

Un álgebra computacional para generar patrones geométricos

Presentamos un formalismo para desarrollar patrones geométricos, como frisos, mosaicos, rosetones y algunos tipos de fractales. Asimismo se describe una implementación computacional disponible libremente desarrollada por el presente autor. También se comenta una experiencia didáctica llevada a cabo en 4º de ESO empleando este formalismo. El álgebra se basa en los objetos figura y operador, con una extensión natural de la operación suma que resulta de gran utilidad.

We present in this paper a formalism to develop geometrical standards, like friezes, mosaics, rosettes and some types of fractals. In addition to that, an available computational implementation freely developed by the present author is described. A didactic experience carried out with students at their last year of compulsory education (4º de ESO) where this formalism was used is also commented on. The algebra is based on the objects figure and operator with a natural extension of the addition operation which is very useful.

Mosaicos, espirales, frisos, rosetones, fractales y otros patrones geométricos son imágenes capaces, al mismo tiempo, de resultar atractivas a la vista e intrigantes al intelecto (Coxeter, 1961 y Mandelbrot, 1982). De alguna forma, la búsqueda y comprensión a nivel intuitivo de una regularidad natural no trivial resulta siempre un impacto estético. Para Kant tal impacto justifica la conexión intrínseca entre el mundo y la mente (Kant, 1968). Esta idea no deja de ser sugerente aunque tales vuelos metafísicos sean excesivos para nuestras mentalidades más prácticas.

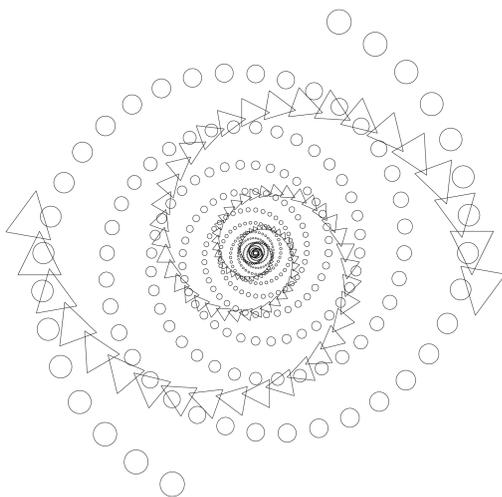


Figura 0. Una doble doble espiral

$$\begin{aligned}
 r &= (-1, 9)(-1, 11)(1, 10)(-1, 9) \\
 c &= C(0, 10, 0.5) \\
 A &= I + R(10) \cdot S(1.05) \\
 B &= I + R(-10) \cdot S(1.02) \\
 j1 &= A100r \\
 j2 &= B250c \\
 &= (I + R(180)) * (j1 + j2)
 \end{aligned}$$

Atengámonos ahora a la mencionada visión práctica. A partir de una figura simple y aplicando juiciosamente operadores de traslación, rotación y escala se pueden obtener patrones muy complejos. Presentamos en este trabajo una notación algebraica conveniente para el uso en clase, y después una implementación computacional concreta de dicha notación (libremente disponible). Ambas han sido aplicadas con éxito con alumnas y alumnos de 4º de ESO en el IES Ágora de Alcobendas (Madrid).

Javier Rodríguez Laguna
 IES Ágora (Alcobendas - Madrid)
 Instituto de Física Teórica (CSIC/UIAM).

Notación algebraica para operadores geométricos

Trabajaremos con dos tipos de objetos: figuras y operadores, que actúan sobre éstas. Las figuras atómicas que consideraremos son poli-segmentos y circunferencias. Los primeros se denotan por la secuencia de coordenadas de sus puntos. Un ejemplo: $a = (0,0)(10,0)(10,10)(0,10)(0,0)$ es un cuadrado de lado 10. Las segundas se especifican según esta notación: $C(x,y,R)$, donde x e y son las coordenadas del centro y R es el radio. Así, $b = C(5,2,10)$ es una circunferencia de centro $(5,2)$ y radio $R = 10$.

El conjunto de las figuras está dotado de una operación binaria interna: la *suma*, cuya semántica es meramente la aparición conjunta sobre el papel (o unión conjuntista). De esta manera, $c = a + b$ denotaría la figura que consta del cuadrado y la circunferencia (ver figura 1). La potencia de esta operación no debe ser subestimada, como veremos a continuación.

