SUMA 45

Febrero 2004, pp.41-52

Efectos del *autismo temático* sobre el estudio de la Geometría en Secundaria*

II. La clasificación de los cuadriláteros convexos

En este trabajo consta de dos partes. En esta segunda parte del trabajo se pone de manifiesto que la clasificación de los cuadriláteros convexos, tal como se estudia en la Secundaria, constituye un ejemplo prototípico de cuestión matemática completamente desconectada de los problemas geométricos relativos a la determinación y construcción de figuras que le podrían dar sentido. Se proponen diversos criterios alternativos de clasificación y se explica en qué forma cada una de las nuevas clasificaciones modificaría la organización global del currículum de geometría.

The present work is being published in two parts. This is the second part, which makes clear that the classification of convex quadrilaterals as studied at secondary school constitutes a prototypical example of a mathematical question completely disconnected from the geometrical problems relating to the determination and construction of figures that could give it sense. Some alternative classification criteria are being proposed and the way they could modify the general organisation of the geometrical curriculum is being developed.

En la primera parte de este artículo se utilizó la siguiente jerarquía de niveles de codeterminación didáctica (Chevallard, 2001):

Sociedad → Escuela → Disciplina → Área → Sector → Tema → Cuestión

Esta cadena hace referencia a los sucesivos niveles de estructuración, tanto de las organizaciones matemáticas (lo que se estudia) como de las organizaciones didácticas (las formas de organizar el estudio), que van desde el nivel más *genérico*, la sociedad, al más *específico*, una cuestión matemática concreta que se propone para ser estudiada.

A partir de este esquema se dice que una *cuestión matemática* puede estudiarse *con sentido* en la Escuela, si:

(1) Proviene de las cuestiones que la Sociedad propone que se estudien en la Escuela.

(2) Aparece en ciertas situaciones que llamaremos *umbilicales* porque están en la raíz central de las matemáticas.

(3) Conduce a alguna parte, esto es, está relacionada con otras cuestiones que se estudian en la Escuela sean éstas matemáticas, lingüísticas, biológicas o musicales.

En caso contrario se dice que la cuestión carece de *sentido* porque ha desaparecido la *razón de ser* de su estudio en la Escuela. También se dice que es una cuestión encerrada en sí misma (o *muerta*) porque se ignora el *por qué* y el *para qué* de su estudio escolar. Resulta, en resumen, que la *razón de ser* del estudio de una cuestión depende de su conexión con todos los niveles de organización.

Se llama *autismo temático* al fenómeno didáctico que se manifiesta en el encierro de la institución escolar (currículum, documentos oficiales y libros de texto) en el *nivel temático* y al que, como tal fenómeno, el profesor también está sujeto. Se produce así una escisión entre *lo matemático* y *lo pedagógico*, entendido como el ámbito de actuación del profesor.

*Este trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto BSO2000-0049 de la DGICYT. Una primera versión del mismo ha sido publicada en Gascón (2003). Agradezco al editor, Emilio Palacián, las facilidades que ha dado para que este texto pueda publicarse en SUMA.

La primera parte de este artículo se publicó en Suma 44.

Josep Gascón
Universitat Autònoma de Barcelona
Departament de Matemàtiques
gascon@mat.uab.es

Sociedad → Escuela → $\boxed{\text{Disciplina} \rightarrow \text{Área} \rightarrow \text{Sector}}$ → $\boxed{\text{Tema} \rightarrow \text{Cuestión}}$

Ámbito de "lo matemático" *Ámbito de actuación del profesor*

La principal conclusión de la primera parte de este artículo puede enunciarse como sigue: el autismo temático provoca la *desaparición escolar de las razones de ser* (del *por qué* y el *para qué*), no sólo de muchas organizaciones matemáticas enseñadas en el nivel temático, sino incluso de ciertos sectores, como la geometría analítica y hasta de áreas completas de la matemática, como la propia geometría.

Desaparición escolar de la razón de ser de la clasificación de los cuadriláteros

En esta segunda parte de este artículo me propongo analizar con cierto detalle un segundo ejemplo de la incidencia del *autismo temático* sobre el estudio actual de la geometría en Secundaria. Analizaré cómo se estudia la cuestión de la *clasificación de los cuadriláteros convexos* en la E.S.O. y mostraré que se ha perdido completamente la razón de ser (el *por qué* y el *para qué*) del estudio de esta cuestión. Sin pretender dar una explicación definitiva ni encontrar las causas últimas de los fenómenos didácticos indeseables que surgen en el estudio escolar de los tipos de cuadriláteros, señalaré brevemente las relaciones que existen entre dichos fenómenos y el autismo temático. Más adelante mostraré otras maneras posibles de acceder al estudio de la clasificación de los cuadriláteros que permiten recuperar el sentido de la OM generada en torno a dicha cuestión.

La *clasificación de los cuadriláteros convexos*, tal como se estudia en Secundaria, constituye un ejemplo paradigmático de cuestión que surge en el nivel temático (en el tema *tipos de polígonos*) completamente desconectada de las situaciones que le podrían dar *sentido*. En efecto, las citadas clasificaciones se reducen a meras *taxonomías* completamente ajenas a las cuestiones geométricas que aparecen en las *situaciones umbilicales* de *determinación y construcción de figuras* y, por tanto, sin ninguna relación con cuestiones tales como: ¿Cuáles son los elementos que determinan un tipo determinado de figuras?, ¿Existen diferentes sistemas de elementos que determinan el mismo tipo de figuras?, ¿Cuál de ellos es el más adecuado para utilizarlo en determinada situación de construcción?

> Así, por ejemplo, los paralelogramos pueden caracterizarse, dentro de la clase de cuadriláteros, de diferentes maneras equivalentes: (1) Por tener los dos pares de lados opuestos iguales; (2) Por tener dos lados opuestos iguales y paralelos; (3) Por tener los dos pares de ángulos opuestos iguales (Puig Adam, 1947, pp. 66-67).

Es obvio que en cada situación en la que se trata de construir una figura geométrica de la que forme parte un paralelogramo deberá utilizarse aquella manera de caracterizar los paralelogramos que sea la más pertinente, en función de los datos conocidos y de las restricciones que imponga la situación en cuestión.

Las clasificaciones de los cuadriláteros que aparecen en los textos de Secundaria se basan en el criterio del *paralelismo de los lados* (en algunos casos se añade también el criterio de la perpendicularidad de lados) y en el hecho de que los lados tengan o no tengan la *misma longitud* (también se usa, en ocasiones, la amplitud de los ángulos).
Por regla general los cuadriláteros se clasifican, en Secundaria, en tres grandes clases (ver, por ejemplo, el texto de De la Haza, Marqués y Nortes, 2002):

> *Una* cuestión matemática *puede estudiarse con* sentido *en la Escuela, si proviene de las cuestiones que la sociedad propone que se estudien en la escuela, aparece en ciertas situaciones que llamaremos* umbilicales *porque están en la raíz central de las matemáticas, o bien si conduce a alguna parte, esto es, está relacionada con otras cuestiones que se estudian en la Escuela sean éstas matemáticas, lingüísticas, biológicas o musicales.*

(1) *Trapezoides* (no tienen lados paralelos).

