SUMA 44
Noviembre 2003, pp. 39-44

Sonidos, fracciones, medias, potencias y funciones exponenciales

Tomando la música como punto de interés de los alumnos, el trabajo presenta una actividad de clase desarrollada con grupos de Educación Secundaria Obligatoria para Adultos, en el que se ponen de manifiesto determinados aspectos matemáticos de la producción de sonidos y de la escala (en realidad escalas) usadas en la música occidental. Con este pretexto, abarcando desde fracciones y sus expresiones decimales, hasta funciones exponenciales y sus representaciones gráficas, pasando por las potencias de exponente tanto natural como racional y sus propiedades, la manipulación algebraica y la investigación numérica, se analiza fundamentalmente la escala que Pitágoras elaboró, dentro del canon musical de la Grecia Clásica.

This essay is about a class activity carried out with groups of adults studying secondary education, taking music as the topic of interest for the students. Certain mathematical aspects of the production of sounds and of the scale (in fact, scales) used in western music are highlighted. With this pretext, and in the context of the musical canon of classical Greece, the scale that Pitagoras devised is analysed, covering from fractions and their decimal expressions, to exponential functions and their graphic representation, and going through the powers of both natural and rational exponent and their properties, algebraic manipulation and numeric research.

Desde que comencé a dar clases de Matemáticas en un Instituto, hace ya 13 años, lo más duro de mi docencia ha sido convencerme de que no todos los alumnos están enamorados de las Matemáticas. Es más, la mayoría de ellos, ni siquiera las consideran atractivas. ¿Cómo es posible? Es un peligro que corremos los Licenciados en Matemáticas que accedemos al mundo de la Enseñanza Secundaria. Después de una carrera fuertemente vocacional, acabé apreciando de tal forma la belleza de cada argumento de una demostración, necesitando justificar todo lo que afirmaba, se instaló en mi forma de ser el esquema deductivo definición-demostración-corolario hasta tal punto que llegé a creer que la Enseñanza de las Matemáticas se ajusta a este modelo. Más aún, que incluso la vida misma se ajusta a ese modelo. Pero no. Rotundamente no. Este problema inicial no hizo sino añadir dificultad a la ya de por sí difícil Didáctica de las Matemáticas. Si sumamos el hecho de que debido a mi formación en Matemática Pura (al menos entonces se llamaba así), siempre viví despreocupado de cualquier aplicación de las Matemáticas que se instalara en un edificio distinto del propio de éstas, se comprenderá mejor el escalofrío, mezcla de impotencia e incomprensión, que aún hoy en día me recorre cuando los alumnos de una clase se amotinan con el grito de guerra: ¡¡Y ésto para que sirve!!. Inocentemente, la primera vez que esto se produjo, pensé que los alumnos, en su desmedido afán por adquirir conocimiento y culturilla, pretendían ir más allá del estricto conocimiento matemático objeto de la lección a estudiar, para fundirlo con sus sólidos conocimientos científico-tecnológicos. Pero

Desde que comencé a dar clases de Matemáticas, lo más duro de mi docencia ha sido convencerme de que no todos los alumnos están enamorados de las Matemáticas. Es más, la mayoría de ellos, ni siquiera las consideran atractivas.

cuando constaté que el amotinamiento era periódico, con un periodo cuya longitud es la duración de cada tema, comprendí que en realidad, el grito de guerra era: ¡¡Para qué demonios queremos aprender fracciones, polinomios, trigonometría... si la mayoría de nosotros no vamos a estudiar ciencias y para comprar la botellona sólo hace falta a lo sumo, sumar y/o restar!! De nada me sirvió argumentar mi respuesta con una ingente cantidad de ejemplos de aplicación de las Matemáticas a la Física escolar, pues para ellos son dos bloques completamente diferentes. Mucho menos me sirvió intentar justificarles la necesidad de Ruffini para cuando el