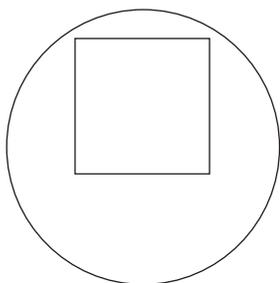


Figura 1. Un cuadrado y una circunferencia

$$c = (0,0)(10,0)(10,10)(0,10)(0,0) + C(5,2,10)$$

c

Ahora introduciremos los operadores. El primero, más simple, la identidad: I . Obviamente, no hace nada. El siguiente más sencillo es la traslación: $T(x,y)$ traslada según el vector (x,y) . La rotación $R(x,y,\alpha)$ rota una figura en torno al punto (x,y) un ángulo α . Si escribimos $R(\alpha)$ sin más, la rotación es en torno al origen.

Antes de introducir el último tipo de operador, introduzcamos las operaciones internas de suma $+$ y producto \cdot de operadores. El producto es meramente la composición de operadores, como es usual. La suma, en cambio, hereda sus propiedades de la suma de figuras. Dicho de otra forma: todos los operadores son lineales respecto a la suma de figuras.

Unos cuantos ejemplos se hacen ya imprescindibles. Podemos generar el operador $A = I + T(20,0) + T(40,0)$ y aplicarlo sobre la figura c para obtener lo que observamos en la figura 2: se crean tres copias de la figura original, o sea, de la figura 1. La primera queda sin transformar (I), la segunda se traslada veinti-

te unidades a la derecha ($T(20,0)$) y la tercera se traslada 40 unidades a la derecha.

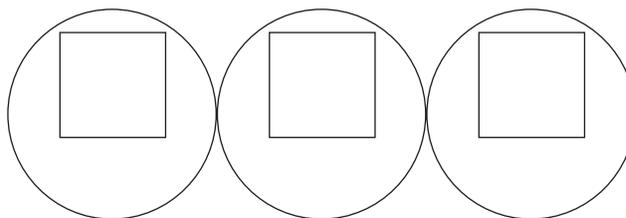


Figura 2. La figura anterior, trasladada dos veces

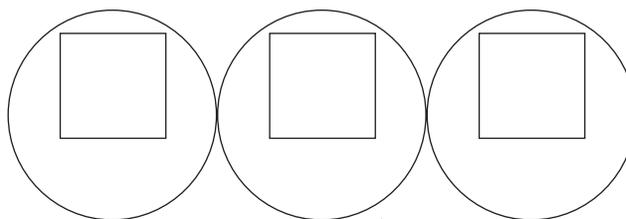
$$c = (0,0)(10,0)(10,10)(0,10)(0,0) + C(5,2,10)$$

$$c = (I + T(20,0) + T(40,0)) \cdot c$$

c

La composición de operadores también resulta muy instructiva: $B = T(20,0) \cdot T(20,0)$ es un nuevo operador que resulta de aplicar dos traslaciones consecutivas de diez pasos a la derecha. Obviamente, $B = T(40,0)$. Es el momento lógico de introducir la noción de *potencia de un operador*. Así, podemos decir que $T(20,0)^2 = T(40,0)$.

Estudiemos ahora el operador $C = (I + T(20,0))^2$. Pide la aplicación dos veces consecutivas del operador $I + T(20,0)$, que convierte cualquier figura en dos copias separadas 20 unidades en el eje horizontal. La segunda aplicación generaría cuatro copias (ver figura 3), pero la segunda copia y la tercera coinciden exactamente. Consideraremos dos figuras que solapan exactamente como la misma, así que podemos decir que se generan tres figuras. Desarrollando el cuadrado por las técnicas tradicionales tenemos $C = I + T(20,0) + T(40,0)$. De esta sencilla manera podemos obtener un friso a partir de cualquier figura: $(I + T(20,0))^{20}$ genera 21 copias de la misma figura, todas en fila.



Esta figura aparece dos veces

Figura 3: Mismo resultado que en la figura anterior, por un procedimiento diferente. La figura central es doble debido al término mixto

$$c = (0,0)(10,0)(10,10)(0,10)(0,0) + C(5,2,10)$$

$$(I + T(20,0))^2 \cdot c$$

Un rosetón se genera de idéntica manera: $D = (I + R(30))^{11}$ nos proporciona el resultado de la figura 4. Dejamos como ejercicio para el lector la realización de un mosaico en red cuadrada (figura 5) o hexagonal (figura 6).