(2) *Trapecios* (tienen dos lados paralelos).

(3) *Paralelogramos* (tienen los lados paralelos dos a dos).

A su vez los *Trapecios* de clasifican en tres subclases:

(2.1) *Trapecio rectángulo* (tiene un ángulo recto).

(2.2) *Trapecios isósceles* (tiene los dos lados no paralelos de la misma longitud).

(2.3) *Trapecios escalenos* (no tiene ningún ángulo recto y las longitudes de los lados no paralelos son diferentes).
Los *Paralelogramos*, por otra parte, se clasifican en cuatro subclases:

> *La principal conclusión de la primera parte de este artículo es que el autismo temático provoca la* desaparición escolar de las razones de ser*, no sólo de muchas organizaciones matemáticas enseñadas en el nivel temático, sino incluso de ciertos sectores, como la geometría analítica y hasta de áreas completas de la matemática, como la propia geometría.*

(3.1) *Romboide* (no tiene todos los lados iguales ni todos los ángulos iguales).

(3.2) *Rombo* (tiene los cuatro lados iguales).

(3.3) *Rectángulo* (tiene los cuatro ángulos rectos).

(3.4) *Cuadrado* (tiene los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos)

Otros textos como, por ejemplo, el de Anzola Vizmanos, Bargueño y Peralta (2002), hacen esencialmente la misma clasificación, pero no incluyen la clasificación de los *Trapecios.* Por el contrario algunos textos añaden a las clasificaciones anteriores una clasificación de los *Trapezoides* según que tengan dos parejas de lados consecutivos iguales (*Cometa*) o bien no exista *ninguna característica común entre los lados* (*Otros trapezoides*) (Cañadilla y otros, 2002).

En resumen, podemos resaltar las siguientes características de este tipo de clasificaciones:

(a) Aparecen entremezclados arbitrariamente diversos criterios de clasificación (en este aspecto la clasificación de los *Trapecios* es la más llamativa). En algunos casos las clases de cuadriláteros se definen de forma inclusiva (los *Cuadrados* son *Rombos* y *Rectángulos*) y, en otros casos, en forma no inclusiva (ni los *Rombos* ni los *Rectángulos* son *Romboides*).

(b) En ningún caso se pone de manifiesto la relación que existe entre las diferentes clases de formas que van apareciendo (¿los *Trapecios escalenos* constituyen una clase de cuadriláteros más general o más particular que los *Romboides*? ¿Y con respecto a los *Otros trapezoides*?) ni cómo se ha de modificar una clase de formas (por ejemplo, los *Trapecios rectángulos*) para convertirse en otra (como, por ejemplo, los *Rombos*).
(c) En ningún caso se toman en consideración los grados de libertad de cada una de las clases de formas cuadrangulares (¿Cuántos grados de libertad tienen los *Trapecios escalenos*? ¿Y los *Romboides*?) ni, por tanto, el número mínimo de elementos *independientes* que serían necesarios para determinar cada clase de formas.

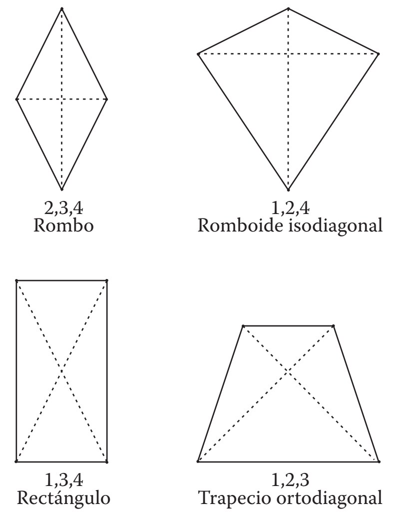
No es de extrañar que este tipo de clasificaciones, omnipresente en los libros de texto, esté asociado a fenómenos didácticos indeseables entre los que cabe citar los errores sistemáticos y persistentes que cometen los alumnos y cuya explicación no debería buscarse, por tanto, en *dificultades cognitivas* o *faltas de motivación* de éstos[1].

La uniformidad abrumadora de las clasificaciones descritas pone de manifiesto la desaparición completa de la *razón de ser* o *sentido* (el *por qué* y el *para qué*) de esta cuestión. En lo que sigue mostraré que es posible recuperar el sentido del estudio de la clasificación de los cuadriláteros conectándola con la problemática de la determinación y construcción de ciertos tipos de figuras geométricas. Dicha conexión puede hacerse, por ejemplo, a través del *sector* de los *movimientos del plano* o, mejor, vía el *estudio del cambio de forma de las figuras*. En el primer caso se conecta la clasificación de los cuadriláteros con la determinación de figuras según su tipo de simetría (caracterizado por el grupo de simetría de la figura) y con la utilización de los movimientos del plano como técnicas constructivas que dejan invariantes ciertos elementos de una figura dada; en el segundo caso (del que propondré dos ejemplos) la clasificación de los cuadriláteros se relaciona con las posibles evoluciones de las clases de formas y con la modificación sistemática de los elementos que las determinan.

> *Incluso planteándose la cuestión de la clasificación desde el propio ámbito de los cuadriláteros es posible proponer criterios más sistemáticos y coherentes que, a posteriori, proporcionarán un* sentido geométrico *a la clasificación obtenida, porque permitirán relacionarla con el estudio del cambio de forma de los cuadriláteros convexos.*

Un criterio alternativo sin salirse del ámbito de los cuadriláteros

Incluso planteándose la cuestión de la clasificación desde el *propio ámbito de los cuadriláteros*, es decir, sin hacer depender explícitamente dicha cuestión de otras cuestiones más genéricas que surjan en los niveles superiores de la jerarquía, es posible proponer criterios más sistemáticos y coherentes que, a posteriori, proporcionarán un *sentido geométrico* a la clasificación obtenida porque permitirán relacionarla, como veremos, con el estudio del *cambio de forma de los cuadriláteros convexos*.



Gráfica n.º 2

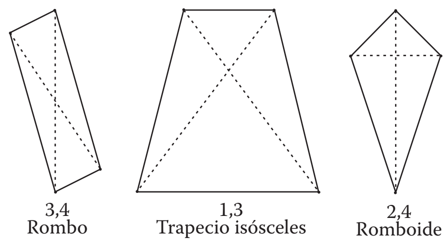
Así, por ejemplo, si caracterizamos las diagonales del cuadrado mediante cuatro propiedades o *axiomas*, podremos ir eliminando sistemáticamente dichas propiedades para construir clases de formas cada vez más amplias y menos *simétricas* y describir de esta manera una cierta evolución de las formas cuadrangulares. Podemos considerar que las diagonales del cuadrado satisfacen las cuatro propiedades siguientes:

D1: Las dos diagonales tienen la misma longitud.
D2: Las diagonales se cortan perpendicularmente (forman cuatro ángulos iguales).
D3: El punto de intersección de las diagonales divide a ambas en la misma proporción.
D4: El punto de intersección divide a una de las diagonales en dos partes iguales.

Si ahora eliminamos uno de los axiomas, que pueden interpretarse como restricciones, obtendremos 4 clases de formas cuadrangulares. Dos de estas clases, *rombos* y *rectángulos*, son muy conocidas, pero las dos restantes no aparecen en los libros de texto de Secundaria (Ver Gráfica n.º 2).