Jesús Beato Sirvent
IES Bahía de Cádiz
Facultad de Ciencias, Universidad de Cádiz

futuro calculemos derivadas de funciones racionales aplicando la definición, pues para ellos no existe el futuro; el curso que viene está siempre muy lejos. Cuentan que Pitágoras, cuando alguno de los acusmáticos (iniciados en las Matemáticas, que tenían acceso a los resultados pero aún no a las demostraciones) le interrumpía con alguna pregunta sobre la utilidad práctica de las Matemáticas, le devolvía el doble de lo invertido al entrar a formar parte de la fraternidad pitagórica y lo invitaba a abandonar su Academia (también he leído esta anécdota como atribuida a los discípulos de Arquímedes).

Todo lo anterior no es sino una excusa para concluir que desde hace ya bastantes años, uno de mis puntos de interés en Didáctica de las Matemáticas es la creación de actividades dedicadas a descubrir variados usos de las Matemáticas en temas de interés para los alumnos. En este trabajo presento una actividad desarrollada durante el curso escolar 2001-2002 con alumnos de Educación Secundaria Obligatoria para Adultos en 4 sesiones de duración. La idea surgió de la lectura del capítulo dedicado a Pitágoras en el "Teorema del loro" (esta novela la tengo como libro de lectura obligatoria. Cada mes leemos algunos capítulos y los examino de su lectura). En este capítulo, muy de refilón, se aludía a que era Pitágoras el creador de una teoría matemática de la música. Aprovechando el momento, y ya que parecía ser un fuerte foco de interés para ellos, hicimos un visionado del fragmento del video "Donald en el país de las Matemáticas" (me gustaba más su título orginal: "Donald in Mathmagic's Land") en el que analiza la relación de Pitágoras con la música –por cierto, este fragmento contiene un error, al expresar la fracción correspondiente al intervalo de séptima-. Como los alumnos reclamaban más información, elaboré estas notas que les fueron entregadas para ser trabajadas en clase. Durante las cuatro sesiones estuve acompañado de un teclado electrónico en el que materializar los sonidos. Es sin duda el instrumento más apropiado para tal fin, por su disposición longitudinal y su didáctica disposición de los sonidos naturales y alterados. En la última sesión, los alumnos que lo desearon trajeron sus instrumentos y tras una breve descripción de los mismos, cada uno tocó alguna pieza. El contenido matemático del trabajo creo que es rico, abarcando desde fracciones y sus expresiones decimales, hasta funciones exponenciales y sus representaciones gráficas, pasando por las potencias de exponente tanto natural como racional y sus propiedades, la manipulación algebraica y la investigación numérica.

¿Cuántos sonidos distintos existen?

Esta es nuestra escala actual:

Do$_1$	Do$_1$# =Reb	Re$_1$	Re$_1$# =Mib	Mi$_1$	Fa$_1$	Fa$_1$# =Solb	Sol$_1$	Sol$_1$# =Lab	La$_1$	La$_1$# =Sib	Si$_1$	Do$_2$

Consta de 12 sonidos, desde Do hasta Si, que se repiten indefinidamente de forma periódica. La distancia entre cada sonido y el siguiente de esta tabla se llama semitono. Los sonidos Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si se llaman naturales y los intermedios, Do#=Reb, Re#=Mib, Fa#=Solb, Sol#=Lab, La#=Sib se denominan alterados. Hay dos tipos de alteraciones: las que añaden un semitono a una nota natural, que se denominan sostenidos y se representan por # y las que restan un semitono a la nota natural correspondiente, que se llaman bemoles y se representan por b. Dos semitonos consecutivos forman pues un tono. La distancia entre dos sonidos naturales se llama intervalo. Los intervalos se nombran contando el número de sonidos naturales que quedan dentro de ellos, incluidos los dos de los extremos.