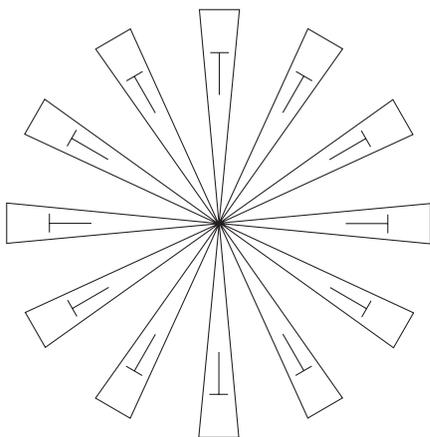


Figura 4. Un rosetón sencillo, con un ángulo base de 30°

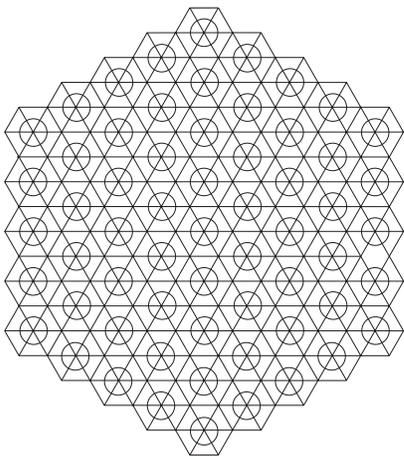
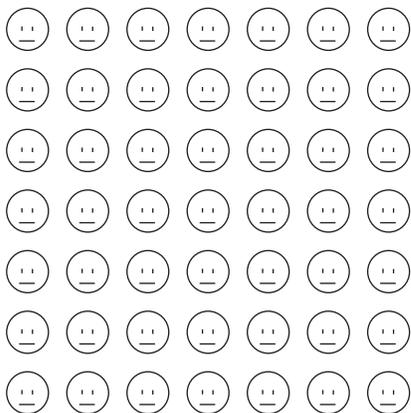
$$r=(-10,100)(0,0)(10,100)(-10,100)$$

$$r=r+(-5,80)(5,80)+(0,80)(0,60)$$

$$A=R(30)$$

$$B=(I+A)^{11}$$

$$B \cdot r$$



Figuras 5 y 6. Una red cuadrada y una red hexagonal. ¿Podrías escribir el código?

El último tipo de operador es el cambio de escala: $S(x,y,k)$ realiza una homotecia de factor k en torno al punto (x,y) . En cambio, $S(k)$ la realiza en torno al origen. Vamos a realizar la primera figura con propiedades no triviales de invariancia bajo cambios de escala (es decir: fractal). Tomemos cualquier figura r (en el ejemplo, un smiley de radio 10) y apliquemos la operación $P=S(0.5) \cdot (I+T(10,0)+T(5,8.66))$ sobre ella. ¿Qué sucede? Se distribuyen tres copias formando (aproximadamente, claro) un triángulo equilátero. El operador de escala que actúa al final reduce a la mitad el tamaño de la figura final. Volvamos a aplicar el mismo operador o , mejor, apliquemos P^2 desde el principio. Y luego, sucesivas potencias de P . Obtenemos una secuencia de figuras que converge al triángulo de Sierpinski, sea cual sea la figura de partida. Mostramos la secuencia de potencias en la figura 7.

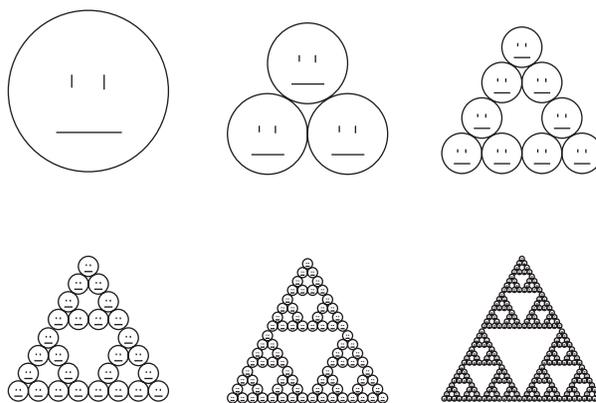


Figura 7. La formación del triángulo de Sierpinski a partir de una imagen cualquiera. Dado que la aplicación es contractiva, la convergencia es segura

$$r=C(5,5,5)+(4,6)(4,5)+(6,6)(6,5)+(3,3)(7,3)$$

$$A=S(0.5) \cdot (I+T(10,0)+T(5,8.66))$$

$$B=T(12,0)$$

$$sierp=(I+B \cdot A+B^2 \cdot A^2+B^3 \cdot A^3+B^4 \cdot A^4+B^5 \cdot A^5) \cdot r$$

$$sierp$$

Este proceso de generación de imágenes fractales es bien conocido por los especialistas (Edgar, 1990 y Fisher, 1995), y es objeto de intensa investigación en vistas a la construcción de un algoritmo de compresión de imágenes naturales que supere los defectos del JPEG.

