SUMA 45
Febrero 2004, pp.79-86

Razonamiento numérico en problemas de promedios

En este trabajo presentamos los resultados de un cuestionario formado por cuatro problemas abiertos, a través de los cuales evaluamos la comprensión de la idea de media aritmética. Analizamos los componentes del significado que asigna una muestra de 53 alumnos de Educación Secundaria a este concepto, y, en particular, su comprensión de propiedades numéricas de este concepto.

We present results from a questionnaire with four open-ended problems, through which we evaluate students' understanding of arithmetic mean. The components of the meaning that 53 secondary school students assign to this concept are analysed, in particular the understanding of numerical ideas behind them.

Las medidas de posición central, en general, son muy utilizadas en estadística, tanto por su propiedad de convertirse en representantes del conjunto de datos, como también por ser la referencia para el estudio de otros temas; un ejemplo de ello es el de la dispersión. El concepto de media es básico para trabajar temas de inferencia estadística, mientras que el concepto de mediana, como estadístico de orden, juega un papel muy importante en la estadística no paramétrica, que tiene un gran interés cuando las distribuciones de partida no se ajustan a la distribución normal, cuando analizamos datos cualitativos u ordinales o cuando nos encontramos con muestras pequeñas. Asimismo es muy utilizada en el análisis exploratorio de datos. Por otro lado, la comprensión de las ideas de promedio forman parte de la cultura estadística básica, o *cultura que nos lleva a la imagen del subconjunto mínimo de habilidades básicas que esperamos de todos los ciudadanos en contraposición a un conjunto más avanzado de conocimientos y capacidades que sólo algunos pueden adquirir* (Gal, 2002).

En este trabajo continuamos nuestras investigaciones sobre las dificultades que los alumnos de Educación Secundaria Obligatoria tienen con las medidas de posición central (Cobo, 1988; 2001; Cobo y Batanero, 2000). Aunque este tema ya se contemplaba en los anteriores planes de estudio, el mayor énfasis que ahora se hace sobre las actividades de análisis exploratorio de datos nos lleva a replantearnos la forma en que son introducidos.

Cuando queremos reflexionar sobre la dificultad que el aprendizaje de ciertos conceptos tiene para los alumnos, es necesario comenzar por hacer un análisis epistemológico de su significado. Como indica Godino (1996), *el problema de la comprensión está íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar una teoría útil y efectiva sobre qué entendemos por comprender tales objetos. Esta explicitación requiere responder a preguntas tales como: ¿Cuál es la estructura del objeto a comprender? ¿Qué formas o modos posibles de comprensión existen para cada concepto? ¿Qué aspectos o componentes de los conceptos matemáticos es posible y deseable que aprendan los estudiantes en un momento y circunstancias dadas? ¿Cómo se desarrollan estos componentes?* (pag. 418).

El propósito de nuestro trabajo, es llevar a cabo una evaluación de la comprensión de la media aritmética que tenga en cuenta estos principios. Nos centraremos en la idea de media

Belén Cobo
IES Los Neveros. Huétor Vega. Granada.
Carmen Batanero
Universidad de Granada. Granada.

aritmética, que, aunque aparentemente es simple, tiene un carácter complejo. Un análisis profundo de los elementos en que podemos descomponer el significado de este concepto puede contribuir al diseño de propuestas didácticas que permitan diversificar el tratamiento y mejorar los resultados del proceso de enseñaza-aprendizaje. Siguiendo a Batanero y Godino (2001), vamos a considerar las siguientes entidades primarias como constituyentes del significado de la media:

- *Problemas y situaciones* que inducen actividades matemáticas y definen el campo de problemas de donde surge el objeto. Un ejemplo sería repartir una cantidad en forma equitativa, que es el tipo de problema que hemos planteado en este trabajo.

- *Procedimientos, algoritmos, operaciones*. Cuando un sujeto se enfrenta a un problema y trata de resolverlo, realiza distintos tipos de prácticas, que llega a convertir en rutinas con el tiempo. Prácticas características en la solución de problemas de promedios serían sumar una serie de valores y dividir por el número de sumandos, elaborar una tabla de frecuencias, ordenar los datos (para calcular la mediana) o realizar una representación gráfica de los datos.

- *Representaciones materiales* utilizadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos, etcetera).

- *Conceptos y proposiciones*. Las definiciones y propiedades características y sus relaciones con otros conceptos.

