SUMA 46
Junio 2004, pp. 31-35

Aplicaciones de la teoría de grafos a algunos juegos de estrategia

Al analizar algunos juegos relativamente sencillos, podemos observar que es posible seguir una estrategia que nos permite ganar si jugamos bien. El propósito de este artículo es modelar estos juegos mediante la Teoría de Grafos, revisar las estrategias seguidas para ganar y aplicarlas a otros juegos que puedan ser igualmente modelables. Para ello es fundamental comprender el concepto de núcleo de un grafo, por lo que será preciso conocer algunas definiciones básicas de la Teoría de Grafos.

For some relatively simple strategy games, a careful study of the problem may provide winning strategies, i.e., strategies which if correctly applied always allows one to win the game. The aim of this paper is first, to model these games using Graph Theory, second, to study a range of winning strategies, and finally to apply them to other strategy games which can be modelled in a similar fashion. In order to achieve this, it is essential to understand the notion of graph kernel, and thus it will be required some basic definitions in graph theory.

Observemos el juego para dos jugadores que se plantea a continuación:

El primer jugador dice un número entero del 1 al 3. El segundo jugador suma al número dicho por su contrincante 1, 2 ó 3 y dice el resultado. Entonces, el primer jugador sumará a este resultado 1, 2 ó 3 cantando el nuevo resultado, y así sucesivamente. Gana el que primero diga 31. A continuación se muestra el ejemplo de una partida:

Jugada	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
J1	3		6		12		14		18		23		26		29	
J2		4		9		13		16		21		25		27		31

Tabla 1. Ejemplo de partida

Basta jugar dos o tres partidas tratando de analizar el juego para empezar a tener una idea clara de la estrategia que se ha de seguir para ganar.

Lo que nos proponemos es buscar un modelo matemático para este juego y ver las características de la estrategia seguida para vencer, tratando de generalizarla para otros juegos que puedan modelar de la misma manera.

La base matemática de este modelo la encontraremos en la Investigación Operativa, en particular, en la Teoría de Grafos. Será fundamental el concepto de *núcleo de un grafo*, por lo que es necesario, para formalizar los conceptos, disponer de algunas definiciones elementales sobre grafos. No obstante, puede resultar que en la práctica no sea necesario representar explícitamente el juego como un grafo dirigido para obtener una estrategia ganadora, si bien esta representación siempre será posible.

Ideas básicas de la teoría de grafos

Los conceptos fundamentales de la Teoría de Grafos los podemos encontrar en multitud de libros y artículos, por ejemplo en (Bollobás, 1998).

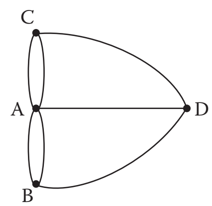


Figura 0. Grafo del problema de los puentes de Könisberg

Eduardo Martín Novo
Alfredo Méndez Alonso
Universidad Politécnica de Madrid.

Dibujar un grafo para resolver un problema es bastante común, y no se precisa de conocimientos matemáticos. Un grafo es un dibujo como el de la figura 1, y consta de vértices y de aristas que unen algunos de estos vértices.

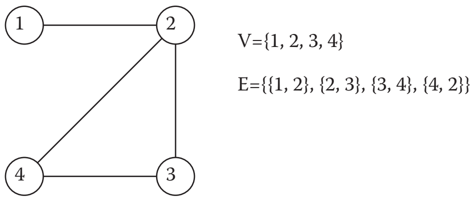


Figura 1. Ejemplo de grafo

Se pueden modelar mediante grafos multitud de situaciones, como una red de carreteras que conectan ciudades, una red eléctrica, etc. En algunos casos es necesario imponer un sentido a las aristas, por ejemplo, si se quiere representar la red de las calles de una ciudad donde aparecen direcciones únicas (Ver figura 2). Uno de los más famosos es el de los puentes de Könisberg. Esta ciudad rusa que se encuentra a orillas del río Pregel, y que en el siglo XVIII tenía siete puentes, sirvió de pretexto para un famoso problema con grafos: se trataba de pasar por todos los puentes sin atravesar ninguno de ellos dos veces.

Definición 1: Un grafo es un par $G = (V, E)$, donde V es el conjunto de vértices del grafo, siendo su cardinal $|V| = n$ entero positivo, y $E \subset V \times V$ son las aristas del grafo ($e = \{x, y\} = \{y, x\}$ es una arista, por lo que no existe orientación).

