

En este artículo se proponen actividades para un trabajo de investigación en matemáticas de secundaria a través del estudio de familias de triángulos y tetraedros fractales de algoritmo lineal común. Se aportan muchas ideas y la experiencia de los recursos utilizados en este trabajo de investigación escolar en geometría. Los numerosos aspectos que se pueden tratar en estas familias de fractales permiten trabajar en este tema atendiendo muchos de los objetivos de la asignatura, graduando convenientemente su dificultad, y añadiendo conocimientos básicos de geometría fractal.

This article presents several activities to do research work on Maths at secondary education through the study of families of fractal triangles and tetrahedrons of common lineal algorithm. Plenty of ideas are put forward as well as the experience of the resources used in this research project on geometry at school level. The numerous aspects involved in these families of fractals allow us to work on this topic while we fulfil many of the objectives of the Maths subject. It allows us to progressively increase the difficulty of the exercises and to provide our students with some basic knowledge of fractal geometry.

En este artículo se proponen unas actividades orientadas a la investigación matemática en la enseñanza secundaria, utilizando estructuras fractales sencillas como recurso para el trabajo en geometría.

Cada vez se hace menos necesario presentar a los fractales matemáticos, esos objetos geométricos autosimilares, y por lo tanto invariantes a determinados cambios de escala. Su popularidad va en aumento en los últimos años y su estudio se va incorporando a las matemáticas más tradicionales. Actualmente la geometría fractal ya forma parte de los contenidos matemáticos del Bachillerato Artístico, y en la enseñanza superior suele aparecer como asignatura optativa en el segundo ciclo de la titulación universitaria de Matemáticas.

"Si vuelvo a batir palmas, ¿sabes lo que ocurrirá? Se iluminarán los números pares en todo el triángulo, y los impares seguirán oscuros. ¿Quieres que lo haga? Lo que Robert vio entonces fue una auténtica sorpresa. ¡Es una locura! Un dibujo. Triángulos dentro del triángulo, sólo que cabeza abajo."
Enzensberger, 1997

Su utilidad aportando modelos para numerosos fenómenos y objetos naturales es ya indiscutible.

La incorporación de los fractales lineales a las matemáticas en la etapa secundaria es adecuada por la sencillez de las transformaciones geométricas que los definen, y está especialmente indicada para desarrollar los contenidos de geometría, constituyendo además un elemento motivador para los estudiantes (Figueiras, 2000; Moreno-Marín, 2002).

Estudiando estos objetos se relacionan numerosos contenidos que tradicionalmente aparecen dispersos en las diferentes áreas de las matemáticas, y se pueden plantear tareas novedosas enmarcadas en actividades de investigación en el aula. Estas actividades implican necesariamente la aplicación del principio constructivista de utilizar todas las herramientas de conocimiento y análisis conocidas por los estudiantes, e incluso adquirirán nuevas, para aproximarse a una realidad concreta.

Juan Carlos Moreno Marín

I.E.S. Leonardo da Vinci, Alicante

Dpto. Física, Ingeniería de Sistemas y Teoría de la Señal
Universidad de Alicante

Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana
"Al-Khwarizmi".

Con estos fines se ha organizado esta propuesta didáctica, a través de un conjunto estructurado de actividades, para investigar con los estudiantes de ESO y Bachillerato los triángulos y tetraedros fractales. Son fractales lineales cuyo estudio resulta muy eficaz para alcanzar algunos de los objetivos de nuestra tarea docente, y nos permiten otra forma más activa de trabajar en geometría. Al mismo tiempo, es una manera de introducir ideas básicas de geometría fractal como la autosimilaridad y la dimensión.

Comenzando con el triángulo de Sierpinski como ejemplo de fractal lineal autosimilar, se desarrollan estas dos familias de fractales y se estudian las características geométricas de sus elementos. Con este trabajo no sólo se revisan las propiedades del triángulo, el tetraedro y el octaedro regulares, sino de sucesiones infinitas de ellos con diferentes escalas, comprobando su capacidad para rellenar el plano y el espacio, y obteniendo interesantes interconexiones entre modelos geométricos y modelos numéricos.