- *Demostraciones* que empleamos para probar las propiedades del concepto y que llegan a formar parte de su significado.

Nos centraremos particularmente en describir el razonamiento numérico de los estudiantes y analizar la forma en que puede afectar la resolución de problemas de promedios. Argumentaremos que muchas dificultades en el trabajo con promedios puede deberse a un razonamiento numérico insuficiente.

Investigaciones previas

A pesar de que la media es uno de los principales conceptos estadísticos, y base en la construcción de otros, como la media geométrica y la varianza, los estudiantes no muestran una buena comprensión de este concepto.

Por ejemplo, aunque el cálculo de la media ponderada parece sencillo, Pollatsek, Lima y Well (1981) encontraron que los estudiantes que ingresan en la universidad, especialmente los que no han seguido un Bachillerato científico, no identifican fácilmente las situaciones en las cuales se debe calcular una media ponderada ni seleccionan correctamente las correspondientes ponderaciones. Li y Shen (1992) indican que cuando los datos se agrupan en intervalos, los estudiantes olvidan con frecuencia que cada uno de estos grupos debería ponderarse de modo distinto al calcular la media y se limitan a calcular la media de todas las marcas de clase, error que también es encontrado por Carvalho (1998; 2001).

En otros casos el algoritmo se aplica de forma mecánica sin comprender su significado. Cai (1995) encontró que mientras la mayoría de alumnos de 12-13 años son capaces de aplicar adecuadamente el algoritmo para calcular la media, sólo algunos saben determinar un valor desconocido en un conjunto pequeño de datos para obtener un valor medio dado. Gattuso y Mary (1998) sugieren que el contexto y forma de representación influyen en la dificultad de los problemas de promedio.

> *El problema de la comprensión está íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar una teoría útil y efectiva sobre qué entendemos por comprender tales objetos.*

Mevarech (1983) sugiere que una explicación posible de los errores en el cálculo de promedios es que los estudiantes suelen creer que un conjunto de números, junto con la operación media aritmética constituye un grupo algebraico, satisfaciendo los cuatro axiomas de clausura, asociatividad, elemento neutro y elemento inverso. Estas y otras propiedades fueron analizadas por Strauss y Bichler (1988) con niños de 8 a 12 años, indicando que los alumnos comprenden intuitivamente algunas propiedades, por ejemplo, que la media es un valor comprendido entre los extremos de la distribución o que el valor medio está influenciado por los valores de cada uno de los datos. Por ello, la media no tiene elemento neutro.

En referencia a la comprensión de propiedades, Batanero, Godino y Navas (1997), observaron que los profesores de primaria en formación, encuentran dificultades en el tratamiento de los ceros y valores atípicos en el cálculo de promedios, en identificar las posiciones relativas de media, mediana y moda en distribuciones asimétricas, y en la elección de la medida de tendencia central más adecuada en una determinada situación y el uso de los promedios en la comparación de distribuciones.

Watson y Moritz (2000), analizan el significado intuitivo dado por los niños al término *promedio* y hallan un gran número de niños para los cuales el promedio es simplemente un valor en el centro de la distribución (es una idea próxima al concepto de mediana). Pocas veces se relaciona la palabra *promedio* con la moda y menos aún con la media aritmética. Las siguientes definiciones de *promedio* fueron obtenidas en entrevistas a niños realizadas por Watson y Moritz (2000): *Significa igual, que es normal, no eres realmente bueno, pero tampoco malo.*

En nuestra opinión, los resultados de las investigaciones que hemos descrito sobre la media muestran también que el conocimiento de las reglas de cálculo por parte de los estudiantes no implica necesariamente una comprensión real de los conceptos subyacentes. Si los alumnos adquieren sólo el conocimiento de tipo computacional es probable que cometan errores predecibles, salvo en los problemas más sencillos.

Además, el proponer el algoritmo de cálculo prematuramente puede influir negativamente en la comprensión del concepto. Por ello se debería trabajar sobre las ideas intuitivas que tienen los alumnos para ayudarles a desarrollar caminos nuevos que les permitan enriquecer los conceptos que ya tienen asimilados. A la misma conclusión llega Tormo (1993) en un estudio realizado con alumnos de 12 a 15 años.

Señalamos también que estas investigaciones se han centrado en puntos aislados de la comprensión, como por ejemplo el cálculo o la comprensión de propiedades. En nuestro trabajo estamos considerando los cinco tipos de comprensión de nuestro modelo teórico y su relación. En lo que sigue presentaremos unos primeros resultados de este trabajo.