Definición 2: Un digrafo o grafo dirigido, es un par $G = (V, U)$, donde $U \subset V \times V$ son los arcos del digrafo. En los digrafos existe orientación en los arcos, es decir, $u = (x, y) \neq (y, x)$.

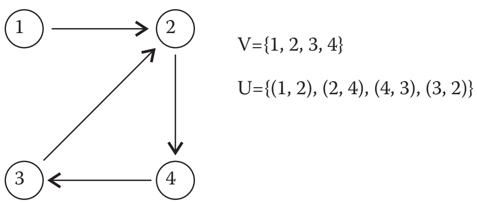


Figura 2. Ejemplo de grafo dirigido

Dado $u = (x, y)$ un arco de un digrafo, se dice que x es el vértice inicial del arco e y el *vértice final* del arco.

En el ejemplo del grafo que se muestra en la figura 2, el vértice inicial de $u = (2, 4)$ es $x = 2$ y el final $y = 4$. Obsérvese además que $u = (4, 2)$ no es un arco del grafo.

Definición 3: Un bucle es un arco en el que $x = y$ (figura 3).

Definición 4: En un digrafo $G = (V, U)$ se define el conjunto de sucesores del vértice x como $S(x) = \{y \in V \,/\, (x, y) \in U\}$, es decir, el conjunto de vértices a los que va a parar un arco que sale de x. Del mismo modo se define el conjunto de predecesores del vértice x como $P(x) = \{y \in V \,/\, (y, x) \in U\}$, es decir, el conjunto de vértices de los que sale un arco que termina en x. Podemos entonces definir el conjunto de vértices adyacentes a x como la unión de sus predecesores y antecesores $\Gamma(X) = S(x) \cup P(x)$, que son todos los vértices de los que sale un arco que termina en x o a los que llega un arco que comienza en x.

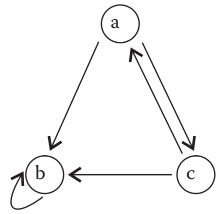


Figura 3. Ejemplo de bucle

Es importante destacar que en un digrafo (o en un grafo) es posible que para dos vértices a y b haya más de un arco (o arista) de la forma (a, b), es decir, es posible que se repitan los arcos (o aristas). Sin embargo, para nuestro propósito, supondremos que no se da esta situación.

Definición 5: Sea $G = (V, U)$ un digrafo. Un subconjunto de vértices A de V se dice que es *absorbente* si $\forall x \notin A$ se verifica

$$S(X) \cap A \neq \varnothing$$

Es decir, A es absorbente si desde un vértice que no está en A sale al menos un arco que termina en un vértice de A, o equivalentemente, desde un vértice que no está en A se puede llegar a A.

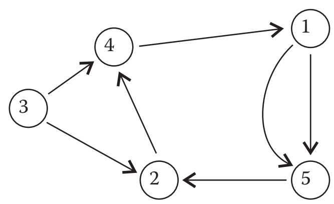


Figura 4. Ejemplo de subconjunto absorbente: A={2,4}

Definición 6: Sea $G = (V, U)$ un digrafo sin bucles. Un subconjunto de vértices A de V se dice que es *estable* si $\forall x \in A$ se verifica

$$\Gamma(X) \cap A = \varnothing$$

Es decir, no existen arcos que unan vértices de A, por lo que desde un vértice de A sólo se puede ir a vértices fuera de A.

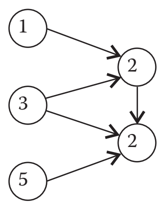


Figura 5. Ejemplo de subconjunto estable: A={1,3,5}

Definición 7: Se denomina *núcleo* de un digrafo sin bucles a un subconjunto A de vértices de V que es a la vez estable y absorbente. Es decir, un subconjunto A de vértices de V es núcleo si

$$\forall x \notin A \text{ es } S(X) \cap A \neq \varnothing \text{ y } \forall x \in A \text{ es } \Gamma(X) \cap A = \varnothing$$

Por consiguiente, A es núcleo del digrafo si desde vértices que no están en A se puede acceder a A, y desde vértices de A no se puede acceder más que a vértices fuera de A.

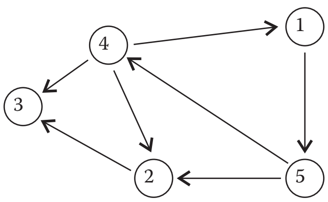


Figura 6. Ejemplo de núcleo de un digrafo: N={3,5}

Como podemos observar en la figura 7, no siempre existe núcleo.