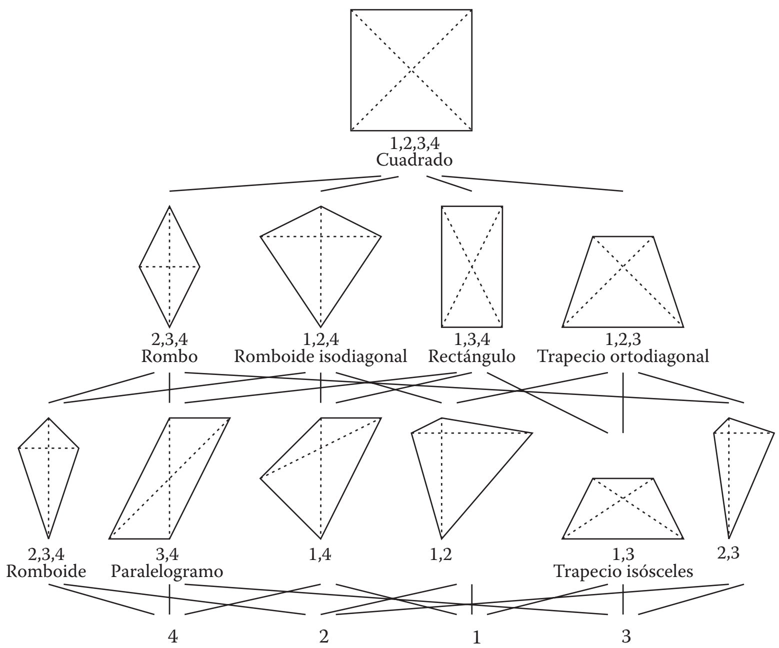
D2+D3+D4 = *Rombos*.
D1+D2+D4 = *Romboides*[2] *isodiagonales*.
D1+D3+D4 = *Rectángulos*.
D1+D2+D3 = *Trapecios ortodiagonales*.

Estas cuatro clases de formas cuadrangulares son simplemente infinitas, esto es, tienen un grado de libertad. Esto significa que dentro de la clase de los rombos, por ejemplo, basta dar un parámetro para determinar cada una de las formas concretas de rombo.



Gráfica n.º 3

Si ahora eliminamos sistemáticamente dos de las restricciones sobre las diagonales obtenemos seis nuevas clases de formas cuadrangulares de entre las cuales únicamente dos de ellas aparecen habitualmente en los libros de texto de Secundaria: los *paralelogramos* y los *trapecios isósceles*. Aparecen, asimismo, los *romboides* en el sentido de Rey Pastor antes citado (Ver Gráfica n.º 3).



Gráfica n.º 4

D3+D4=*Paralelogramos*.
D+D3=*Trapecios isósceles*.
D2+D4=*Romboides*.

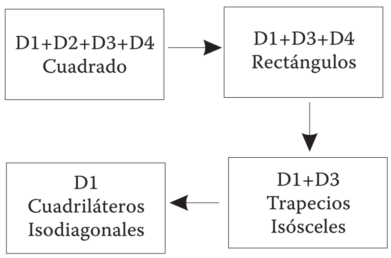
Las tres clases de formas cuadrangulares restantes (definidas, respectivamente, por D1+D4; D1+D2 y D2+D3) no tienen, todavía, un nombre asignado. Estas seis clases de formas cuadrangulares son doblemente infinitas, esto es, tienen dos grado de libertad. Esto significa que dentro de la clase de los romboides, por ejemplo, basta dar dos parámetros para determinar cada una de las formas concretas de romboide.

Para concluir esta clasificación habría que describir las cuatro clases de formas cuadrangulares que se definen, respectivamente, por cada una de las restricciones. Podemos asignar un nombre provisional a dos de dichas clases:

D1 = *Isodiagonales*.
D2 = *Ortodiagonales*.

No asignaremos, por el momento, ningún nombre a las dos clases de formas restantes (definidas, respectivamente por D3 y D4). Es obvio que cada una de estas cuatro clases de formas tiene tres grados de libertad y que, por último, si no se impone ninguna de las restricciones, obtenemos la clase de todas las formas cuadrangulares[3]. En el siguiente esquema se presenta la clasificación completa dibujando en cada caso un cuadrilátero que, cumpliendo los axiomas que definen la clase de formas correspondiente, no cumple el resto de los axiomas. Así, por ejemplo, se dibuja un rectángulo (= D1+D3+D4) que no cumple D2, para que no sea cuadrado, y un paralelogramo (= D3+D4) que no cumple D2, para que no sea rombo, ni tampoco D1, para que no sea rectángulo (Ver Gráfica n.º 4).

Pero esta representación estática de la clasificación de las formas cuadrangulares esconde el carácter evolutivo de la misma. De hecho, si interpretamos el esquema global como un diagrama en árbol que parte del cuadrado, tenemos 24 (= 4´3´2) direcciones a lo largo de las cuales puede evolucionar la forma del cuadrado. Alguna de estas direcciones son relativamente conocidas como, por ejemplo, la siguiente:



Pero la inmensa mayoría de las 23 restantes direcciones de evolución de las clases de formas (así como las múltiples combinaciones que pueden realizarse con ellas) son totalmente desconocidas y no se estudian en Secundaria. Para llevar a cabo un estudio sistemático de esta clasificación propongo utilizar una Calculadora Simbólica[4] que permita visualizar todos estos cambios progresivos de la forma de los cuadriláteros. El estudio sistemático de esta clasificación permitirá generar un Campo de Problemas y hasta una Organización Matemática que puede ser estudiada en Secundaria.

Existe otro aspecto de la dinámica de esta clasificación que queda oculto con el diagrama general. Se trata de la variabilidad interna que encierra cada una de las 16 (= 1+4+6+4+1) clases de formas cuadrangulares que resultan. Salvo el *cuadrado*, que contiene una única forma, cada una de las 15 clases de formas restantes contiene infinitas formas cuadrangulares diferentes. De nuevo propongo utilizar una Calculadora Simbólica (como, por ejemplo, WIRIS) que permita explorar, analítica y gráficamente los límites de variabilidad de las formas dentro de cada clase.

Así, por ejemplo, para determinar cada una de las formas de la clase *romboides* podemos definir dos parámetros: el primero mediría la razón entre las longitudes de las dos diagonales del romboide; el segundo mediría la razón entre las longitudes de los dos segmentos en que queda dividida la diagonal del romboide que no queda forzosamente bisecada. Al variar conjuntamente los valores de dichos parámetros (dentro de los límites admisibles) tendríamos todas las formas posibles de los romboides. Es fácil ver que esta idea puede extenderse a la clasificación completa, mostrando que *fijar una forma cuadrangular equivale a fijar los valores de cuatro parámetros* y que la forma *cuadrado* se obtiene dando el valor "1" a todos ellos. Análogamente, cada una de las clases de formas puede interpretarse como el resultado de asignar el valor "1" a uno, dos o tres de los parámetros en cuestión (según se trate, respectivamente, de clases de formas con tres, con dos o con un solo grado de libertad) dejando libres los restantes. Al dejar libres los valores de los cuatro parámetros se obtiene la clase universal que incluye a todos los cuadriláteros.