El estudio

Nos basamos en los resultados de un cuestionario pasado a una muestra formada por 24 alumnos y 29 alumnas de primer y cuarto cursos de Educación Secundaria Obligatoria, respectivamente, cuyas respuestas se clasificaron teniendo en cuenta los elementos de significado de la media que usaron los alumnos, a partir de sus respuestas a un cuestionario que describimos en la sección siguiente.

	4º ESO		1º ESO	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Media como reparto	11 (37,9)		8 (34,7)	2 (8,7)
Media como representante	2 (6,9)		1 (4,3)	
Cálculo media datos aislados	5 (17,2)		4 (16,4)	
Media no es operación interna	3 (10,3)	1 (3,4)	3 (13)	1 (4,3)
Media en el rango de variación		1 (3,4)		
Confunde media y moda		3 (10,3)		

Tabla 1. Frecuencias y (porcentajes) de elementos usados en el Ítem 1a.

Una vez recogidos los datos, se realizó un análisis de contenido de las respuestas dadas a cada una de las preguntas planteadas en los diferentes ítems de la prueba. Puesto que las respuestas eran abiertas, no se limitan a dos opciones (correctas/incorrectas) sino que se pidió a los alumnos que las razonaran, al justificarlas tenían libertad para emplear los diferentes elementos de significado previstos en el análisis a priori de los ítems.

A continuación presentamos los problemas propuestos y la clasificación de las respuestas obtenidas en cada uno, con ejemplos de las mismas y análisis de los resultados. Sólo tendremos en cuenta las respuestas aportadas, ya que algunos alumnos no respondieron algunos de los ítems.

Valor medio como operación

Nos hemos interesado, en primer lugar por la comprensión de los alumnos y alumnas sobre las propiedades numéricas de la media, cuando consideramos a ésta como un valor obtenido al operar en un conjunto numérico. Al contrario que otras operaciones que los alumnos conocen como la suma o el producto, la media no es una operación interna en el conjunto de los números enteros. El siguiente ítem trata de evaluar la comprensión de esta propiedad.

Ítem 1. *Un periódico dice que el número medio de hijos por familia en Andalucía es 1,2 hijos por familia.*

a. Explícanos qué significa para ti esta frase.

b. Se han elegido 10 familias andaluzas y el número medio de hijos entre las 10 familias es 1,2 hijos por familia. Los García tienen 4 hijos y los Pérez tienen 1 hijo, ¿cuántos hijos podrían tener las otras 8 familias para que la media de hijos en las diez familias sea 1,2? Justifica tu respuesta.

En el apartado a) queremos que los alumnos expresen con sus propias palabras su interpretación de un valor medio cuyo resultado es no entero, a pesar de que la variable de referencia sea entera. Ha sido tomado de Watson (2000) y se han obtenido los siguientes tipos de respuesta, que tienen en cuenta, tanto el cálculo, como las propiedades que usan los alumnos:

- Respuestas en que se indica el algoritmo de cálculo correcto de la media de una variable discreta con datos aislados: *que han sumado y lo* *han dividido y le han salido 1,2.*

- Respuestas correctas, con idea de media como representante de los datos: *pienso que significa que el número representativo de hijos por familia*.

	4º ESO		1º ESO	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Inversión del algoritmo de la media	7 (24,1)		6 (26,1)	2 (8,7)
Dar una distribución de media dada	11 (37,9)		8 (34,7)	
Media como operación interna		1 (3,4)		
Errores de cálculos aritméticos		3 (10,3)		
Otros errores		8 (27,3)		4 (17,3)

Tabla 2. Frecuencias y (porcentajes) de elementos usados en el Ítem 1b.

- Correcto, con idea de media como reparto equitativo: *quiere decir que al menos cada familia tiene un hijo, algunos tienen 2 o 3, y otras no tienen ninguno, pero al hacer esa media sale ese porcentaje.*

- Correcto, enfatizando que la media no es una operación interna. Para ilustrar puede servir el mismo ejemplo anterior.
- Incorrecta, confundiendo media y moda: *que han hecho la media y lo más frecuente es entre 1 o 2 hijos en Andalucía*.