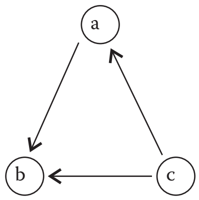


Figura 7. Ejemplo de digrafo sin núcleo

En la figura 8 se muestra un ejemplo de un digrafo en el que dos conjuntos distintos de vértices son núcleos del mismo. Por tanto, la existencia del núcleo no garantiza su unicidad.

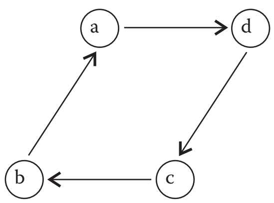


Figura 8. Ejemplo de digrafo con dos núcleos N_1={a, c}, N_2={b, d}

Análisis de juegos

Sumar 31

El desarrollo y objetivo de este juego se ha explicado ya en la introducción. Aunque no es necesario, el juego se puede modelar mediante el grafo dirigido de la figura 9. Los vértices son los números naturales del 1 al 31 y los arcos salen del vértice n hacia los vértices $n + 1$, $n + 2$ y $n + 3$, si $1 \leq n \leq 28$. Del 29 salen arcos a 30 y 31, del 30 sale un único arco a 31 y de 31 no sale ningún arco.

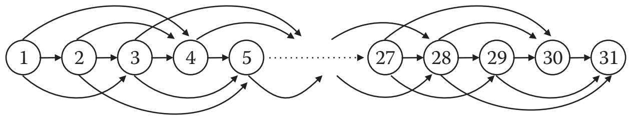


Figura 9. Modelo del juego *Sumar 31*

Es inmediato comprobar que el jugador que consigue decir el 27, tiene todo a su favor para ganar, por lo que podríamos replantear el juego con objetivo 27 en lugar de 31. Pero entonces, quien diga 23 será el más que probable ganador del juego. Razonando de esta manera, vemos que los objetivos *parciales* deben ser X = {3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31}.

Observamos que las posiciones señaladas cumplen:

i) Si un jugador dice un número que no pertenece al conjunto X, el otro jugador siempre tiene la posibilidad de decir uno del conjunto X mencionado. Por tanto es un subconjunto de vértices absorbente.

ii) Si un jugador dice un número del conjunto X, el contrincante obligatoriamente dirá un número que no está en dicho conjunto. En consecuencia es un subconjunto estable.

Como hemos comentado, un subconjunto de vértices estable y absorbente es el núcleo de un grafo. Así, podemos decir que el objetivo debe ser ocupar las posiciones del núcleo, puesto que nuestro adversario saldrá obligatoriamente de estas posiciones *ganadoras* y, a su vez, desde la situación que nos deje el contrincante, siempre podremos acceder a ellas.

Observación: Sobre este juego se pueden hacer cuantas variaciones se desee. Por ejemplo se puede jugar a que quien diga 31 pierde. También se puede fijar otro número como objetivo y decidir cuánto se puede sumar en cada turno. Siempre resulta sencillo encontrar el nuevo núcleo.

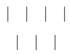
Nim

Este es un juego para dos personas. Se colocan varias filas de palillos, poniendo en cada fila dos, tres, cuatro, ... palillos.

Mover consiste en elegir una fila y retirar de ella el número de palillos que se desee, alternándose los dos jugadores.

Se puede elegir entre dos opciones: el último que quite palillos gana o el último que quite palillos pierde.

Estrategia: Con ayuda de la Teoría de Grafos, el juego es relativamente sencillo de analizar. Para simplificar la explicación, lo estudiaremos con tan sólo dos filas de tres y cuatro palillos en la versión en que pierde el último en retirar algún palillo.



El juego se puede representar con el grafo (dirigido) de la figura 10.

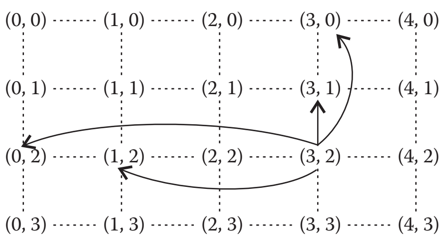


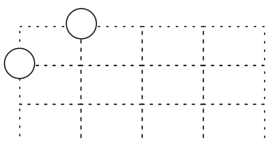
Figura 10. Modelo del juego *Nim*

Los vértices del grafo son todos los puntos de intersección de dos líneas y representan la cantidad de palillos que quedan en cada una de las dos filas. El vértice inferior derecho (4, 3) representa la situación inicial, con cuatro y tres palillos respectivamente en cada fila. El vértice superior izquierdo (0, 0) corresponde a la situación final, sin ningún palillo. Por otro lado, los arcos, que no se han pintado todos para simplificar el dibujo, saldrían de un vértice cualquiera $(x, y) \neq (0,0)$ donde x e y son enteros, con $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 3$, a los vértices (z, y) con z entero tal que $0 \leq z < x$, ó bien (x, z) con z entero tal que $0 \leq z < y$. Esto significa, en otras palabras, que