El formalismo en el ordenador

Ha sido desarrollado, por el presente autor, un intérprete del lenguaje computacional citado. Hay unas pocas diferencias tipográficas: el producto de operadores (o la aplicación de un operador sobre una figura) se denota por $*$ mientras que la elevación del operador A a la potencia n se denota por A^n . El nombre de dicho intérprete es Programa para la Aplicación de Traslaciones y Otros Operadores: PATOO.

El intérprete se ha escrito bajo *Linux* en lenguaje C utilizando el programa libre *bison* y ha sido liberado bajo la Licencia Pública General (GPL) (que permite la copia y distribución libre bajo condiciones triviales). Posteriormente, fue portado a un popular entorno de pago. Ambas versiones pueden ser encontradas en

<http://gdlang.sourceforge.net/patoo>

La versión para *Linux* es, además, capaz de exportar gráficos PostScript, haciendo muy fácil la creación de figuras de alta calidad para impresión.

Es preciso indicar que el programa está en una fase temprana de desarrollo en cuanto a la facilidad de uso. El autor desea instar a quienes estas páginas leen para que contribuyan cualquier idea o sugerencia en la citada página web.

Aplicación didáctica

Ha sido llevada a cabo una experiencia didáctica en dos partes, con alumnas y alumnos de 4º de ESO del IES Ágora (Alcobendas). Es preciso mencionar que el tema de operadores geométricos es parte del currículum oficial, aunque normalmente está menos atendido de lo que debería. Es posible que sea debido a la formación excesivamente analítica que se recibe en la universidad española. Pero también es un factor importante la relativa ausencia de presentaciones no triviales con aspectos cuantitativos de dicho tema, que nuestra aportación desea atenuar.

La primera parte consistió en diez sesiones en las cuales se trabajó, ante todo, el concepto de coordenadas y la notación para figuras, incluyendo la *sobrecarga* del símbolo +. La idea

Mosaicos, espirales, frisos, rosetones, fractales y otros patrones geométricos son imágenes capaces, al mismo tiempo, de resultar atractivas a la vista e intrigantes al intelecto (Coxeter, 1961 y Mandelbrot, 1982). De alguna forma, la búsqueda y comprensión a nivel intuitivo de una regularidad natural no trivial resulta siempre un impacto estético.

de operador de traslación, producto de operadores, potencia de un operador y operador identidad fueron fáciles de introducir, e incluso nos permitimos discutir el concepto de operador inverso. Lo que requirió el grueso de nuestros esfuerzos en esta etapa fue la extensión del símbolo de adición para actuar entre operadores.

Una vez superada esta primera barrera, la introducción de la simbología para los operadores de rotación y escala fue comprendida sin dificultad, y pudimos pasar a la segunda etapa del proyecto: ante los ordenadores.

Por supuesto, esta segunda etapa no es *imprescindible*, pero sí muy recomendable. La razón es que con papel y lápiz se pueden desarrollar figuras interesantes, pero es cuando contamos con la potencia de cálculo de un ordenador (siquiera pequeño y desfasado) cuando los resultados se muestran impresionantes. ¡La figura 7 consta de más círculos de los que ninguna persona en su sano juicio querría dibujar jamás! (y sin embargo, el efecto merece la pena).

El proceso de enseñanza asistida por ordenador comenzó con unos ejercicios simples, que consistían en copiar programas cortos y observar el efecto. Tras esta toma de contacto pasamos a unos *acertijos* tipo tan-gram, en los que se veía la figura final y se debía encontrar el programa que la duplicaba con exactitud. Una vez superadas las dos fases, se dejó al alumnado unos días de desarrollo libre de su creatividad, en los que se consiguieron los resultados más interesantes.

Como colofón, desearía insertar aquí algunas de las figuras desarrolladas por los alumnos. Hay más en la página web citada anteriormente.