- Incorrecta, confundiendo media y valor mínimo: *cada familia tiene como mínimo 1,2 hijos.*

En la tabla 1 se presenta un resumen de los resultados obtenidos en la que hacemos notar que la mayor parte de los alumnos realiza un cálculo correcto y reconoce diversas propiedades numéricas de la media (reparto equitativo; no ser operación interna), aunque también en algunos casos se presentan algunos errores, éstos son poco frecuentes. No se observan diferencias entre los dos grupos de alumnos.

Obtención de un conjunto numérico que produzca un valor promedio

En el apartado b) del ítem anterior los alumnos deben construir una distribución de datos que tenga un valor medio dado. Esta actividad es relativamente compleja, puesto que supone, además del conocimiento del algoritmo de cálculo de la media, la comprensión de la idea de distribución, como propiedad de un colectivo. Hemos encontrado las siguientes respuestas:

a. Respuesta correcta, basada en la inversión del algoritmo de cálculo de la media, pero sin dar una distribución concreta que cumpla la condición impuesta. En su lugar, se da la suma total de los datos: *Las otras 8 familias tienen que sumar un total de 7 niños. Porque al hacer esa media necesitamos 12 niños.*

b. Encontrar una o varias distribuciones que tengan como media el valor dado: *De las 8 familias, que 7 de ellas tengan 1 hijo y la octava que no tenga hijos...*

c. Incorrecta, con errores de cálculo, aunque con un planteamiento algebraico de inversión del algoritmo correcto.

d. Incorrecta por no tener en cuenta la propiedad del la media de no ser operación interna puesto que aportan una distribución de valores no enteros, no acorde a la situación planteada: *Podrían tener dos niños. Porque la media es de 9'6 niños entre las 8 familias*:

Familia	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
N.ª hijos	2	1	1	1,6	1	1	1	1

e. Otros errores, como no dar una distribución con estas condiciones, sino el valor de una media no pedida en el enunciado:

Garcías-4	Familia	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª
Pérez-1	N.ª hijos	2	1	1	1,6	1	1	1	1

Podrían tener un hijo por familia, pero no sabrá explicar por qué. Creo que es porque de 10 familias que elijo, cojo 8 y los divido me da 1,25. Pero no es correcto.

Hemos presentado los resultados de la segunda parte del ítem 1 en la Tabla 2. También en este caso la mayor parte de los estudiantes presenta un razonamiento numérico correcto. Una tercera parte han invertido el algoritmo de la media y otra tercera parte han dado una distribución que se ajusta a lo pedido mostrando una comprensión de las ideas de distribución, y media como reparto equitativo, pero sin llegar a la inversión del algoritmo. Los principales errores se producen porque no se ha comprendido el enunciado y se da un valor no pedido de la media, errores de cálculo y en algún caso no se comprende que la media no es una operación interna.

Cálculo de medias ponderadas

La ponderación correcta en el cálculo de la media, supone capacidad de aplicar la ley distributiva al sumar un conjunto de valores numéricos repetidos y también percibir que la operación promedio no tiene la propiedad asociativa. Para comprobar si los alumnos comprenden estas propiedades y las aplican al cálculo de la media ponderada hemos utilizado el siguiente ítem:

Ítem 2. *Maria y Pedro dedican una media de 8 horas cada fin de semana a hacer deporte. Otros 8 estudiantes dedican cada semana una media de 4 horas a hacer deporte.*

a. ¿Cuál es el número medio de horas que hacen deporte cada fin de semana los 10 estudiantes?

b. María y Pedro dedican además 1 hora cada fin de semana a escuchar música y los otros 8 estudiantes, 3 horas. ¿Cuál es el número medio de horas que escuchan música los 10 estudiantes?

c. ¿Cuál sería el número medio de horas que estos 10 estudiantes dedican, cada fin de semana, entre las dos actividades: hacer deporte y escuchar música?

En el primer apartado, las respuestas obtenidas han sido:

	4º ESO		1º ESO	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Cálculo de media con datos aislados (Am1) (DM2)	5 (17,2)			5 (21,7)
Cálculo de media ponderada (Am2) (DM2)	11 (37,9)	7 (24,1)	2 (8,7)	4 (17,4)
Errores varios no relacionados con los promedios		1 (3,4)		4 (17,4)
Total	16 (45)	3 (10,3)	2 (8,7)	13 (56,5)

Tabla 3. Frecuencias y (porcentaje) de elementos usados en el 2a.

a. Correcta, pero en lugar de ponderar, los alumnos reproducen los datos aislados y calculan la media de una variable discreta con datos aislados.