> *Para determinar cada una de las formas de la clase romboides podemos definir dos parámetros: uno que mida la razón entre las longitudes de las dos diagonales del romboide y otro que mida la razón entre las longitudes de los dos segmentos en que queda dividida la diagonal del romboide que no queda forzosamente bisecada.*

Cada una de las clases de formas cuadrangulares obtenidas puede caracterizarse, a su vez, mediante su *grupo de invariancia* entendido como el grupo de transformaciones del plano que la deja invariante como clase de formas. Si, por ejemplo, ***F*** designa la clase de formas que hemos denominado de los *trapecios ortodiagonales*, le asociamos el grupo, ***G(F)***, de las transformaciones del plano que convierten cualquier trapecio ortodiagonal en otro trapecio ortodiagonal (aunque cambien la forma de éste). Es claro que se trata de un grupo que contiene al grupo, ***S***, de las semejanzas y que, en el caso de la forma cuadrada, $F = C$, se tiene $G(C) = S$. En total, los 16 grupos de invariancia así obtenidos formarán un retículo de subgrupos de transformaciones del plano con una estructura de orden parcial análoga a la que constituyen las clases de formas cuadrangulares de la que proceden.

En la clasificación basada en el tipo de simetría se obtienen, en concreto, siete clases de formas cuadrangulares distribuidas en cinco categorías: el cuadrado, los rectángulos y rombos, los paralelogramos, los trapecios isósceles y romboides y los cuadriláteros sin ningún tipo de simetría.

Una clasificación ligada al sector de los movimientos del plano

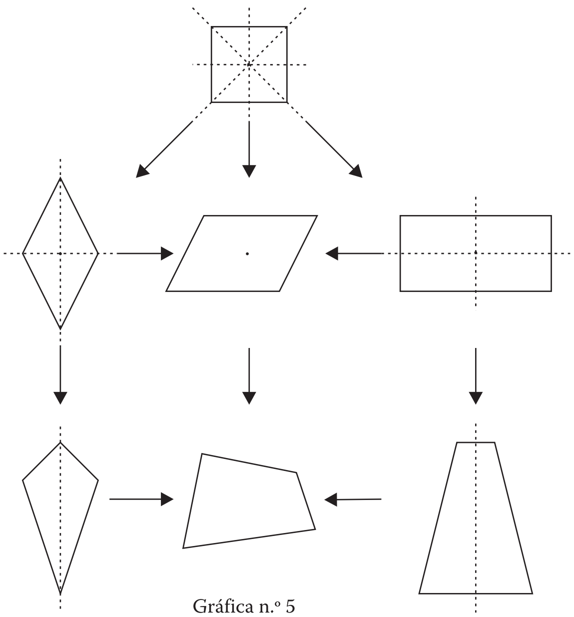
En la Enseñanza Secundaria española actual se estudia, en el sector de las *Traslaciones, giros y simetrías en el plano*, el centro de simetría y los ejes de simetría de algunas figuras, pero sin relacionarlo directamente con la cuestión de la clasificación de los polígonos ni, tampoco, con las cuestiones que aparecen en las situaciones que hemos considerado umbilicales en la geometría elemental. La ausencia de un tema en el que se estudien los *Tipos de simetría de una figura*, que permitiría construir una sucesión de niveles de organización que conectase funcionalmente el *sector* de los movimientos con las citadas cuestiones, hace que sea muy improbable que el cálculo de los elementos de simetría de ciertas figuras pueda servir ni como criterio de clasificación de éstas, ni como técnica para determinar y, en su caso, construir figuras geométricas. De hecho, muy pocos libros de texto de la E.S.O. incluyen explícitamente el tema de los *Tipos de simetría de una figura* y su utilización sistemática para clasificar los cuadriláteros. No podemos dejar de citar, como excepción, el texto de tercero de E.S.O. de Bosch, Compta, Gascón, Urbaneja y Lamarca (1996), pp. 51-57.

De nuevo se pone de manifiesto que las cuestiones que pueden ser estudiadas y, lo que es más importante, la *manera concreta de cómo pueden ser estudiadas*, depende muy fuertemente de su conexión con los niveles *superiores* de organización (*temas*, *sectores* y *áreas*) y de las relaciones que se establezcan entre éstos. En efecto, si los movimientos del plano se utilizaran, entre otras cosas, para estudiar el *tipo de simetría de las figuras geométricas* (lo cual no implica que tenga que introducirse explícitamente la noción de *grupo de simetría de una figura*), entonces podría darse una primera razón de ser a la clasificación de las formas cuadrangulares porque los tipos de simetría pueden proporcionar, como veremos, criterios de determinación de clases de formas (sean éstas cuadrangulares o no). Además, existen múltiples construcciones geométricas que requieren la construcción previa de una figura que contiene a un cuadrilátero. Dichas construcciones suelen utilizar la existencia de elementos que quedan invariantes al aplicar ciertas simetrías o rotaciones (Puig Adam, 1947, pp. 208-212).

En la clasificación basada en el tipo de simetría se obtienen, en concreto, siete clases de formas cuadrangulares distribuidas en cinco categorías. En la primera categoría aparece una única clase de formas que, además, contiene una única forma: el *Cuadrado*. Es el cuadrilátero que tiene simetría *diédrica* o *compuesta* de orden 4 (queda invariante por cuatro simetrías y cuatro rotaciones). En la segunda categoría aparecen las dos formas cuadrangulares que tienen simetría compuesta de orden 2 (quedan invariantes por dos simetrías y dos rotaciones): los *Rectángulos* y los *Rombos*. La tercera categoría de formas cuadrangulares consta únicamente de una clase de formas, los *Paralelogramos*. Son los cuadriláteros que tienen simetría *rotatoria* de orden 2 (quedan invariantes por dos rotaciones). La cuarta categoría posee dos clases de formas cuadrangulares: los *Trapecios isósceles* y los *Romboides* (en el sentido de la definición de Rey Pastor que algunos textos denominan *cometas*); se trata de los cuadriláteros que tienen simetría *bilateral*, esto es, que quedan invariantes mediante una simetría axial. En la quinta y última categoría se sitúan los *Cuadriláteros sin ningún tipo de simetría*, si los definimos en sentido no inclusivo como aquellos que *únicamente* quedan invariantes mediante la transformación Identidad. Pero si, siguiendo la lógica interna de esta clasificación, situamos en la quinta categoría las formas cuadrangulares que quedan invariantes por la Identidad, tenemos que ésta contiene a todos los cuadriláteros.

La introducción del tema de los Tipos de simetría de una figura y su utilización para clasificar las formas cuadrangulares permite relacionar cada clase de formas cuadrangulares con la forma de figuras geométricas cualesquiera y, por tanto, formular criterios de determinación de las figuras en términos de su tipo de simetría.

Consideradas como conjuntos, estas siete clases de formas cuadrangulares no están totalmente ordenadas por inclusión, pero sí están relacionadas según una ordenación parcial perfectamente definida (Ver Gráfica n.º 5).