Con materiales muy sencillos, como hojas de malla triangular, enladrilladas, y pegatinas triangulares (habituales en educación infantil), se proponen una variedad de tareas que generan numerosas situaciones de aprendizaje en cualquiera de los niveles de enseñanza secundaria. La investigación puede avanzar por caminos muy diversos, suficientemente definidos en esta presentación, pero además con aspectos de dificultad y complejidad diferentes que facilita en cada nivel la necesaria atención a la diversidad de nuestros estudiantes.

Las posibilidades de trabajo matemático con estas figuras geométricas son innumerables. Durante el desarrollo de esta investigación se realizarán actividades manuales, como el dibujo, el plegado y la construcción de figuras; de observación espacial de formas y secciones tridimensionales con el reconocimiento de los algoritmos de generación; de recuento y tabulación de elementos y sus características geométricas, como aristas y caras; de búsqueda de sus regularidades e inferencia de expresiones algebraicas para estas relaciones numéricas; cambios de escala y proporciones en figuras geométricas; cálculo de perímetros, áreas y volúmenes, mediante sumas y límites de sucesiones aritméticas y geométricas; la representación gráfica de las relaciones funcionales obtenidas; hasta el cálculo de un concepto tan abstracto como la dimensión fractal de las figuras, provocando en los estudiantes la utilización de numerosos conocimientos, así como las destrezas necesarias para obtener los mejores resultados. El éxito de la misma es la incorporación de todos estos aspectos en un entorno nuevo en matemáticas como la geometría fractal, con la consecución de resultados realmente novedosos.

Los estudiantes añadirán a estas actividades la consulta de bibliografía relativa al tema acorde con su nivel educativo. Para ello se utilizan tanto artículos de conocidas revistas de

divulgación científica, como algunas páginas en internet dedicadas a los fractales. Cuando los estudiantes inicien su tarea consultando la información imprescindible, es fácil que encuentren junto con descripciones sencillas de los fractales lineales, otras específicas del triángulo y el tetraedro de Sierpinski, pero difícilmente obtendrán referencias a otros elementos de estas familias fractales. Su trabajo de investigación les permitirá encontrar relaciones inesperadas.

Triángulos fractales

La finalidad de este estudio es conocer, construir y caracterizar los triángulos fractales desarrollados alrededor de un algoritmo lineal común. Este núcleo temático se abordará desde tres ámbitos matemáticos diferentes: la geometría fractal lineal, los lenguajes simbólicos y la aritmética modular. Estas distintas líneas de trabajo convergerán aportando resultados complementarios.

En esta presentación se han agrupado y resumido las actividades dedicadas a un mismo objetivo específico, de forma que su desarrollo, graduación y secuenciación supongan una manera de avanzar en la investigación que proponen. También se sugieren diferentes orientaciones que pueden realizar grupos distintos de estudiantes, para que sea posible adecuar la dificultad de las tareas, y resulte útil y eficaz para todos la puesta en común de sus resultados.

El interés se dirige a las descomposiciones de un triángulo equilátero mediante segmentos paralelos a sus lados. Al dividir los lados en k partes iguales, todos los pequeños triángulos equiláteros formados también son iguales, pudiéndose definir algoritmos fractales distintos al elegir cualquier subconjunto de estos. En particular se estudiarán los fractales cuyo algoritmo consista en seleccionar todos los subtriángulos que conserven la orientación del iniciador. Las estructuras se distinguen por su correspondiente valor del parámetro k ,

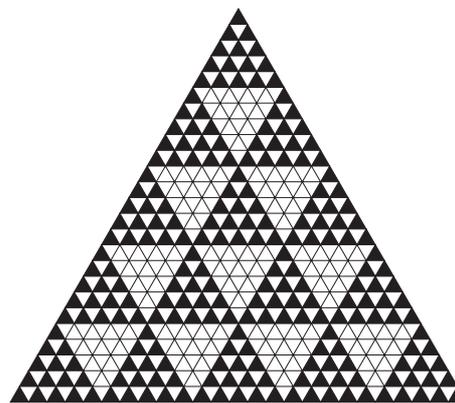


Figura 1. Segunda etapa del triángulo obtenido sobre una malla triangular con $k=5$ en el algoritmo.

siendo las más sencillas el triángulo de Sierpinski ($k=2$), la trisección ($k=3$) y la tetrasección ($k=4$).