Ejemplos:
[Do1, Mi1] Es un intervalo de tercera, o simplemente una tercera, ya que incluye tres sonidos naturales: Do, Re, Mi.
[Mi1, Sol1] Es un intervalo de tercera, o simplemente una tercera, ya que incluye tres sonidos naturales: Mi, Fa, Sol.
[Re1, La1] Es un intervalo de quinta, o simplemente una quinta, ya que incluye cinco sonidos naturales: Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do.
[Do1, Do2] Es un intervalo de octava, o simplemente una octava. Es la unidad fundamental en la amplitud de intervalos. En todo este trabajo trataremos siempre con una amplitud máxima de dos octavas, esto es, para fijar ideas, con el intervalo [Do1, Do3].

No todos los intervalos, aún teniendo la misma amplitud, abarcan la misma cantidad de tonos.

Ejemplos:
[Do, Mi] Es una tercera que abarca 2 tonos.
[Mi, Sol] Es una tercera que abarca 1 + 1/2 tonos.
[Re, La] Es una quinta que abarca 3 + 1/2 tonos.

Ejercicio 1:
Indica la amplitud de cada uno de los siguientes intervalos y calcula cuántos tonos y/o semitonos abarca cada uno.

a) [Do, Sol]
b) [Do, La]
c) [Re, Si]
d) [Re, Do]
e) [Do, Re]
f) [Mi, Do]
g) [Do, Mi]
h) [Mi, Si]
i) [Fa, Do]

Ejercicio 2:
Escribe:

a) 3 intervalos de cuarta.
b) 3 intervalos de quinta.

c) 3 intervalos de sexta.
d) 3 intervalos de séptima.

Ejercicio 3:
Indica todos los intervalos de cuarta, dentro de las dos octavas en las que nos movemos, que abarquen 2 + 1/2 tonos y un intervalo de cuarta que no abarque 2 + 1/2.

Ejercicio 4:
Indica todos los intervalos de quinta, dentro de las dos octavas en las que nos movemos, que abarquen 3 + 1/2 tonos y un intervalo de quinta que no abarque 3 + 1/2.

Ejercicio 5:
¿Cuántos tonos y/o semitonos abarca un intervalo de octava?

Para los griegos, sólo existían cuatro sonidos armónicos: los sonidos naturales, las cuartas, las quintas y las octavas.

¿Qué relaciones existen entre los sonidos y los números?

Cómo veremos más adelante, fue Pitágoras el primero que interrogó a la naturaleza para tratar de conocer las relaciones numéricas que existían entre los sonidos. Para los griegos, sólo existían cuatro sonidos armónicos (es decir, sonidos cuya manifestación simultánea origina una sensación agradable a nuestro oído: los sonidos naturales, las cuartas, las quintas y las octavas). Al establecer la relación entre ciertas proporciones numéricas y los sonidos armónicos, Pitágoras inauguró una teoría matemática de la música. Las bases de esta teoría eran dos:

1. El sonido producido por la pulsación de una cuerda tensa depende de la longitud de la cuerda.
2. Los cuatro sonidos armónicos se originan por la pulsación de cuerdas igualmente tensas cuyas longitudes se disponen según ciertas proporciones matemáticas.

Estas proporciones a las que Pitágoras hace referencia en su segunda ley matemática de la música se expresan así:

Si un sonido se produce al pulsar una cuerda tensa de longitud l, entonces:

- La cuarta se produce al pulsar una cuerda tensa de longitud

$$\frac{12}{9}\mathrm{l} = \frac{4}{3}l$$

- La quinta se produce al pulsar una cuerda tensa de longitud

$$\frac{12}{8}\mathrm{l} = \frac{3}{2}l$$

-La octava se produce al pulsar una cuerda tensa de longitud

$$\frac{12}{6}\mathrm{l} = 2l$$

Nota: A partir de ahora, consideraremos que la longitud de la cuerda es la unidad y por tanto, las fracciones correspondientes a los sonidos armónicos son las recogidas en la siguiente tabla:

Sonido	Cuarta	Quinta	Octava
1	4/3	3/2	2

De esta forma, para obtener la proporción correspondiente a un intervalo, basta dividir las proporciones correspondientes a los sonidos que figuran en sus extremos.