b. Correcta, mediante el cálculo de una media ponderada, directamente a partir de los datos del problema.

c. Incorrecta, al calcular la media sin ponderar los pesos relativos a cada valor de la variable, por no comprender adecuadamente que la media no tiene la propiedad asociativa: *1,2 horas de media.*

	4º ESO		1º ESO	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Cálculo de media con datos aislados	5 (17,2)			
Cálculo de media ponderada	11 (37,9)	1 (3,4)	3 (13)	2 (8,7)
Definición de media ponderada	5 (17,2)	5 (17,2)		
Definición de media	11 (37,9)		3 (13)	1 (4,3)
Propiedad asociativa		1 (3,4)		
Conocimiento del algoritmo de la media		4 (13,8)		
Errores no relacionados con los promedios		5 (17,2)		3 (13)

Tabla 4. Frecuencias y (porcentaje) de elementos usados en el 2b.

d. Incorrecta, por un planteamiento incorrecto del problema, por ejemplo, aplicar incorrectamente una proporcionalidad: *He hecho los cálculos con proporciones y con el resultado he sumado las medias (7 dias)/4h= (2dias) /1,1 h; 1,1h+8h= 9,1h.*

Los resultados (Tabla 3) revelan que una parte de los estudiantes muestra dificultades en ponderación, por lo que asocian incorrectamente la propiedad asociativa a la operación de promediar, haciendo una generalización incorrecta de esta propiedad que ellos conocen para la suma y el producto.

Asimismo, encontramos un número importante de otros errores, por aplicación incorrecta de razonamiento proporcional, debido a que el enunciado del problema guarda una cierta semejanza con los enunciados relacionados con dicho tema.

Los resultados del apartado b) son similares a los del apartado anterior, como se muestra en la Tabla 4 y se observan los mismos tipos de respuestas.

Operaciones con promedios

Por último, en el apartado c) del ítem 2 los alumnos deben ser capaces de operar con promedios para hallar la media de la suma. Queremos ver si los alumnos comprenden y son capaces de aplicar la propiedad de que la media de la suma de variables es igual a la suma de las medias. Encontramos las siguientes respuestas:

- Respuesta correcta, aplicando la propiedad de que la media de las sumas de dos variables coincide con la suma de las medias: *Decidan 1.6 horas cada fin de semana a hacer deporte y escuchar música*, tras haber calculado previamente las medias de las dos variables: 1,2 y 0,4, respectivamente.

- Correcta, haciendo un cálculo de media ponderada, pero sin aplicar la propiedad anterior, ya que los alumnos calculan primeramente la variable suma de las dos dadas y luego calculan la media de dicha variable.

- Incorrecta, al no considerar que el cálculo de la media, como operación algebraica, es asociativa, cuando no lo es: teniendo en cuenta que las medias de las variables calculadas previamente son 4.8 y 2.4, respectivamente. *(4,8 + 2,4)/2 = 3,6.*

	4º ESO		1º ESO	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Media de suma como suma de medias	3 (10,3)			2 (8,7)
Cálculo de media ponderada	4 (13,8)	5 (17,2)	2 (8,7)	2 (8,7)
Media no es asociativa		4 (13,8)	4 (17,4)	

Tabla 5. Frecuencias y (porcentaje) de elementos usados en el Ítem 2c.

- Incorrecta, con errores varios en el cálculo de una media ponderada de las dos variables consideradas: *4,5 horas + 0,875 horas = 5,375 horas; 5,375 horas:10 estudiantes = 0,5375 horas.*

Nuevamente encontramos los principales problemas en la ponderación y la propiedad asociativa, por lo que estos resultados sugieren que estas dos propiedades son difíciles para los alumnos. En este caso el problema ha resultado difícil, pues han sido pocos los alumnos que llegan a una solución final correcta.

La suma de las desviaciones a la media

Una interpretación posible de la media es como reparto equitativo, y otra como mejor estimación de una cantidad desconocida, en presencia de errores de medida. Estas dos interpretaciones se apoyan en la propiedad de que la suma de las desviaciones de los datos a la media es nula. Es decir, cada dato que está por encima de la media, debe compensarse con otros por debajo de ella. El siguiente ítem tomado de Tormo (1993) trata de evaluar la comprensión de esta propiedad.