En geometría plana resulta imprescindible comenzar con actividades de construcción gráfica para reconocer los objetos a estudiar. Así, utilizando como soporte hojas con malla de puntos y de trama triangular, se obtiene la apariencia de las primeras etapas de estas estructuras y se distinguen sus algoritmos de formación.

"El gran triángulo de los números es una cosa antiquísima, mucho más vieja que yo. Nuestro triángulo tiene por lo menos dos mil años. Creo que la idea se le ocurrió a algún chino. Pero hoy seguimos dándole vueltas, y seguimos hallando nuevos trucos que se pueden hacer con él. Si seguís así, pensó Robert para sus adentros, es posible que no acabéis nunca. Pero no lo dijo. Sin embargo, el diablo de los números le había entendido. -Sí, las matemáticas son una historia interminable -dijo-. Hurgas y hurgas y siempre encuentras cosas nuevas."
 Enzensberger, 1997

El conocido triángulo de Sierpinski, se presenta con su regla de generación: Conecta los puntos medios de los tres lados de un triángulo equilátero y selecciona sólo los tres subtriángulos que se forman en las esquinas, suprimiendo la cuarta parte central del triángulo. Repitiendo este proceso, quitando fragmentos cada vez más pequeños una y otra vez, infinitas veces, se genera este fractal.

Utilizando la descripción anterior, se propone a los estudiantes que apliquen este procedimiento hasta en cuatro etapas consecutivas a un triángulo con lados de 16 unidades de longitud sobre la malla triangular, obteniéndose una figura con 81 pequeños triángulos que tienen que sombrear. Alternativamente, otros pueden obtener la trisección ($k=3$) sobre un triángulo de 18 unidades de lado, conectando los puntos que dividen los lados en tres partes iguales obteniendo nueve sub-triángulos, y de ellos seleccionando sólo los seis exteriores, aplicando este algoritmo en dos iteraciones sucesivas y sombreando esos triángulos. Todos los vértices de los 36 sub-triángulos resultantes coinciden con un punto de la malla.

Estas actividades y sus resultados gráficos permiten la presentación en clase de conceptos como el algoritmo geométrico, la

autosimilaridad, el escalado, y la iteración, elementos imprescindibles para aproximarnos a la geometría fractal.

A partir de las figuras de esas primeras etapas, se les propone la búsqueda de otras estructuras insistiendo en que estos no son los únicos fractales posibles con un triángulo equilátero. Además de aumentar el valor de k , pronto utilizan las mismas particiones del triángulo, pero seleccionando otros subtriángulos, para definir nuevos algoritmos y representarlos tras dos o tres iteraciones. En la figura 1 se presenta la segunda etapa del triángulo cuando se ha utilizado $k=5$ sobre una malla triangular de 25 unidades de lado, y en la figura 2 aparece la tercera etapa del triángulo sobre la partición $k=3$, pero con un algoritmo distinto.

Pero los resultados de este trabajo manipulativo también se pueden utilizar para mejorar las capacidades descriptivas verbales, orales y escritas, en relación con la actividad matemática. Se pide a los estudiantes que describan los algoritmos fractales diseñados, de manera que cualquier compañero pueda obtener las mismas figuras a partir de estas explicaciones.