¿Cuáles son las proporciones que producen el resto de los 12 sonidos?

La teoría matemática de la música iniciada por Pitágoras y continuada por los pitagóricos siguió avanzando en su estudio, fundamentalmente desarrollada por dos discípulos de Pitágoras que llegaron a fundar escuelas propias: Arquitas de Tarento y Aristógenes de Tarso. Pero hubo que esperar un poco más hasta que Platón consiguió calcular las proporciones que producían los sonidos naturales. Para este cálculo, Platón llevó a cabo el siguiente procedimiento:

1. Dividió la octava en dos cuartas y un tono, así:

[Do, Fa]-[Fa, Sol]-[Sol, Do]

Cada una de estas cuartas está formada por 2 + 1/2 tonos, luego son de la misma amplitud.

2. Dividió cada una de estas cuartas en tres subintervalos. Los dos primeros debían corresponder con un tono y el tercero con un semitono, luego debía ser menor (aunque no necesariamente la mitad).

3. Asignó a cada uno de los subintervalos correspondientes a un tono, la proporción 9/8.

4. De este modo, al subintervalo correspondiente al semitono en cada cuarta le correspondería la proporción:

$$\frac{4}{3}\Big/\left(\frac{9}{8}\right)^2 = \frac{256}{243}$$

Ejercicio 6:
Justifica el punto (4) del procedimiento anterior seguido por Platón para calcular las proporciones de los sonidos naturales.

De este modo pudo completar la escala de proporciones correspondientes a los sonidos naturales, a saber:

Sonidos	Do	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Proporciones	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
Factor	9/8	9/8	256/243	9/8	9/8	9/8	256/243	

Nota: Observa que para obtener cada proporción basta multiplicar la proporción del sonido anterior por el factor indicado también en la columna anterior.

Esta escala pitagórica-platoniana de afinación se conoció como la “Escala del Timeo” pues apareció publicada por primera vez en el manual filosófico titulado “Timeo”, escrito por Platón. Los semitonos son muy pequeños con respecto a los tonos. Es muy apta para la música melódica pero no para la polifónica. Fue la típica división de la escala durante toda la Época Clásica y la Edad Media, hasta la llegada del Renacimiento.

Ejemplo: Con la escala del Timeo, se pueden calcular ya las proporciones correspondientes a cada intervalo. Para ello, basta dividir las proporciones correspondientes a ambos extremos del intervalo:

[Do, Fa] es una cuarta que abarca 2 + 1/2 tonos cuya proporción es:

$$\frac{4}{3}:1=\frac{4}{3}$$

[Sol, Do] es una cuarta que abarca 2 + 1/2 tonos cuya proporción es:

$$2:\frac{3}{2}=\frac{4}{3}$$

[Re, Fa] es una tercera que abarca 1 + 1/2 tonos cuya proporción es:

$$\frac{4}{3}:\frac{9}{8}=¿$$

La escala pitagórica-platoniana de afinación se conoció como la “Escala del Timeo” pues apareció publicada por primera vez en el manual filosófico titulado “Timeo”, escrito por Platón.

Ejercicio 7:
Completa la siguiente tabla en la que se te pide la denominación del intervalo, la cantidad de tonos y/o semitonos que abarca y la proporción que le corresponde:

Intervalo	Denominación	Tonos que abarca	Proporción
[Re, Mi]			
[Mi, Sol]			
[Fa, Si]			
[Do, Sol]			
[Fa, Do]			
[Mi, La]			
[Do, Si]			

Ejercicio 8:
En el ejercicio 2, escribiste todos los intervalos de cuarta que abarcaban tonos. Comprueba si a todos ellos les corresponde la misma proporción. Repite la misma cuestión con todos los intervalos de quinta que abarcaban tonos y que escribiste en el ejercicio 3.