	4º ESO		1º ESO	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Media como reparto equitativo	2 (6,9%)	3 (10,3%)	4 (17,4)	
Medio en el centro de gravedad	2 (6,9%)		3 (13)	9 (39,1)
Suma de desviaciones	6 (20,7%)		1 (4,3)	5 (21,7)

Tabla 6. Frecuencias y (porcentaje) de elementos usados en el Ítem 3.

Ítem 3. *Cuatro amigos se reúnen para preparar una cena. Cada uno de ellos trajo harina para hacer la masa de las pizzas. Como querían hacer cuatro pizzas del mismo tamaño, los que habían traído más harina regalaron a los que llevaban menos. ¿La cantidad de harina regalada por los que habían traído mucha fue mayor, menor o igual a la recibida por los que habían traído poca? ¿Por qué piensas eso?*

En este ítem se han obtenido las respuestas que siguen:

- Correcta, considerando la media como una cantidad equitativa al hacer un reparto en una distribución uniforme o centro de gravedad de una distribución: *Es igual porque al final se quedaron todos con la misma harina.*
- Correcta, aplican la propiedad *la suma de desviaciones sobre y bajo la media son iguales: Es igual porque la cantidad de harina que dan los que tienen mucha es igual a la cantidad de harina que los que la reciben.*
- Incorrecta, con un error subyacente de obviar el hecho de que la media permite hacer un reparto equitativo: *Fue menor ya que al final tendrán que tener todos la misma cantidad.*

Ítem	4º ESO (n=29)	1º ESO (n=24)
1a	21 (72,4%)	16 (66,7%)
1b	18 (62,1%)	16 (66,7%)
2a	16 (45%)	2 (8,3%)
2b	16 (45%)	3 (12,5%)
2c	7 (24,1%)	6 (25%)
3	8 (27,7%)	5 (21,3%)
4	13 (44,8%)	10 (43,5%)

Tabla 8. Dificultad comparada de los ítems. Frecuencias (porcentajes) de respuestas correctas.

Fueron pocos los alumnos que manifiestan un error en este ítem, aunque menos de la mitad de los alumnos dan la solución correcta y parecen comprender la propiedad de la suma de desviaciones, por lo que el problema resultó difícil.

Obtener una distribución para una media dada

Finalmente hemos insistido en la idea de distribución para analizar si los alumnos pueden dar una distribución de valores, conocida la media y el máximo.

Ítem 4. *Tenemos seis números y el más grande es el 5. Sumamos estos números y dividimos la suma por seis. El resultado es 4. ¿Te parece posible? ¿Por qué?*

	4º ESO		1º ESO	
Elementos usados	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto
Cálculo de media con valores aislados	13 (44,8%)	2 (6,9%)	10 (43,5)	1 (4,3)
Dar una distribución para pedia dada	13 (44,8%)	3 (10,3%)	10 (43,5)	8 (34,7)
Media perteneciente al rango	13 (44,8%)		10 (43,5)	

Tabla 7. Frecuencias y (porcentaje) de elementos usados en el Ítem 4.

Las respuestas obtenidas en esta pregunta fueron las que exponemos a continuación:

- Correcta, haciendo uso del cálculo de la media de un conjunto de valores aislados (AM1), tras buscar una distribución que cumplan la condición impuesta:

$$\frac{5+3+4+4+4+4}{6}=\frac{24}{6}=4$$

- Incorrecta, al aplicar un algoritmo de cálculo incorrecto: *Si es posible, porque sí se puede hacer. Por ejemplo, cogemos cuatro veces el 5 y una vez el 4, lo sumamos y lo dividimos entre 6 y el resultado es 4.*
- Incorrecta, dando una distribución que no se corresponde con la condición pedida, o planteando que es imposible que exista una distribución así: *No es posible porque entre 6 números donde el mayor es 5 no pueden sumar 24.*
- Incorrecta, respondiendo algo sin relación con el problema planteado: *No es posible porque en todo caso saldría –4 y no 4.*

En este caso una proporción importante de alumnos da una solución correcta al problema, aunque también se producen errores, incluso en el cálculo de la media.

Dificultad comparada de las tareas
Por último, en la tabla 8 presentamos el porcentaje de respuestas correctas en cada ítem y grupo de alumnos para analizar la dificultad relativa de las tareas.