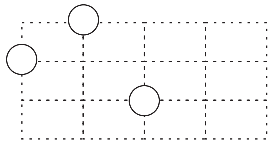
$$S((x,y)) = \{(z,y)/z \in \mathbb{Z},\ 0 \leq z < x\} \cup \{(x,z)/z \in \mathbb{Z},\ 0 \leq z < y\}$$

Como puede observarse Cardinal(S(x, y)) = $x + y$, lo cual significa que de un vértice (x, y) salen exactamente $x + y$ arcos; y Cardinal(P(x, y)) = $(4 + 3) - (x + y)$, es decir, a cualquier vértice (x, y) llegan $7 - (x + y)$ arcos. Por ejemplo, de (3, 2) salen 3 + 2 = 5 arcos a (3, 1), (3, 0), (2, 2), (1, 2) y (0, 2); y a (3, 2) llegan 7 - (3 + 2) = 2 arcos procedentes de (4, 2) y (3, 3).

Como sabemos, el núcleo del grafo nos dará las *situaciones ganadoras*, aquellas situaciones del juego que van a permitir ganar siempre (suponiendo que jugamos *bien*). Para encontrar el núcleo, conviene razonar del final al principio, buscando en las fases necesarias los vértices que lo componen. En este juego, resulta evidente observar que ganará seguro el jugador que consiga ocupar el vértice (1,0) o el (0,1).



Se trata ahora de buscar el subconjunto de vértices que nos dan las situaciones ganadoras anteriores a estas, es decir, aquellos vértices del grafo desde los que las situaciones ganadoras conocidas son inaccesibles y que, a la vez, sólo pueden dar lugar a nuevas situaciones (no ganadoras) desde las que será posible acceder a las situaciones ganaras ya conocidas. Observamos que en este caso sólo está el vértice (2, 2).



Siguiendo de nuevo el razonamiento anterior, incorporaríamos ahora el vértice (3, 3), resultando imposible ahora encontrar nuevos vértices que cumplan las condiciones requeridas. Así pues, podemos comprobar que el subconjunto de vértices $X = \{(3, 3), (2, 2), (1, 0), (0, 1)\}$ es el núcleo del grafo, puesto que es imposible moverse entre vértices de X (es un subconjunto estable), y desde un vértice que no esté en X siempre es posible acceder a otro que sí esté en X (es un subconjunto absorbente).

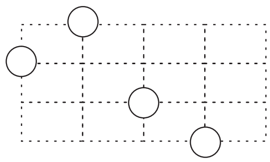


Figura 11. Núcleo del juego *Nim*

En consecuencia, sería ideal empezar quitando un palillo de la fila que tiene cuatro, es decir, situarnos en el vértice (3, 3). A continuación actuaremos buscando siempre la posición del núcleo que sea alcanzable desde la posición que nos deje nuestro rival, hasta alcanzar la posición (1, 0) o la (0, 1), obligando al adversario a retirar el último palillo.

Llegar a la meta

Es, al igual que los anteriores, un juego para dos personas. Se juega en una cuadrícula del tamaño que se desee; por fijar ideas, digamos que la cuadrícula es de 5 x 5. Una esquina, por ejemplo la superior izquierda, es la de salida y la esquina opuesta, por tanto la inferior derecha, es la de llegada.

Salida				
				Meta

Figura 12. Ejemplo de cuadrícula para el juego *Llegar a la meta*

El juego se desarrolla por turnos. El primer jugador marca la casilla de salida y, a continuación, el segundo jugador marca otra casilla situada justo debajo, justo a la derecha o en diagonal (lo que equivale a mover una posición a la derecha y una posición abajo). Ahora el primer jugador hace lo mismo desde la marca hecha por su oponente y así sucesivamente. Gana el que consiga marcar la casilla señalada como Meta (naturalmente, se puede jugar a que quien marque la meta pierde).