Con la variedad de formas que resultan, las siguientes actividades están dedicadas al estudio de sus características, y se orientan a la búsqueda de relaciones numéricas en los triángulos, a la inferencia de reglas generales, y a su expresión algebraica. La más sencilla consiste en el recuento del número de elementos sombreados en cada etapa, que permite reconocer el modelo y predecir el número de triángulos de las próximas etapas, identificando el factor constante entre etapas consecutivas, y generalizando a la etapa n -ésima la expresión del número de triángulos.

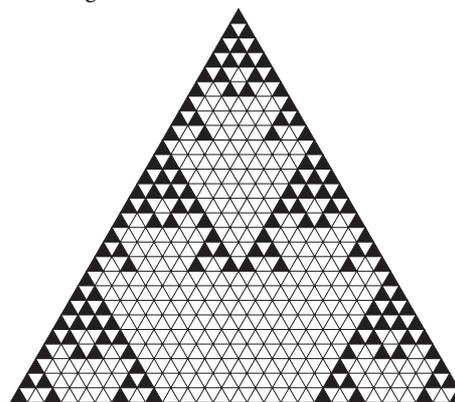


Figura 2. Tercera etapa de un triángulo fractal con el valor de $k=3$ donde sólo se seleccionan cinco triángulos. El diseño sugiere la superposición de triángulos incompletos a diferentes escalas

Atendiendo al área de las figuras, y partiendo del área del triángulo inicial, también se puede calcular el área sombreada en las primeras etapas, extendiendo el modelo para conocer el área total en las siguientes. El resultado se generalizará a la etapa n -ésima, discutiéndose qué ocurre con el área total de la figura límite fractal.

De la comparación de las expresiones del área con valores distintos de k en el algoritmo, se buscarán aquellos cuya área decrezca más rápidamente intentando justificarlo. Para ello, se calculan las fracciones del área total que se eliminan en cada iteración y los porcentajes acumulados que esta área representa. Los estudiantes pueden comprobar que la suma de las áreas de los sucesivos triángulos eliminados se reduce a la suma de una serie numérica de razón menor que la unidad, con lo que considerando infinitas etapas, la fracción eliminada es uno, y los triángulos fractales son figuras de área nula. Algunos de estos resultados son muy conocidos para el triángulo de Sierpinski (Queralt, 1997) y para la trisección (Moreno-Marín, 2002). La obtención de estas expresiones algebraicas requiere en algunos casos un esfuerzo analítico importante.

Los sistemas-L

Otra línea de trabajo es una aproximación a los lenguajes formales como una de las formas más peculiares para la representación de fractales. En ellos, cada elemento geométrico constituye un signo o una palabra del lenguaje, que puede ser combinada con otras palabras mediante reglas, y que al ser aplicadas reiteradamente permiten obtener conjuntos fractales.

Una familia de estos lenguajes son los denominados sistemas-L o gramática de A. Lindenmayer, creados por este biólogo en 1968 para simular la formación de estructuras biológicas ramificadas y el crecimiento de organismos vivos. En los años 80 se incorporaron los sistemas-L a los programas por ordenador, produciendo modelos fractales de plantas y árboles. Sin embargo, los sistemas-L constituyen también una de las maneras más elegantes de representar fractales lineales como los triángulos.

Un sistema-L se define mediante un conjunto de símbolos que forman la cadena inicial o axioma, y el conjunto de reglas de sustitución ó producción. A partir de esta secuencia de símbolos, se obtiene la reescritura de la cadena aplicando las reglas de sustitución para cada elemento sucesivas veces. El axioma y las reglas de sustitución actúan como los genes, conteniendo la información que determina el crecimiento de la curva, y permitiendo con muy pocos datos generar figuras de gran complejidad.

Dado que estas cadenas no tienen ningún significado geométrico, para convertirlas en figuras se necesita su interpretación geométrica. La cadena que se obtiene en cada etapa de sustituciones se representa gráficamente con la interpretación de sus elementos y la elección de la escala adecuada, dando lugar a etapas consecutivas de formación de la figura fractal.