Los resultados muestran que el ítem 1 ha sido el que más fácil ha resultado, tanto su apartado a como el b, puesto que han sido los que más respuestas correctas han obtenido, tanto en 1º de ESO, como en 4º. Por el contrario, el ítem 3, junto con el 2c han sido los que han obtenido menor número de respuestas correctas, lo que permite deducir que han resultado difíciles a los alumnos.

En cuánto a los resultados comparados de alumnos de 4º y 1º se pueden observar diferencias significativas en los dos primeros apartados del ítem 2, relacionados con la ponderación en el cálculo de la media, mientras que en los otros aparecen unos resultados similares, lo que nos lleva a pensar que este problema presenta mucha más dificultad para los estudiantes de 1º de E.S.O. que para los de 4º, de los cuales casi la mitad muestran un buen dominio.

Conclusiones

La idea de media es aparentemente sencilla, pero nuestro trabajo indica que los estudiantes deben aplicar multitud de ideas numéricas en la resolución de estos problemas, tales como la propiedad distributiva de suma y multiplicación, o la inversión del algoritmo de la media. Asimismo deben discriminar las propiedades que aún siendo válidas para la suma y multiplicación no se generalizan para la operación de promediar.

En este trabajo hemos evaluado cómo los alumnos de secundaria usan ideas numéricas en los problemas de promedio, resultando las siguientes conclusiones:

- Hay una buena comprensión de la media ya que, en la pregunta 1b no sólo se aplica correctamente la idea de media, sino que el 62.1 % de los alumnos de 4º y un 66.7% de 1º, fue capaz de invertir el algoritmo de cálculo para resolver un problema o bien de hallar una distribución con una media dada. Este resultado no concuerda con el obtenido por Cai(1995) que hemos comentado arriba, quizás la razón de que aquí aparezca menos dificultad, como apuntan Gattuso y Mary (1998) se deba al contexto utilizado para presentar el problema, muy próximo a la vida cotidiana de los estudiantes. Esta idea queda reafirmada con los resultados de la pregunta 4, sólo alrededor de un 40% de alumnos de los dos cursos fue capaz de dar una distribución de valores que produzca una media dada, porcentaje menor que el obtenido en la cuestión anterior, muy similar, pero aquí se trata de un ejercicio exclusivamente numérico, sin contextualizar. Por otro lado, el porcentaje de respuestas correctas es sensiblemente menor que el correspondiente al cálculo correcto de la media, lo que es lógico teniendo en cuenta que éste problema supone un razonamiento inverso a partir tanto del propio concepto de media, como del algoritmo de cálculo, lo que requiere un buena comprensión previa del tema.

> *Algunos alumnos no comprenden que la media no es una operación interna en el conjunto de referencia por lo que su valor puede no tener sentido en el contexto dado. Será necesaria la interpretación de la media como una operación y no como valor de dicha operación*

- En la misma línea de los resultados obtenido por Mevarich (1983), sólo un 10.3% de los alumnos de 4º y un 13% de los de 1º entiende que la media no es una operación interna en el conjunto de los números enteros, lo que revela que se trata de una propiedad difícil de comprender para estudiantes muy habituados a trabajar con operaciones que sí son internas en el conjunto donde se realizan.

- En torno a la mitad de los alumnos de 4º es capaz de resolver problemas de media ponderada dando ponderaciones adecuadas, mientras que en 1º, sólo alrededor de un 10% lo realiza correctamente, siendo ésta la principal diferencia encontrada entre los dos grupos de estudiantes. Este resultado revela que la ponderación no es una operación fácil para los estudiantes más jóvenes, sin embargo, con el paso del tiempo, esta dificultad va remitiendo, bien por la propia enseñanza o bien porque se han ido adquiriendo habilidades numéricas y de razonamiento que contribuyen a la mejora de los resultados. Esta dificultad permanece, incluso, en edades más avanzadas, según las investigaciones realizadas por Pollatsek, Lima y Well (1981).

- Sólo un 27.7% de alumnos de 4º y un porcentaje ligeramente menor de los de 1º comprende la propiedad de la suma de desviaciones, por lo que no son conscientes de que al promediar una cantidad la suma de la cantidad que se debe dar para igualar a la media es igual que la suma de los que se recibe en los casos debajo de la media.

- Finalmente, el que la media de la suma de dos variables es igual a la suma de las medias solo se aplicó correctamente por, aproximadamente, una cuarta parte de los alumnos, lo que revela una comprensión deficiente de esta propiedad.