Fué Pitágoras quién estableció la “Proporción musical”.

Ejercicio 9:
Completa la siguiente tabla, en la que calcularás la proporción que corresponde a cada sonido alterado. Para obtener cada proporción, solo tienes que multiplicar la proporción que le corresponde al sonido de la columna anterior por el factor correspondiente también a al columna anterior. Hay una excepción: la proporción correspondiente a Fa# se calcula dividiendo entre 256/243 la correspondiente a Sol. En todo caso, simplifica las fracciones.

Do	Do# =Reb	Re	Re# =Mib	Mi	Fa	Fa# =Solb	Sol	Sol# =Lab	La	La# =Sib	Si	Do
1		$\frac{9}{8}$		$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{27}{16}$		$\frac{243}{128}$	2
$\frac{256}{243}$		$\frac{256}{243}$					$\frac{256}{243}$		$\frac{256}{243}$			

Esta escala se conoce como “Sistema de afinación pitagórico”. El factor era denominado “limma” (resto) por los pitagóricos.

Ejercicio 10:
Cada una de las proporciones del sistema de afinación pitagórico es un cociente entre potencias de 2 y potencias de 3.
Escribe cada una de las proporciones del sistema de afinación pitagórico, como cociente de potencia de 3 y una potencia de 2.

¿Cómo obtuvo Pitágoras las relaciones numéricas entre los sonidos armónicos?

> "Se cuenta que Pitágoras pasó por azar delante de un taller donde unos herreros golpeaban el yunque. Se detuvo a escuchar el sonido cadencioso de los martillos, observando que el tono melodioso de tres de ellos era alterado por la disonancia de un cuarto. Sorprendido por el fenómeno, pidió prestados los martillos para realizar una experiencia científica, la primera de las que la historia haya dado cuenta. Pesó cuidadosamente los martillos y los colgó de cuatro cuerdas de modo que al quedar tirantes tuviesen la misma longitud. Haciendo vibrar las cuerdas, apreció que los sonidos se correspondían con los de los martillos al golpear en el yunque. Añadiendo un trozo de arcilla al martillo que producía la disonancia, puso el sonido emitido por la cuerda correspondiente en armonía con los otros. Como conocía los pesos de los martillos (que eran proporcionales a 12, 9, 8 y 6) dedujo la ley aritmética que rige los intervalos musicales: el martillo cuyo peso era 12 producía el tono, el de peso 9 la cuarta, el de peso 8 la quinta y el de peso 6 la octava, estableciendo la proporción: 12/9 = 8/6 , que fue llamada "proporción musical" pues contiene las relaciones entre los sonidos armónicos. Como buen científico experimental, Pitágoras repitió la experiencia empleando en vez de cuerdas de igual longitud y pesos distintos, pesos iguales para tensar cuerdas de distinta longitud, y observó que las que daban el tono, la cuarta, la quinta y la octava, tenían longitudes proporcionales a 12, 9, 8 y 6". (González, 2001)

Ejercicio 11:
Observa que las proporciones correspondientes a la cuarta, la quinta y la octava que figuran en la tabla de la página 41 se pueden escribir con los números 12, 9, 8, 6. Escríbelas:

a) 4/3 = ?
b) 3/2 = ?
c) 2 = ?

Aunque Pitágoras usó como proporciones para los sonidos armónicos (cuarta, quinta y octava) las expresadas con los números 12, 9, 8, 6, según hemos visto en el ejercicio 11, éstas se puede expresar como las más simples formadas con los números: 1, 2, 3, 4. En el ideario filosófico de Pitágoras, recogido en una especie de "mandamientos" llamados "Versos de Oro", los cuatro primeros números formaban la base de la creación de la naturaleza. A este conjunto de cuatro números, Pitágoras los llamba la "tetractys". El hecho de que la música también estuviese regida por la tetractys no hacía sino confirmar el pensamiento de Pitágoras: "los números gobiernan la música".