El sistema-L del contorno del triángulo de Sierpinski tiene como axioma el símbolo F , y las tres reglas de sustitución son:

$$\left\{ \begin{array}{l} F \rightarrow F - F - F - ff \\ F \rightarrow ff \\ - \rightarrow - \end{array} \right.$$

En las dos primeras etapas se obtienen las secuencias:

$$F - - F - - F - - ff , \\ F - - F - - ff - - F - - F - - ff - - F - - F - - ff - - ffff$$

Y la interpretación geométrica no puede ser otra que:

- F : es un segmento recto hacia adelante,
- f : representa el mismo desplazamiento que F pero sin dejar huella,
- $-$: significa un giro de 60° en sentido antihorario.

En su representación gráfica deberá cuidarse que el tamaño del segmento se reduzca a la mitad en cada iteración. En caso contrario, al igual que las cadenas de símbolos, el tamaño del triángulo resulta cada vez mayor.

En esta línea de la investigación, la primera actividad que se propone es la utilización de este código, generando varias cadenas y representándolas gráficamente. Se hace uso de la trama (o la malla de puntos) triangular por ser el soporte idóneo para simplificar esta tarea. Lo fundamental de estos sistemas-L es comprender cómo las reglas de sustitución de caracteres ejercen sobre el axioma inicial el mismo efecto que las reglas geométricas previas para la generación del triángulo fractal.

A continuación se buscará la utilización de esta herramienta para la descripción de otros triángulos. Se les sugiere la tarea de adaptar las reglas de sustitución para obtener el triángulo trisección ($k=3$) y escribir sus primeras etapas. Aunque la complejidad impide que sea inmediata la generalización del procedimiento para cualquier valor de k , la posibilidad de hacerlo es perceptible.

Para aumentar la destreza en el manejo este lenguaje, se propone a los estudiantes una tarea inversa a la anterior: el desarrollo de los sistemas-L correspondientes a alguna de las curvas fractales más conocidas, como la curva de von Koch o copo de nieve, la curva de Hilbert, o la de Peano. Consiste en utilizar la representación gráfica de las primeras etapas de esta curvas, para reconocer las reglas de generación y codificarlas en este lenguaje simbólico. La actividad resulta muy creativa, y los estudiantes pronto se convierten en auténticos descifradores de algoritmos fractales y traductores al lenguaje simbólico a través de las reglas de sustitución.

Una actividad complementaria para conocer las posibilidades de estos sistemas consiste en el desarrollo y representación de

algunos fractales que reproducen estructuras vegetales de ramificación de manera sorprendentemente eficaz, con apariencia realista a pesar del determinismo del modelo. Son sistemas-L compuestos de muy pocos elementos y por lo tanto muy fáciles de desarrollar, con resultados muy interesantes (Barrallo–Calonge, 1993).

Los fractales de Pascal

Otra nueva dirección de la investigación sobre estos objetos consiste en un trabajo numérico en el triángulo de Pascal o de Tartaglia. Así, de una manera totalmente distinta, a partir de la búsqueda de regularidades en la aritmética de los números enteros, se obtienen las regularidades geométricas que dan lugar a la misma familia de triángulos, ahora llamados fractales de Pascal (Stewart, 1990). El único material de trabajo necesario son hojas con un triángulo enladrillado en cuyas celdas se colocan los números del triángulo de Pascal, y trama triangular en algunos casos.

El triángulo de Pascal no necesita presentación entre los estudiantes de bachillerato, aunque sí entre los de ESO, con los que se introduce como: una disposición triangular de números en filas cuyos extremos izquierdo y derecho son todos iguales a 1, y donde cada número es la suma de los dos inmediatamente superiores. Son números importantes en matemáticas, que también aparecen como coeficientes de x^n en la expansión de $(1+x)^m$.