Gráfica n.º 5

La introducción del tema de los *Tipos de simetría de una figura* y su utilización para clasificar las formas cuadrangulares amplía el tipo de actividad matemática que es posible llevar a cabo en torno a dicha clasificación porque, entre otras cosas, permite relacionar cada clase de formas cuadrangulares con la forma de figuras geométricas cualesquiera y, por tanto, formular criterios de determinación de las figuras en términos de su tipo de simetría: ¿Hasta qué punto podemos cambiar la forma de una figura sin cambiar su tipo de simetría? Si queremos modificar, en base a ciertos criterios, el tipo de simetría de una figura, ¿qué tipo de transformaciones podemos aplicar a la figura en cuestión? En particular, pueden plantearse cuestiones tales como las que siguen (Bosch, Compta, Gascón, Urbaneja y Lamarca, 1996, pp. 82-83):

(1) ¿Cómo se ha de modificar un romboide para dibujar un pentágono que sólo tenga un eje de simetría?

(2) ¿Existe algún pentágono que tenga simetría compuesta de orden 2?

(3) Dibuja un hexágono que sólo tenga dos ejes de simetría de manera que éstos sean perpendiculares. Puedes hacerlo modificando un rombo. ¿Cuál es el tipo de simetría de este hexágono?

(4) ¿Existen hexágonos con simetría bilateral? ¿Y con simetría compuesta de orden 3? ¿Y con simetría rotatoria de orden 3? Dibuja ejemplos de los casos posibles.
(5) Modificando un hexágono que sólo tenga un eje de simetría, dibuja un heptágono que tenga un único eje de simetría. ¿Existen heptágonos más simétricos que éste y, a su vez, menos simétricos que el heptágono regular?

(6) Dibuja un octógono que sólo tenga dos ejes de simetría y con la propiedad adicional de que éstos sean perpendiculares. ¿Cuál es su tipo de simetría?

(7) Dibuja octógonos que tengan simetría compuesta de órdenes 1, 2, 4 y 8.

(8) Modificando adecuadamente un trapecio isósceles, dibuja un hexágono que sólo tenga un eje de simetría. Modificando este hexágono, dibuja un octógono que también tenga un único eje de simetría.

(9) Dibuja hexágonos que tengan simetría compuesta de órdenes 1, 2, 3 y 6.

(10) Dibuja una figura que no sea un polígono y que tenga el mismo tipo de simetría que el triángulo equilátero. Haz lo mismo con el cuadrado y con el hexágono regular.

¿Qué se entiende en Secundaria por *figura geométrica*? Estudio del cambio de forma de las figuras

Las figuras geométricas planas que se estudian inicialmente en Secundaria se consideran determinadas por elementos (puntos, segmentos, arcos de circunferencia, etc.) que están fijos en el plano. En particular, los polígonos se consideran determinados por la sucesión ordenada de sus vértices y se sobreentiende que éstos son puntos fijos del plano. Cuando se avanza un poco en el estudio (a partir de tercero de E.S.O.) se considera la *posición de una figura* (aunque esta noción suele quedar implícita), como la que viene dada por la posición de los elementos que la determinan (por ejemplo, los vértices en el caso de los polígonos). Se estudian entonces, parcialmente, los *cambios de posición de las figuras*. Normalmente se supone que dos figuras son *iguales*, esto es, la *misma* figura, si pueden superponerse de manera que coincidan todos sus elementos. Los textos más rigurosos definen, excepcionalmente, *figuras iguales* como aquellas "[...] entre las cuales se puede establecer una transformación biyectiva que conserva la distancia entre los puntos" (Bailo, Casals, Gomà y Tudurí, 1996, p. 52). Posteriormente se aplican traslaciones, giros y simetrías axiales a determinadas figuras y se afirma que de esta manera se obtienen siempre *figuras iguales*. En este momento se ha cambiado la noción inicial de *figura geométrica* al considerar que una figura puede cambiar de posición.

Pero una vez que se supone que una figura puede cambiar de posición, se plantea el estudio de los *cambios de tamaño* de las figuras geométricas. Este estudio que, de nuevo, sólo se realiza parcialmente en la Enseñanza Secundaria, permite mostrar algunas propiedades de las figuras geométricas que no dependen del tamaño de éstas. Surge, aunque de una manera bastante implícita, la noción de *forma de una figura **F***, entendida como lo que tienen en común todas las figuras *semejantes* a ***F***. Se considera, por ejemplo, que todos los cuadrados son la misma figura y que todas las circunferencias son, también, la misma figura. De nuevo, se está ampliando la noción de *figura geométrica* al considerarla independientemente de su tamaño.

Dado que la geometría de Secundaria toma como objeto de estudio las *relaciones internas* entre los *elementos* de lo que se supone que son *figuras geométricas*, la cuestión de lo que sea una *figura geométrica*, y de los criterios que se utilicen para construir las figuras geométricas que se estudiarán, es central porque determina el contenido de toda la actividad matemática. Pero, subrepticiamente, junto al cuadrado, al círculo y al triángulo equilátero, aparecen presuntas *figuras geométricas* (como, por ejemplo, triángulo escaleno, rombo, rectángulo áureo, triángulos en posición de Tales, trapecio, triángulo rectángulo, hexágono equilátero, etc.) que, en realidad, son clases de formas integradas por infinitas formas diferentes con uno o más grados de libertad. En la práctica se está ampliando, de nuevo, la noción de figura geométrica pero, esta vez, de una manera arbitraria aceptando que es independiente de *ciertos cambios de forma* completamente descontrolados.

Puede mostrarse que se utilizan criterios diversos y, en general, bastante arbitrarios, para agrupar las diferentes formas que pasan a integrar lo que a partir de este momento se considera como una *figura geométrica*. Mientras que algunas agrupaciones responden a una propiedad geométrica crucial en las situaciones de construcción de figuras (así, por ejemplo, los *triángulos rectángulos* se agrupan porque están caracterizados por el Teorema de Pitágoras), otras agrupaciones obedecen a propiedades geométricamente más banales (por ejemplo, los *trapecios* tienen en común, entre otras cosas, una fórmula para calcular el área).

Aparece así una *cuestión* que está en el origen de las situaciones ligadas a la determinación y construcción de figuras geométricas. Se trata de lo que se entiende en cada momento por *figura geométrica*: *¿Con qué criterios se agrupan diferentes formas para designarlas con un único nombre* (y considerarlas, de hecho, como una misma *figura*)?[5] *¿Cuáles son los posibles cambios de forma dentro de cada una de las figuras geométricas*? Toda la actividad geométrica elemental depende de la respuesta que se dé a estas cuestiones.

Utilizando el lenguaje de los grupos de transformaciones del plano:

$$\{\mathbf{I}\} \subset \mathbf{M} \subset \mathbf{S} \subset \mathbf{G} \subset \mathbf{TP}$$

podríamos decir que en Secundaria se estudia parcialmente el efecto del grupo de los movimientos, **M**, y el de las semejanzas, **S**, a fin de mostrar algunos aspectos del *cambio de posición* y del *cambio de tamaño* de las figuras y estudiar algunas propiedades invariantes por semejanzas; pero nunca se estudia el efecto de los grupos de transformaciones, **G**, que contienen al de las semejanzas. Por tanto, no se considera el *cambio de forma* de las figuras y, en consecuencia, no se analiza ningún proceso dinámico global de dichas formas, lo que comporta que los criterios de clasificación de las mismas sean estáticos, parciales y, a menudo, arbitrarios. Aparecen así nuevos aspectos de las limitaciones y hasta incoherencias de las OM *geométricas* que se estudian en Secundaria y, en particular, de las que se generan en torno a la clasificación de los cuadriláteros.