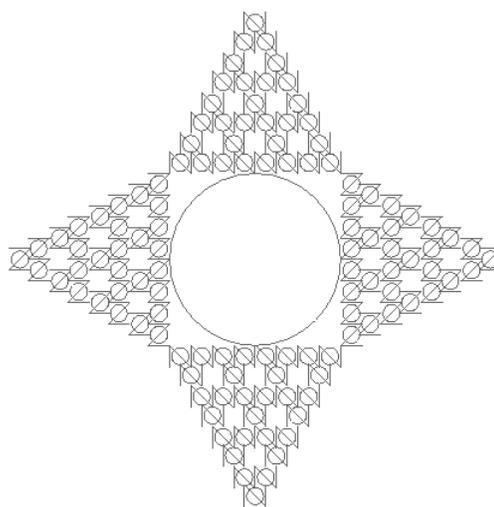


Figura 8a. Figura realizada por María Luisa Jiménez e Izhar Martín. El código está en la citada página web

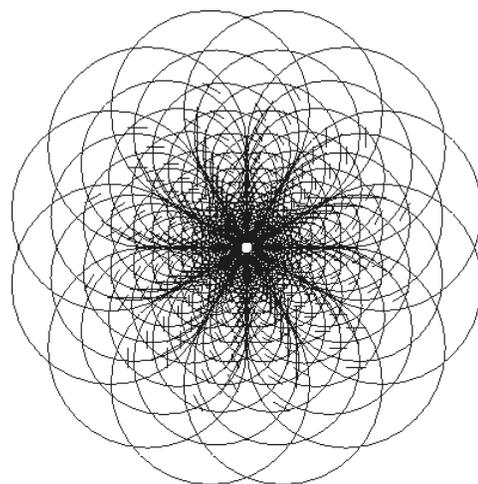
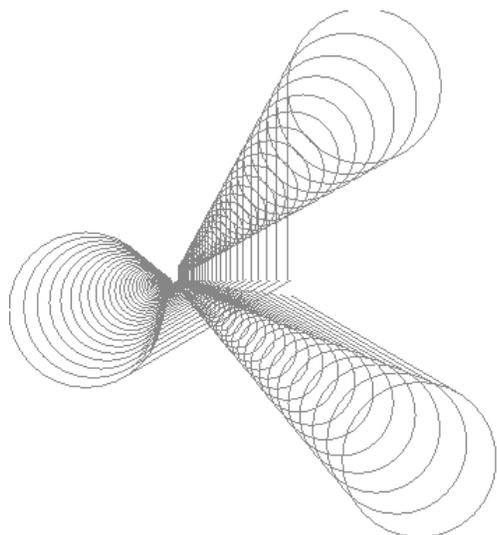


Figura 8c. Figura realizada por F. Javier García y Luis N. García. El código está en la citada página web

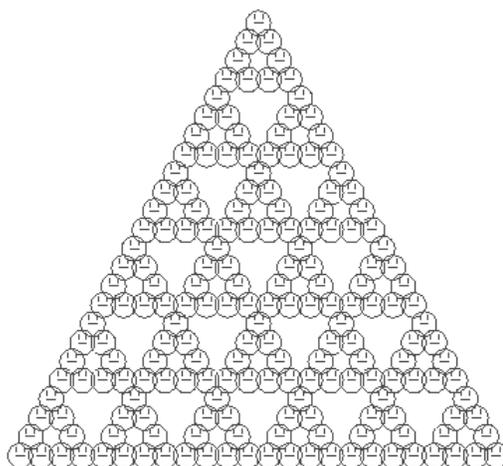
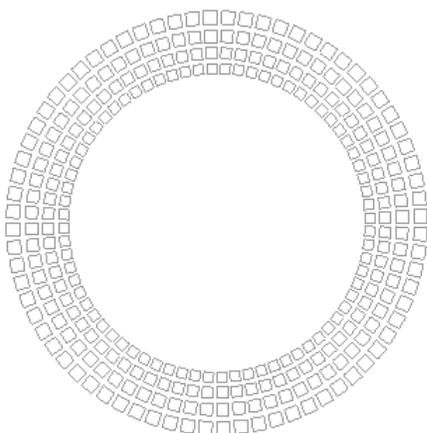


Figura 8d. Figura realizada por Javier Burgués and Álvaro Martín. El código está en la citada página web