La tarea inicial consiste en completar las primeras filas del triángulo, aplicando esta regla de composición tan simple. Los números del triángulo de Pascal crecen muy rápidamente, pero para esta experiencia sólo necesitamos conocer la clasificación de esos números en pares e impares. Inmediatamente rellenan con la regla mencionada otro triángulo atendiendo solamente al criterio de par (con una P) o impar (con una I) y colorean las primeras ocho filas pintando de negro los ladrillos con número impar, y de blanco los de número par. Se pueden añadir más filas al triángulo colocando P e I en lugares de pares e impares.

Con este triángulo se les pide que expresen la regla para el pintado de ladrillos ó celdas basándose en el color de los dos inmediatamente anteriores (se pintarán de negro aquellas posiciones de los extremos y las que tengan encima colores distintos, es decir los números impares, y se dejarán en blanco las posiciones con las dos que están encima del mismo color, los números pares).

En la búsqueda de similitudes en la figura para identificar el modelo geométrico, deberán observar las primeras cuatro filas del triángulo, y compararlas con el resultado de las ocho

y hasta de las dieciséis primeras filas. Rápidamente reconocen el parecido con las primeras etapas del triángulo de Sierpinski, comprobando que el número de filas para reproducir cada etapa del fractal crece con una sencilla regla geométrica. Conforme construyamos un triángulo de Pascal con un número cada vez más grande de filas, y lo sombreemos con la regla anterior, nos aproximaremos cada vez más al triángulo fractal. En la figura 3 se puede observar esa correspondencia en el sombreado de ambos triángulos.

Resulta más evidente esta relación al utilizar una trama triangular, considerando en ella sólo los triángulos con vértice hacia arriba, y colocando en ellos los números de Pascal. Si se recubren con un adhesivo de color aquellos con número impar, volverá a aparecer la estructura del triángulo de Sierpinski. Al aumentar el número de filas, el triángulo permanece con la misma apariencia, sólo que a una escala mayor, y por lo tanto, con un mayor detalle en su estructura, es decir, se van reproduciendo las sucesivas etapas del algoritmo que forma el triángulo fractal.

Obtenido el primer elemento de la familia de triángulos fractales, se amplía la experiencia reconociendo la clasificación de los enteros en pares e impares como una aplicación directa de la aritmética modular, la de módulo 2 (mod.2). En esta aritmética, fijado un número como módulo, se reemplazan los demás por sus restos en una división por el mismo. Utilizando esta regla sólo aparecen números menores que el módulo como resultados de sumas y multiplicaciones.

Para habitar a los estudiantes a la aritmética modular, resulta interesante practicar con ellos algunos cálculos numéricos con distintos módulos, y en particular que reconozcan el código binario (mod.2) los que han estudiado fundamentos informáticos, en el que todos los números pares son 0, y todos los impares son 1.

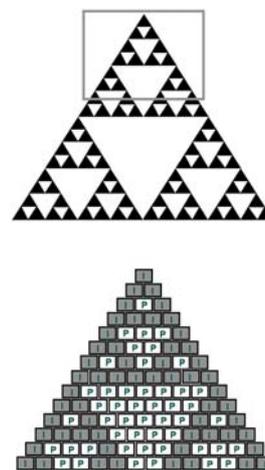


Figura 3. Cuarta etapa del tetraedro de Sierpinski (k=2) [arriba]. El marco selecciona el área cuya estructura coincide con las primeras catorce filas del triángulo de Pascal (mod.2) [abajo].

Aplicando ahora a las primeras nueve filas del triángulo de Pascal la aritmética mod.3, todos sus números deberán ser 0, 1 ó 2. Si orientamos a los estudiantes a sombrear las celdillas de negro si el número es 1 ó 2, y de blanco sólo cuando sea 0, reconocerán la primera etapa de la construcción de la trisección. Al continuar con la aritmética mod.3 y con esta regla de sombreado en las siguientes filas del triángulo, la figura reproduce el mismo modelo conteniendo los 36 pequeños triángulos de la segunda etapa de la trisección. Y así sucesivamente. La figura 4 muestra este resultado obtenido en clase, donde los estudiantes han colocado pegatinas sobre esas posiciones.