¿Existen más relaciones numéricas entre los distintos sonidos?

En general, una forma de relación numérica la constituyen las medias. Se trata de distintas formas de intercalar un número entre dos dados. De todos los tipos de medias existentes, nos detendremos ahora en dos: la media aritmética y la media armónica.

La media aritmética de dos números a y b es el número que se obtiene como resultado de las siguientes operaciones:

$$\frac{a+b}{2}$$

La media armónica de dos números a y b no nulos es el número que se obtiene como resultado de realizar las siguientes operaciones:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

Ejemplo:
Media aritmética de 2 y 4.

$$\frac{2+4}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Media armónica de 2 y 4.

$$\frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}=\frac{2}{\frac{3}{4}}=\frac{8}{3}$$

La media aritmética divide a un intervalo en dos partes iguales. La media armónica divide a un intervalo en dos subintervalos de longitudes diferentes, de forma que siempre el de longitud menor es el que contiene al extremo menor.

Ejercicio 12:
Demuestra que la media armónica de dos números no nulos a y b también se puede calcular con la expresión:

$$\frac{2ab}{a+b}$$

Ejercicio 13:
Los números 12, 9, 8, 6 con los que Pitágoras descubrió las proporciones de los sonidos armónicos, cumplen varias relaciones numéricas. Descúbrelas.

Ejercicio 14:
Comprueba que la media aritmética divide a la octava en una quinta y una cuarta (de izquierda a derecha).

Ejercicio 15:
Comprueba que la media armónica divide a la octava en una cuarta y una quinta (de izquierda a derecha).

Nota: Los ejercicios 14 y 15 indican que la división natural de una octava en cuarta y quinta también atiende a ciertas relaciones numéricas entre las proporciones correspondientes.

¿Todos los instrumentos de cuerda afinan con las mismas proporciones?

No. La mayoría de los instrumentos de cuerda afinan con las proporciones pitagóricas que hemos hallado procedentes de la escala del Timeo. Hay dos excepciones notables: el piano y el arpa, que afinan en una escala irracional en el que todos los semitonos están igualmente distribuidos, a diferencia de la escala pitagórica en la que vimos que la limma era bastante más pequeña que la mitad de un tono. Esta escala se conoce como "afinación justa" y es la siguiente:

Do	Do# =Reb	Re	Re# =Mib	Mi	Fa	Fa# =Solb	Sol	Sol# =Lab	La	La# =Sib	Si	Do
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2^2}$	$\sqrt[12]{2^3}$	$\sqrt[12]{2^4}$								2

Ejercicio 16:
Completa la tabla anterior, simplificando los radicales que en ella intervienen.
Ejercicio 17:
¿Por qué la raíz de índice 12 en la escala de afinación justa?

Ejercicio 18:
Reproduce la escala de afinación pitagórica, pero escribiendo en lugar de cada una de las proporciones, su expresión decimal, con dos cifras decimales obtenidas mediante redondeo.

Ejercicio 19:
Reproduce la escala de afinación justa, pero escribiendo en lugar de cada una de los factores, su expresión decimal, con dos cifras decimales obtenidas mediante redondeo.

Ejercicio 20:
Sobre papel milimetrado, representa en un diagrama de barras, los datos obtenidos en la tabla del ejercicio 18.

Ejercicio 21:
Sobre papel milimetrado, representa en un diagrama de barras, los datos obtenidos en la tabla del ejercicio 19. ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

GOLDÁRAZ, J.J. (1992): *Afinación y Temperamento en la Música Occidental*. Alianza Editorial, Madrid.

GONZÁLEZ, P.M. (2001): *Pitágoras. El filósofo del número*, Nívola, Madrid.

LIERN, V. (1988): "La música y sus materiales, una ayuda para la clase de Matemáticas", *SUMA* nº 14-15, 60-64.