> *¿Con qué criterios se agrupan diferentes formas para designarlas con un único nombre y considerarlas, de hecho, como una misma* figura*? ¿Cuáles son los posibles cambios de forma dentro de cada una de las figuras geométricas? Toda la actividad geométrica elemental depende de la respuesta que se dé a estas cuestiones.*

Determinación de la forma, dejando libre el tamaño y la posición

Vamos a describir una posible evolución de las formas cuadrangulares convexas y, a partir de ella, obtendremos criterios para caracterizar las diferentes clases de formas así como las relaciones entre ellas. Junto a este aspecto más *cualitativo* de la discusión podría introducirse un aspecto más *cuantitativo* consistente en el *estudio de las dependencias entre las medidas de los diferentes elementos de los cuadriláteros* (lados y ángulos, especialmente) que determinan su forma. Este estudio nos conduciría a la noción de *función* y, como dice Emma Castelnuovo, a la "utilización natural del plano cartesiano y de las gráficas" (Castelnuovo, 1981, p. 7).
En este caso, en lugar de empezar dando la clasificación de las formas cuadrangulares que se obtiene al final del estudio, vamos a describir brevemente una *actividad matemática* a lo

largo de la cual se analizan ciertos aspectos elementales de los cuadriláteros y que culmina en una posible clasificación. Se trata de una experimentación matemática que puede llevarse a cabo con alumnos de tercero de ESO (aunque también puede realizarse con alumnos de niveles superiores, incluso universitarios, con la condición de que dejen en suspenso, temporalmente, sus conocimientos escolares). Sería muy interesante disponer de una materialización y un control de los cambios de forma de los cuadriláteros, tanto dentro de cada clase de formas, como en el paso de una a otra clase, aunque la experimentación que describiré a continuación también puede realizarse con lápiz y papel.

Buscamos un conjunto de elementos o características del cuadrilátero, a ser posible independientes (esto es, que no contenga elementos superfluos o redundantes) que determinen la forma del cuadrilátero, dejando libre el tamaño y la posición. Denominaremos *sistema básico* a un conjunto de elementos que cumpla dichas condiciones y centraremos la discusión en investigar si los sucesivos conjuntos de elementos constituyen un sistema básico. De hecho, en la clasificación basada en las propiedades de las diagonales, se ha utilizado implícitamente el *sistema básico* formado por: (1) La razón entre la longitud de las diagonales; (2) la razón entre los ángulos que forman las dos diagonales; (3) la razón entre las razones de los segmentos en que quedan divididas ambas diagonales; (4) la razón entre los segmentos en que queda dividida una diagonal. Si las cuatro razones toman el valor "1", tenemos el cuadrado.

Consideraremos, sucesivamente, los siguientes conjuntos de elementos:

(1) *La posición de los cuatro vértices del cuadrilátero.*

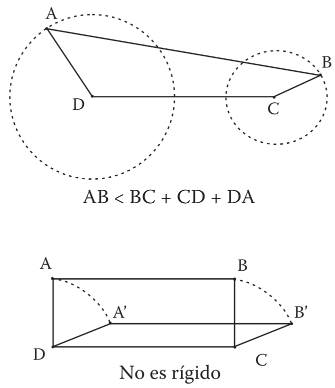
Ante todo se observa que no son independientes, esto es, la posición de los 4 vértices no puede elegirse arbitrariamente en el plano. Además, los vértices no determinan la forma del cuadrilátero, a menos que se fije el orden de los mismos. Surgen nociones nuevas que no tenían sentido en los triángulos: *cuadrilátero convexo*[6], *cuadrilátero entrelazado*, *vértices y lados consecutivos (versus opuestos)* y *diagonal*.

(2) *La posición ordenada* (A, B, C, D) *de los cuatro vértices.*

No constituyen un sistema básico puesto que, además de determinar la forma, también determinan la posición y el tamaño del cuadrilátero (Ver Gráfica n.º 6).

(3) *Las longitudes ordenadas* (AB, BC, CD, DE) *de los cuatro lados.*

No son independientes (por ejemplo, la longitud del lado mayor no puede ser mayor que la suma de las longitudes de los otros tres). Además, no determinan la forma puesto que el cuadrilátero no es un polígono rígido (Ver Gráfica n.º 7).



Gráfica n.º 7

(4) *Las amplitudes ordenadas* (α, β, γ, δ) *de los ángulos.*

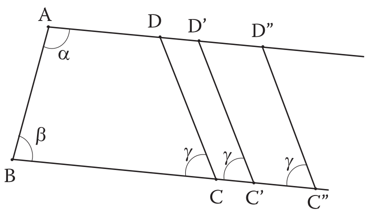
No son independientes puesto que su suma es siempre igual a cuatro rectos. Además no determinan la forma (puesto que, por ejemplo, existen rectángulos que no son cuadrados).

(5) *La amplitud de tres ángulos* (α, β, γ) *y la longitud de un lado* AB.

Además de no dejar completamente libre el tamaño, este conjunto de elementos tampoco determina la forma (Ver Gráfica n.º 8).

(6) *La amplitud de tres ángulos* (α, β, γ) *y las longitudes de dos lados opuestos* AB y CD = C'D' = C"D".

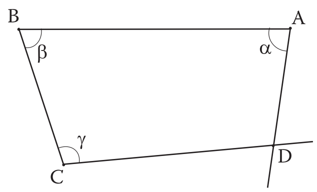
Este sistema de elementos no determina la forma del cuadrilátero (Ver Gráfica n.º 9).



Gráfica n.º 9

(7) *La amplitud de tres ángulos* (α, β, γ) *y las longitudes de dos lados consecutivos* AB y BC.

Se trata de un sistema de elementos que determina la forma del cuadrilátero, pero también determina completamente el tamaño del mismo (dejando libre la posición). Para obtener un *sistema básico* basta sustituir las longitudes de los dos lados consecutivos por la razón AB/BC entre ellos. Disponer de un sistema básico significa que, fijados valores concretos para cada uno de los elementos de dicho sistema, queda determinada una forma cuadrangular concreta. Así, por ejemplo, si fijamos los valores siguientes: $\alpha = 64^\circ$, $\beta = 85^\circ$, $\gamma = 100^\circ$ y AB/BC = 1.75, tenemos definida una forma cuadrangular concreta (Ver Gráfica n.º 10).