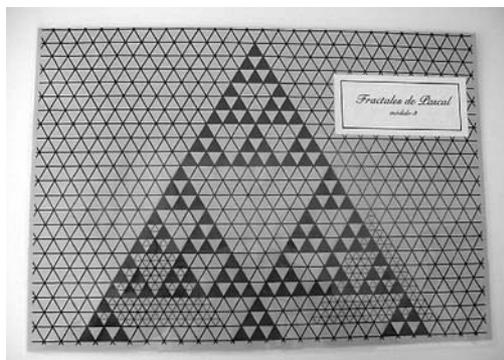


Figura 4. Las primeras veinte filas del triángulo de Pascal quedan de esta manera cuando se eliminan los múltiplos de tres (mod.3). La figura obtenida es la trisección.

Investigando triángulos numéricos formados con mod.4 o mod.5, se comprueba que con la utilización de estos módulos también aparecen los patrones de esta familia de triángulos, y aumentando el número de filas se confirma que los modelos geométricos continúan repitiéndose indefinidamente en filas sucesivas, generándose etapas más detalladas de la figura. Si estos modelos mantienen su estructura detallada en diferentes escalas, serán fractales.

Los estudiantes pronto concluyen que el módulo aritmético escogido coincide con el valor de k en la partición del triángulo por el método geométrico, y que las estructuras fractales aparecen sombreando todas las celdillas que no se correspondan con ceros para cada módulo (es decir, que no sean múltiplos exactos del módulo). La aparición de estos modelos que se repiten a distintas escalas es lo que asombraba a Robert en su séptima noche de aventuras con el diablo de los números en el libro de H.M. Enzensberger (1997).

Los resultados demuestran que no todos los módulos dan lugar a un patrón geométrico sencillo y autosimilar, aunque los estudiantes comprueban que todos los correspondientes a números primos presentan claramente esa regularidad. Esta característica puede interpretarse como una nueva diferencia añadida entre los números primos y compuestos, o al menos entre las aritméticas modulares que generan.

Tras estos resultados, puede dirigirse la investigación hacia la utilización de nuevas reglas para la obtención de otros diseños autosimilares. Aunque no se pretende llevar mucho más allá este trabajo, aún hay muchos modos de explorar nuevas relaciones. Por ejemplo buscando regularidad y autosemejanza al sombrear sólo las celdillas cuyo número sea 1 en mod. k , o mejor aún, al utilizar un conjunto de colores para los distintos números posibles, como pueden ser blanco, azul, verde, rojo y negro, para 0, 1, 2, 3 y 4, en mod.5. También surgirán otras estructuras autosemejantes si en la regla de formación del triángulo de Pascal, sustituimos la suma de los dos números de arriba por su diferencia o la transformamos en la suma del doble del número de la izquierda y el de la derecha, u otra regla algebraica sencilla. Las variaciones son innumerables y los estudiantes más atrevidos buscan nuevos caminos con excelentes resultados.

Otro análisis en este estudio consiste en conocer las proporciones de números pares e impares en el triángulo de Pascal. En esta ocasión se propone una combinación de argumentos probabilísticos y geométricos para resolverlo.

Si entre los números enteros, los pares e impares aparecen con igual frecuencia, la probabilidad de que un número elegido al azar sea par o impar es $\frac{1}{2}$, y se podría esperar que ocurriera igual entre los enteros que forman el triángulo de Pascal. Nuestros estudiantes están convencidos de ello, pero con el triángulo de Sierpinski se demuestra que no es así.

Definimos las probabilidades de obtener un número par o impar en el triángulo de Pascal como las proporciones de área de color blanco o negro en la figura obtenida en mod.2. Pero ya se ha probado que en triángulos con un número creciente de filas, la figura representa una etapa cada vez más avanzada de generación del fractal, por lo que las proporciones entre sus áreas blanca y negra convergerán a las proporciones correspondientes en el triángulo de Sierpinski. De esta manera se corresponden las probabilidades de par e impar en el triángulo con las proporciones de área blanca o negra en la figura límite fractal.

