signos de las constantes que se suman a los radicales. Cuando son exteriores a la circunferencia solución, el sistema correspondiente se obtiene restado y cuando son interiores sumando:

Exteriores	Interiores	Sistemas	Soluciones
C1 C2 C3	-	$dist(O, C_1)-r_1=dist(O, C_2)-r_2=dist(O, C_3)-r_3$	O_1
C1 C2	C3	$dist(O, C_1)-r_1=dist(O, C_2)-r_2=dist(O, C_3)+r_3$	O_2
C1C3	C2	$dist(O, C_1)-r_1=dist(O, C_2)+r_2=dist(O, C_3)-r_3$	O_3
C2 C3	C1	$dist(O, C_1)+r_1=dist(O, C_2)-r_2=dist(O, C_3)-r_3$	O_4
C1	C2 C3	$dist(O, C_1)-r_1=dist(O, C_2)+r_2=dist(O, C_3)+r_3$	O_5
C2	C1C3	$dist(O, C_1)+r_1=dist(O, C_2)-r_2=dist(O, C_3)+r_3$	O_6
C3	C1 C2	$dist(O, C_1)+r_1=dist(O, C_2)+r_2=dist(O, C_3)-r_3$	O_7
-	C1 C2 C3	$dist(O, C_1)+r_1=dist(O, C_2)+r_2=dist(O, C_3)+r_3$	O_8

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} \pm 1 = \sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2} \pm 2 \\ \sqrt{x^2+y^2} \pm 1 = \sqrt{(x+5)^2+(y-6)^2} \pm 3 \end{cases}$$

Las soluciones calculadas con Maple para los casos primero y último, respectivamente son:

O_1=(0'32, 3'36)
O_8=(-0'76, 6'20)

Una sencilla reflexión pone de manifiesto que, cuando dos de las circunferencias dadas son secantes o tangentes entre sí y exteriores respecto de la tercera, el número máximo de soluciones se reduce a cuatro; pero también pudiera ser que dos fueran exteriores y ambas fuesen tangentes o secantes con la tercera; que fuesen dos a dos secantes o dos a dos tangentes exteriores; que las dos primeras sean interiores a la tercera y que aquellas sean secantes, tangentes o exteriores; que la primera sea interior a la segunda y que ésta sea secante con la tercera (la primera y la tercera pudieran ser exteriores, secantes o tangentes); que la primera se tangente interior a la segunda y que la tercera (también incluida en la segunda sea exterior, tangente o secante con la primera); que la primera y la segunda sean tangentes interiores a la tercera y que aquellas sean exteriores, tangentes o secantes.

Conclusiones

Realizaremos una serie de reflexiones desde la didáctica sobre los estilos propios de la geometría sintética y de la geometría analítica. En primer lugar, destaca la universalidad de la resolución algebraica que aporta el sistema de representación simbólica. El concepto de distancia permite que todos estos problemas geométricos se pueden representar fácilmente en un sistema algebraico, dando lugar a varios sistemas de ecuaciones. La resolución de estos sistemas se complica en exceso en los sucesivos problemas y en la mayor parte de los casos sólo es recomendable que se resuelvan utilizando software adecuado. Por otra parte, las construcciones con regla y compás también se complican progresivamente y las últimas estarían como mínimo en el último nivel de Van Hiele, lo que evidencia la dificultad manifiesta de su aprendizaje. Sin embargo, cuando estas construcciones sintéticas son interiorizadas, los aprendizajes son mayores. Aquí las argumentaciones son más ricas, ya que tienen que relacionar bastantes conceptos y enlazar varias etapas. Por tanto, todo indica que los dos estilos son complementarios y si se logra combinar la universalidad del Álgebra con las conexiones sintéticas, los aprendizajes habrán alcanzado las cotas más altas. ■

REFRENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CLEMENS, D.H. y BATTISTA, M. T. (1992) "Geometry and Spatial Reasoning, en *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Douglas A. Grows Ed. Macmillan Pub.Co. New York.

CAMPOS, J. (2001): *Dibujo Técnico*, Jacaryan. Madrid.

GIESECK, F.E. (1995): *Dibujo Técnico*, Limusa. México.

GUTIÉRREZ, A. y JAIME, A. (1990): "Una propuesta de fundamentacion para la Geometría: el modelo de Van Hiele", en *Teoría y práctica en Educación Matemática*, S. Llinares y M.V. Sánchez. Alfar, Utrera (Sevilla).

HAREL, G. y SOWDER, L. (1998). "Students' Proof Schemes: Results from exploratory studies". En: Dubinski, E.; Schoenfeld, A. y Kaput, J. (Eds.), *Research on Collegiate Mathematics Education*, vol. III., 234-283 . AMS, Providence, USA.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (1998): "La demostración en matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación secundaria", *Educación Matemática*, Vol 9, n.º1 2, pp. 65-104, ISNN: 0187-82988, México D.F., México.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (2002): "Reconocimiento de procesos matemáticos en alumnos de primer curso de bachillerato", *Enseñanza de las Ciencias*, ISNN 0212-4521, n.º 21 (1), pp. 49-63, Barcelona.

IBAÑES, M. y ORTEGA, T. (2004): "Textos argumentativos", *UNO*, Vol. 35, Graó, ISSN: 1133-9853, Barcelona.

LOZANO, R. L. (1987): "El problema de Apolonio", *Bol. Soc. Cast.* n.º 14, pp. 13-41, Madrid.

PUIG, P. (1976): *Curso de Geometría Métrica*, Herederos de Pedro Puig Adam, Biblioteca Matemática, S.L. Madrid.

RODRÍGUEZ, F. J. y ÁLVAREZ, V. (1990): *Dibujo Técnico*, Editorial Donostiarra, San Sebastián.

SOCAS, M. (1997): "Dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de las Matemáticas en Educación Secundaria", en *La Educación Matemática en Enseñanza Secundaria*, Edit. Rico, L. y otros. Cap. V, pp. 125-154, Hórsori Editorial, Barcelona.