Gráfica n.º 10

Nueva clasificación dinámica de las formas cuadrangulares

Si queremos elaborar una clasificación de las formas cuadrangulares a partir del sistema básico descrito, debemos ir debilitando sistemáticamente las condiciones que definen al cuadrado y que expresaremos mediante los cuatro axiomas siguientes:

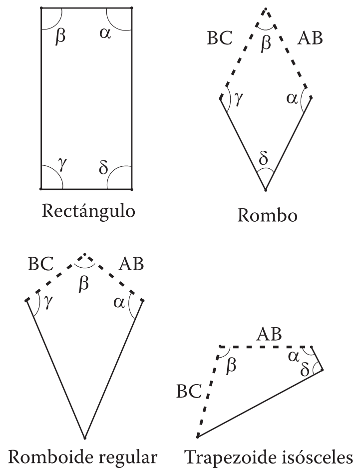
$$\alpha = \gamma;\ \beta = \delta;\ \alpha = \beta \ \text{y}\ AB = BC.$$

De manera análoga a la clasificación descrita anteriormente, basada en los axiomas que cumplen las diagonales del cuadrado, obtendremos un total de 16 (1+4+6+4+1) clases de formas cuadrangulares. De nuevo hay que decir que la elección de estos axiomas para caracterizar el cuadrado es relativamente arbitraria y que las clases de formas cuadrangulares que obtendremos dependerán, en cierta medida, de dicha elección.

Si eliminamos sucesivamente uno de los axiomas, aparecen las cuatro primeras clases de formas cuadrangulares. Cada una de ellas está determinada por tres de los axiomas citados; dos de estas clases de formas son muy conocidas y las otras dos son relativamente nuevas.

$\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$ y $\alpha = \beta$ (*Rectángulos*).
$\alpha = \gamma$; $\beta = \delta$ y AB = BC (*Rombos*).
$\alpha = \gamma$; $\alpha = \beta$ y AB = BC (*Romboides regulares*[7]).
$\beta = \delta$; $\alpha = \beta$ y AB = BC (*Trapezoides isósceles*[8]).

Junto a los Rectángulos y Rombos, que son clases de formas cuadrangulares simplemente infinitas que ya aparecían en la clasificación basada en las diagonales, aparecen ahora dos nuevas clases de formas cuadrangulares simplemente infinitas: los Romboides regulares, en lugar de los Romboides isodiagonales, y los Trapezoides isósceles, en lugar de los Trapecios ortodiagonales (Ver Gráfica n.º 11).

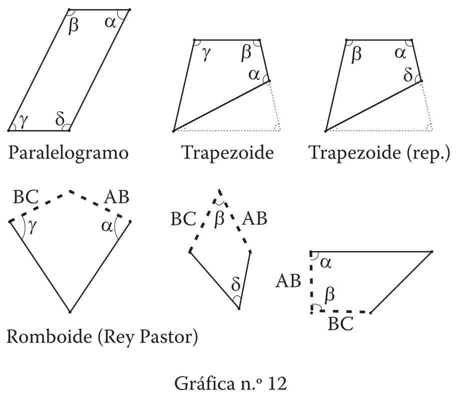


Gráfica n.º 11

Si ahora eliminamos dos de los axiomas de todas las maneras posibles obtenemos seis nuevas clases de formas. Las cuatro primeras son las siguientes.

$\alpha = \gamma$ y $\beta = \delta$ (*Paralelogramos*).
$\alpha = \gamma$ y $\alpha = \beta$ (*Trapezoides*).
$\alpha = \beta$ y $\beta = \delta$ (*Trapezoides*).
$\alpha = \gamma$ y AB = BC (*Romboides*).

Las dos últimas, definidas respectivamente por ($\beta = \delta$ y AB = BC) y por ($\alpha = \beta$ y AB = BC) no tienen todavía un nombre asignado. De nuevo constatamos que, junto a los Paralelogramos y los Romboides (en el sentido de Rey Pastor) que son clases de formas cuadrangulares doblemente infinitas que ya aparecían en la clasificación basada en las diagonales, aparecen nuevas clases de formas cuadrangulares doblemente infinitas (Ver Gráfica n.º 12).



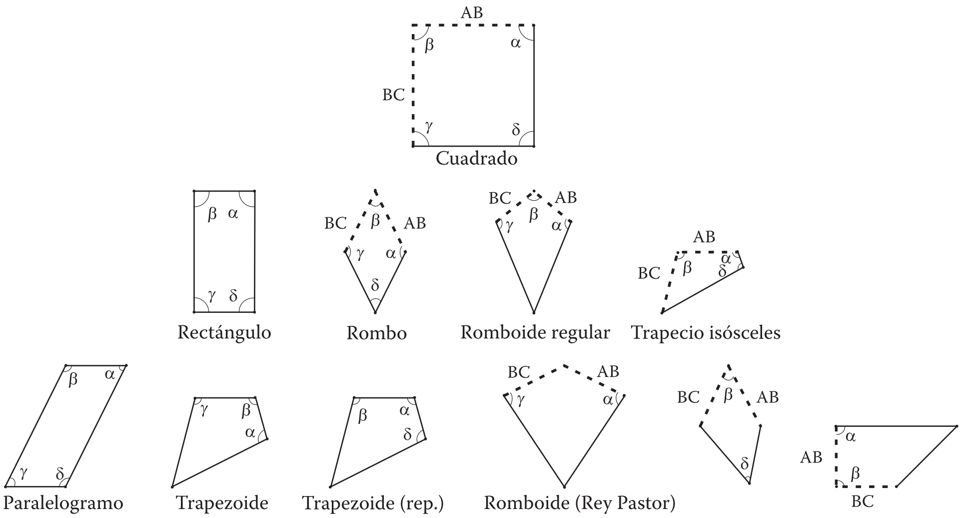
Gráfica n.º 12

Para completar esta clasificación faltan por citar las cuatro clases de formas cuadrangulares que están determinadas, respectivamente, por cada una de las condiciones o axiomas ($\alpha = \gamma$); ($\beta = \delta$); ($\alpha = \beta$) y (AB = BC). No asignaremos nombre a ninguna de ellas ni las representaremos gráficamente. Se trata de clases de formas que tienen, por tanto, tres grados de libertad. No coinciden con ninguna de las clases que se habían obtenido en la clasificación basada en las propiedades de las diagonales. Y, por último, si no se impone ninguna de las cuatro restricciones obtenemos, como siempre, la clase universal de todas las formas cuadrangulares (ver Gráfica n.º 13).

A modo de conclusión

En esta segunda parte del artículo se han analizado algunas de las respuestas posibles a la cuestión de la clasificación de los cuadriláteros convexos. He mostrado que en el currículum de la E.S.O. dicha cuestión *aparece en el nivel temático*, no proviene de los niveles superiores de la jerarquía (sector, área y disciplina) ni *conduce a ninguna parte*. Podemos afirmar, por lo tanto, que se trata de una cuestión encerrada en sí misma, *muerta*.

Hemos visto que la cuestión de la clasificación de los cuadriláteros puede hacerse emerger en el ámbito de ciertas situaciones umbilicales de la geometría de la enseñanza secundaria, esto es, de situaciones en las que se aborda la *problemática de la determinación y la construcción de figuras geométricas* (y hasta de la noción misma de *figura geométrica*). De esta manera, cada una de las clasificaciones que se proponen puede entenderse como un *estudio del cambio de forma de los cuadriláteros* que permitiría recuperar la razón de ser del estudio de esta cuestión en la E.S.O. Se trata de una propuesta que, de poderse llevar a cabo, incidiría mucho más allá del nivel temático y provocaría una reestructuración profunda de los diferentes sectores y hasta de algunas áreas completas del currículum de matemáticas. ■



Gráfica n.º 13

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANZOLA, M.; VIZMANOS, J.R.; BARGUEÑO, J.; PERALTA, J. (2002): *Matemàtiques 1. Primer cicle ESO*, Ed. Cruilla, Barcelona.