Este juego se puede modelar con un grafo dirigido en el que cada casilla es un vértice del grafo, y los arcos salen de una casilla a otra a la que sea posible moverse.

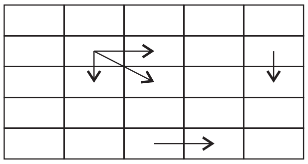


Figura 13. Ejemplo de arcos para el juego *Llegar a la meta*

Estrategia: Una vez más, las posiciones del núcleo nos darán la clave para ganar. Razonando como en el juego anterior, del final al principio en las etapas necesarias, podemos ir obteniendo los vértices que componen el núcleo del juego:

Salida				
				x

Salida				
		x		x
		x		x

Salida X		x		x
x		x		x
x		x		Meta X

Figura 14. Núcleo del juego *Llegar a la meta*

Siempre resulta sencillo encontrar el núcleo de este juego para cualquier tamaño de cuadrícula tanto si gana como si pierde quien marque la meta.

Dos montones

Se colocan sobre la mesa dos montones de palillos, no necesariamente con la misma cantidad, pero preferentemente un número pequeño si no se quiere correr el riesgo de prolongar demasiado la partida.

Cada uno de los dos jugadores tiene la opción, en su turno, de quitar un palillo del montón que quiera o, si lo prefiere, uno de cada montón.

Gana el último que pueda quitar algún palillo.

Observación: Este juego es equivalente al juego de *Llegar a la meta* y, en consecuencia, lo podríamos representar del mismo modo. Obsérvese que quitar un palillo de un montón es como desplazarnos en la cuadrícula una posición a la derecha o abajo, según el montón, mientras que retirar un palillo de cada montón, equivale a moverse una posición en diagonal. De este modo, el núcleo de este juego ha de coincidir necesariamente con el de aquél.

Por supuesto, como en la mayoría de los juegos aquí planteados, podemos cambiar el criterio para conseguir la victoria y proponer que pierda el que quite el último palillo. En este caso se puede buscar de nuevo el núcleo, que para dos montones de siete y seis palillos sería:

Salida						x
x		x		x		
						x
x		x		x		
						x
	x		x		x	Meta

Figura 15. Núcleo del juego *Dos montones* ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AVONDO-BODINO, G. (1979): “Graph Theory in Operations Research”, en *Applications of Graph Theory*, R.J. Wilson and L.W. Beineke, editors, Academic Press, London.

BOLLOBÁS, B. (1985): *Random Graphs*, Academic Press, New York.

BOLLOBÁS, B. (1998): *Modern Graph Theory*, Springer-Verlag, New York.

BONDY, J.A. and MURITY, U.S.R. (1976): *Graph Theory and applications*, 1ª Ed. Macmillan, London.

BRUALDI, R. (1977): *Introductory Combinatorics*, North-Holland, Amsterdam.

BUSACKER, R.G. and SAATY, T.L. (1965): *Finite Graphs and Networks*, 1ª Ed. McGraw, New York.

FOULDS, L.R. (1992): *Graph Theory Applications*, Springer-Verlag, New York.

HAGE, P. and HARARY, F (1991): *Exchange in Oceanea: A Graph Theoretic Analysis*, Clarendon Press, Oxford.

KÖNIG, D. (1936): *Theorie der endlichen und enendlichen Graphen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig. Reimpreso: Chelsea, New York, 1950.

MARTÍN, E., SERRANO, E., OCAÑA, J.M., PASCUAL, C. y ÁLVAREZ, R. (1997): “Materiales para el Taller de Matemáticas”, *Cuaderno n.º 17 del CEP de Fuenlabrada*, pp. 52-58. Madrid.

PICADO, J.: “Matemática Discreta”, *Actas do IX Encontro Regional da SPM*, pp. 153-194.

ROBERTS, F. (1984): *Applied Combinatorics*, Prentice-Hall.

WILSON, R.J. (1972): *Introduction to Graph Theory*, Oliver and Boyd, London.

WILSON, R.J. and BEINEKE, L.W. (1979): *Applications of Graph Theory*, Academic Press, London.

http://cosmos.imag.fr/GRAPH/english/overview.html

http://www.cs.columbia.edu/~sanders/graphtheory/

http://www.c3.lanl.gov/mega-math/gloss/graph/gr.html

http://www.graphtheory.com

http://www.inf.ufpr.br/~michel/Disciplinas/Bac/Grafos/Intro/intro.html#Def_basicas

http://www.math.fau.edu/locke/graphthe.htm

http://www.utm.edu/departments/math/graph/