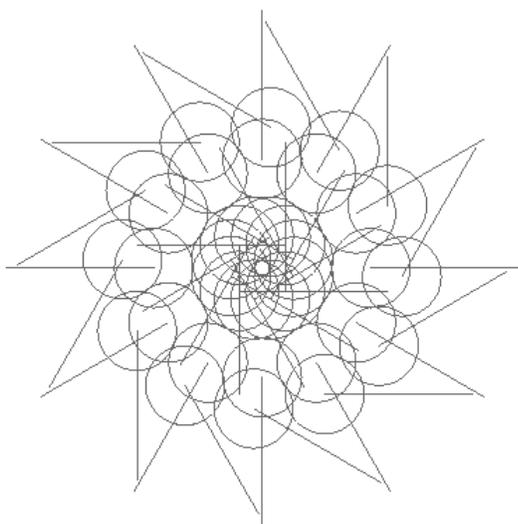


Figura 8b. Figuras realizadas por Fco. García-Calvo. El código está en la citada página web

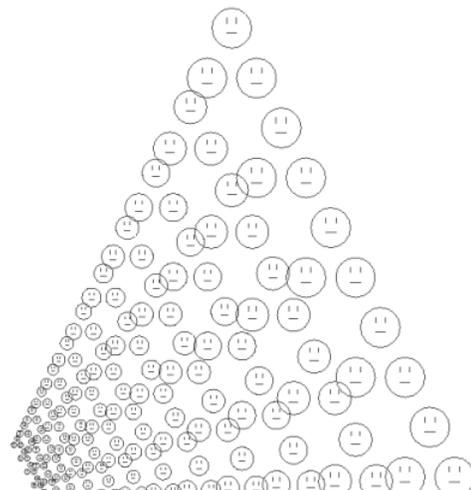


Figura 8e. Figura realizada por José María Martín y Silvia Sampalo. El código está en la citada página web

Conclusiones y perspectivas de futuro

Normalmente se considera que el álgebra de operadores, la teoría de grupos, etc. son asuntos demasiado complejos como para entrar en el currículum de la enseñanza secundaria. Esta apreciación se basa en su alto grado de abstracción. Ahora bien, recordando el consejo del profesor Puig Adam: *graduar cuidadosamente los planos de abstracción*, y teniendo en cuenta la importancia del tema en la matemática actual y en sus aplicaciones, se hace perentoria la necesidad de crear una fase *manipulativa concreta*. La geometría se presta especialmente bien para tal fin, aunque se insta a quien lea este trabajo a diseñar otros entornos similares, como podrían ser la teoría de trenzas, las permutaciones... de manera motivadora para el alumnado.

Asimismo existen muchas posibles ampliaciones para este formalismo. Hemos pensado (entre otras cosas) introducir arcos, operaciones inversivas, insertarlo en un programa de geometría interactiva en desarrollo

<http://gdlang.sourceforge.net>

y, desde luego, mejorar la interfaz. Cualquier sugerencia a javier.laguna@uam.es será bienvenida.

Agradecimientos

El autor desea agradecer sus discusiones con M.A. Martín-Delgado, G. Sierra, I. Rodríguez, M. Carrión y, especialmente, S.N. Santalla, así como la buena disposición a la investigación

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- COXETER, H.S.M. (1961): *Introduction to Geometry*, John Wiley, Nueva York.
- EDGAR, G.A. (1990): *Measure, topology and fractal geometry*, Springer, Berlín.
- FISHER, Y. (ed.) (1995): *Fractal image compression*, Springer, Berlín.

del Dpto. de matemáticas del IES Ágora. Pero, ante todo, dese expresar mi más sincero reconocimiento para mis alumnas y alumnos de 4º de ESO, que son prueba viviente de que el nivel educativo sube.

Normalmente se considera que el álgebra de operadores, la teoría de grupos, etc. son asuntos demasiado complejos como para entrar en el currículum de la enseñanza secundaria.

Apéndice: puntos técnicos

Un par de anotaciones técnicas sobre la implementación actual del PATOO: el extremo inferior izquierdo de la pantalla es el punto $(-200, -200)$ y el superior derecho es el $(200, 200)$. El símbolo # frente a una línea la convierte en un comentario. Ninguna asignación provoca la salida a pantalla: hay que dar el nombre a posteriori, como se hace en los ejemplos. Para salida a gráficos PostScript, escribir *print* y el nombre de la figura. El nombre del archivo de salida será *nuevo.ps* si se ejecuta de manera interactiva, y el nombre del archivo de comandos terminado en *.ps* en caso contrario. ■

KANT, I (1968): *Crítica del Juicio*, Losada, Buenos Aires. (Primera ed. en alemán en 1790).

MANDELBROT, B.B. (1982): *The fractal geometry of nature*, Freeman & Co., Nueva York.