Hemos encontrado, además, errores de cálculo y aplicación incorrecta de otras propiedades, por lo que consideramos que todas estas propiedades deben ser objeto de enseñanza, contextualizadas en situaciones próximas y comprensibles para los alumnos. Errores éstos que presentan, según indican Batanero, Godino y Navas (1997), incluso los estudiantes, universitarios, de profesorado de primara.

Pensamos que las dificultades respecto a la propiedad asociativa, que subyace en el cálculo incorrecto con medias ponderadas, indica que el conocimiento de esta propiedad en la suma y multiplicación puede ser un obstáculo para comprender las propiedades de los promedios.

Algunos alumnos no comprenden que la media no es una operación interna en el conjunto de referencia por lo que su valor puede no tener sentido en el contexto dato (e.g. número medio de hijos). Será necesaria la interpretación de la media como una operación (reparto equitativo) y no como valor de dicha operación, lo que supone un nivel de razonamiento numérico alto para los estudiantes de secundaria. Las operaciones con promedios son, en realidad, operaciones compuestas, lo que requiere un razonamiento numérico de segundo nivel. En consecuencia, el profesorado debe atender al razonamiento numérico de sus estudiantes y a su diversidad para asegurar el éxito de los objetivos educativos. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BATANERO, C. (2000): “Significado y comprensión de las medidas de tendencia central”, *Uno*, n.º 25, 41-58.

BATANERO, C., y GODINO, J. (2001): “Developing new tools in statistics education research”, *Proceedings of the 53rd Session of the International Statistical Institute*, Bulletin of ISI (Tome LIX, Book 2, 137-142), ISI, Seul.

BATANERO, C., GODINO, J. y NAVAS, F. J. (1997): “Evaluación de concepciones sobre la noción de promedio en maestros de primaria en formación”, Trabajo presentado en las VII Jornadas Logse, Evaluación Educativa.

CAI, J. (1995): “Beyond the computational algorithm. Student’s unsderstanding of the aritmetic average concept”, *Proceeding of the 19th PME Conference* (v.3, 144-151), Ed. L. Meira, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

CARVALHO, C. (1998): “Tarefas estadísticas e estratégias de resposta”, Comunicación presentada en el VI Encuentro en Educación Matemática de la Sociedad Portuguesa de Ciencias de la Educación, Castelo de Vide, Portugal.

CARVALHO, C. (2001): “Interaçao entre pares: Contributos para a promoçao do desenvolvimento l'ogico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade”, Tesis Doctoral, Universidad de Lisboa, Lisboa.

COBO, B. (1998): “Estadísticos de orden en la enseñanza secundaria”, Memoria de Tercer Ciclo, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

COBO, B. (2001). Problemas y algoritmos relacionados con la media en los libros de texto de secundaria. Jornadas Europeas de Enseñanza y Difusión de la Estadística. Palma de Mallorca: Instituto Balear de Estadística.

COBO, B y Batanero, C. (2000): “La mediana en la educación secundaria ¿Un concepto sencillo?”, *Uno*, 23, 85-94.

GAL. I. (2002): “Adult's statistical literacy. Meanings, components, responsibilities”, *International Statistical Review*, 70 (1), 5-64.

GODINO, J. D. (1996): “Mathematical concepts, their meanings and understanding”, *Proceedings of the 20th PME Conference* (v.2, 417-424), Ed. L. Puig y A. Gutiérrez, Universidad de Valencia, España.

GODINO, J. D., & Batanero, C. (1994): “Significado personal e institucional de los objetos matemáticos (Institutional and personal meaning of mathematical objects)”, *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

GODINO, J. D., & Batanero, C. (1997): “Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education”, *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (177-195), Ed. A. Sierpinska, & J. Kilpatrick, Dordrecht: Kluwer.

MEVARECH, Z.R. (1983): “A deep structure model of students'statistical misconceptions”, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 415-429.

POLLATSEK, A., LIMA, S. y WELL, A.D. (1981): “Concept or Computation: Students'understanding of the mean”, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 191-204.

STRAUSS, S. y BICHLER, E. (1988): “The development of children's concepts of the arithmetic average”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), 64-80.

TORMO, C. (1993): “Estudio sobre cuatro propiedades de la media aritmética en alumnos de 12 a 15 años”, Memoria de Tercer Ciclo, Universidad de Valencia.

WATSON, J. M. y MORITZ, J. B. (2000): “The longitudinal development of understanding of average”, *Mathematical Thinking and Learning*, v1 (2/3).