BAILO, C.; CASALS, R.; GOMÀ, A.; TUDURÍ, J. (1996): *Vector 3. Matemàtiques*, Ed. Teide, Barcelona.

BOSCH, M.; COMPTA, A.; GASCÓN, J.; LAMARCA, J.M.; URBANEJA, P.M.G. (1996): *Matemáticas. 3º ESO*, Ed. Almadraba, Madrid.

BOSCH, M.; FONSECA, C.; GASCÓN, J. (en prensa): Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las Instituciones Escolares, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (pendiente de publicación).

CAÑADILLA, J. L. y otros (2002): *Matemàtiques Primer d'ESO*, Castellnou Ed., Barcelona.

CASTELNUOVO, E. (1981): *La Geometria*, Ed. Ketres, Barcelona.

CHEVALLARD, Y. (2001): Aspectos problemáticos de la formación docente, *XVI Jornadas del SI-IDM*, Huesca. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino/siidm.htm

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. (1997): *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori, Barcelona.

DE LA HAZA, C.; MARQUÉS, M.; NORTES, A. (2002): *Matemàtiques (1r d'ESO)*, Grup Promotor Santillana, Madrid.

FONSECA, C.; GASCÓN, J. (2000): Reconstrucción de las organizaciones matemáticas en las organizaciones didácticas, *XIV Jornadas del SIIDM*, Cangas do Morrazo, abril del 2000. Recuperable en http://www.ugr.es/local/jgodino.htm

GASCÓN, J. (1997): Cambios en el contrato didáctico. El paso de estudiar matemática en secundaria a estudiar matemática en la universidad, *Suma*, 26, 11-21.

GASCÓN, J. (2002): Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?, *Suma*, 39; 13-25.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS (Cont.)

GASCÓN J. (2003): Efectos del "autismo temático" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. In Palacián, E. (ed.) *Aspectos didácticos de matemáticas*, Zaragoza, Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad de Zaragoza (en prensa).

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE, (2001a): *Enseñanza Secundaria Obligatoria. Enseñanzas mínimas*, Edita Secretaría General Técnica, Subdirección General de Información y Publicaciones, Madrid (Real Decreto 3473/2000 de 29 de diciembre).

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE, (2001*b*): *Bachillerato. Enseñanzas mínimas*, Secretaría General Técnica, Sub. Gral. de Información y Pub., Madrid (R. D. 3474/2000 de 29 XII).

PIAGET, J. GARCIA, R. (1982): *Psicogénesis e historia de la ciencia*, Siglo XXI (4a. edición), México DF.

POSTMAN, N. (1995): *El fin de la educación*, EUMO-Octaedro, Barcelona (1999).

PUIG ADAM, P. (1947): *Curso de Geometría Métrica (tomo I)*, Biblioteca Matemática, Madrid (citado por la 11ª edición de 1973

NOTAS

1 Así, por ejemplo, la mayoría de estudiantes que han concluido la Enseñanza Secundaria (E.S.O y Bachillerato), y que están empezando sus estudios matemáticos a nivel universitario, consideren que no existe ningún *Rectángulo* que sea un *Rombo* y ni siquiera acepten que pueda existir algún *Rectángulo* que sea un *Cuadrado* (Fonseca y Gascón, 2000 y Bosch, Fonseca y Gascón, en prensa).

2 Utilizo una definición de *romboide*, hoy en desuso, equivalente a la que dio Rey Pastor: un *romboide* es un cuadrilátero que tiene un eje de simetría que pasa por dos de sus vértices. Desde el punto de vista de las propiedades de las diagonales podríamos definir los romboides como aquellos cuadriláteros cuyas diagonales se cortan perpendicularmente (D2) y, además, el punto de intersección de dichas diagonales divide a una de ellas en dos partes iguales (D4). Como dice Puig Adam (1947, p. 68), se trata de una noción "más útil que la aplicación clásica que de esta palabra se hace para designar un paralelogramo que no sea rombo ni rectángulo, y que carece de interés".

3 Es claro que la elección de los *axiomas* que satisfacen las diagonales del cuadrado es relativamente arbitraria y que de ella dependerán, en cierta medida, las clases de formas cuadrangulares que aparecerán posteriormente. Surge aquí un problema interesante: si el sistema de axiomas que caracteriza las diagonales del cuadrado está formado por *axiomas independientes* ¿en qué medida las clases de formas que irán apareciendo al debilitar dichas condiciones dependerán del sistema de axiomas elegido?

4 La Calculadora Simbólica WIRIS, disponible en la red en la dirección http://calculadora.edu365.com (a la que se puede acceder a través del portal www.edu365.com del Departament d'Ensenyament de la Generalitat de Catalunya) ha implementado una aplicación que permite ir modificando (debilitando en nuestro caso) sistemáticamente las restricciones que cumplen las diagonales del cuadrado para recorrer cualquiera de las 24 direcciones de evolución de las formas cuadrangulares así como cualquiera de las combinaciones que se pueden realizar con ellas. Existe una versión de demostración en español www.wiris.com/demo/es. Agradezco a Ramon Eixarch, que es uno de los autores de este instrumento, el trabajo minucioso y preciso que ha llevado a cabo (usando la Calculadora WIRIS) para dibujar todas las gráficas que figuran en este artículo.

5 El hecho de que esta cuestión no se tenga en cuenta para organizar el currículo de la geometría en Secundaria tiene relación con las discontinuidades entre los estadios que Piaget y García (1982) denominan, respectivamente, *intra-figural* y *inter-figural*. En Gascón (1997) se analiza estas discontinuidades relacionándolas con el paso de estudiar geometría en la Enseñanza Secundaria a estudiar geometría en la Enseñanza Universitaria.

6 En lo que sigue, *cuadrilátero* significará *cuadrilátero convexo*.

7 Se trata de los *Romboides* definidos anteriormente, en el sentido de Rey Pastor, con la propiedad adicional de que la amplitud del ángulo b también coincide con la de $\alpha = \gamma$.

8 Se trata de una nueva clase de formas cuadrangulares que no había aparecido hasta el momento. En lugar de utilizar la noción clásica de *trapezoide* para designar los cuadriláteros que no tienen lados paralelos (noción ésta que carece de interés), llamamos *Trapezoides* (ver Gráfica n.º 12) a los cuadriláteros que tienen tres ángulos iguales $\alpha = \beta = \delta$; si, además, cumplen la condición AB=BC, entonces les llamaremos *Trapezoides isósceles* (ver Gráfica n.º 11). Los *Trapezoides* también pueden definirse combinando las nociones de *trapecio isósceles* y *triángulo isósceles*. En efecto, es fácil demostrar que uniendo un trapezoide y un triángulo isósceles se puede construir un trapecio isósceles y, recíprocamente, que todo trapezoide puede construirse eliminando un triángulo isósceles de un trapecio isósceles (ver Gráfica n.º 12).