Para obtener esas proporciones en un triángulo cada vez mayor, los estudiantes tienen que contar las celdillas de cada color en las primeras 4, 8, 16, 32, ... filas del triángulo de Pascal, pero su recuento precisa de alguna estrategia pues su número crece rápidamente, recomendándose que aprovechen la autosimilaridad que presenta el triángulo.

Pero con la correspondencia anterior resulta más fácil calcular las áreas sombreadas utilizando la regla de formación del triángulo de Sierpinski. En la primera etapa sólo se coloca un triángulo blanco boca abajo de superficie $\frac{1}{4}$ del total. En la segunda etapa, con un triángulo blanco boca abajo dentro de cada uno negro, la superficie negra se ha limitado en cada uno a tres triángulos negros más pequeños de superficie $\frac{1}{16}$ del

total. Así, calculando la evolución de las proporciones, se deduce el factor constante para pasar de una etapa a la siguiente. Los estudiantes generalizan para obtener las proporciones de cada color en la etapa n ésima, proponiendo las expresiones de las áreas blanca y negra, y estudiar su comportamiento conforme el número n de etapas crece.

La figura 5 representa las fracciones del área total sombreada en los triángulos de Pascal y de Sierpinski conforme crece el número de filas, y en etapas sucesivas respectivamente. Además de adquirir la misma apariencia, ambas áreas relativas convergen, y se demuestra así que la parte negra de Sierpinski se corresponde con los números pares en Pascal. La variable independiente de la gráfica se justifica en el alto número de filas de Pascal necesarias para reproducir cada etapa, pues la apariencia de la etapa n del triángulo geométrico coincide con la de las $2^n + 1$ filas del numérico. Para la realización de este ejercicio los estudiantes utilizan progresiones aritméticas en el triángulo de Pascal y geométricas en el de Sierpinski.

Sólo falta extrapolar los resultados anteriores, conforme n aumenta sin límite para obtener la figura fractal, para responder a las preguntas: ¿qué ocurre con el área negra en el triángulo?, y por lo tanto ¿hay más números pares ó impares en el triángulo de Pascal? Cuando n crece, la superficie negra del triángulo de Sierpinski tiende a área nula, y la blanca tiende a recubrir la figura completa, lo que trasladado al triángulo de los números significa que en un triángulo muy grande casi todos los números son pares, y los impares aparecen con probabilidad cada vez menor, muy cercana a cero.

Tetraedros fractales

La segunda parte de este material de investigación escolar tiene como centro de interés el estudio de los tetraedros fractales, consecuencia de la ampliación a tres dimensiones de las figuras obtenidas anteriormente. Es el complemento adecuado del trabajo sobre los triángulos, aunque con la estructura y complejidad suficientes para tener entidad propia y proponer su realización independientemente. En la misma clase de matemáticas, se pueden formar equipos de estudiantes dedicados a cada una de las dos investigaciones por separado, pudiendo establecerse numerosas conexiones y paralelismos entre ellas.

Este trabajo se dirige a la familia de los tetraedros fractales, y aunque los algoritmos lineales suelen describirse como procedimientos de descomposición y de eliminación de partes de una figura, para su introducción en el aula es conveniente comenzar en sentido opuesto, es decir, componiendo figuras, tetraedros y octaedros de la misma arista.

Se inicia la tarea con actividades de confección manual y de observación espacial. Se utilizan fotocopias en cartulina del desarrollo plano de tetraedros y octaedros de la misma arista para que los estudiantes, doblando y pegando pestañas, construyan estos objetos geométricos. Gracias al número de alumnos por grupo se consigue la cantidad de figuras suficiente para comprobar, componiéndolas, cómo se llena un tetraedro de arista hasta cuatro veces mayor. La observación de estas construcciones ayuda a los estudiantes a analizar el proceso de descomposición del tetraedro, y a comprender los algoritmos fractales que se proponen.

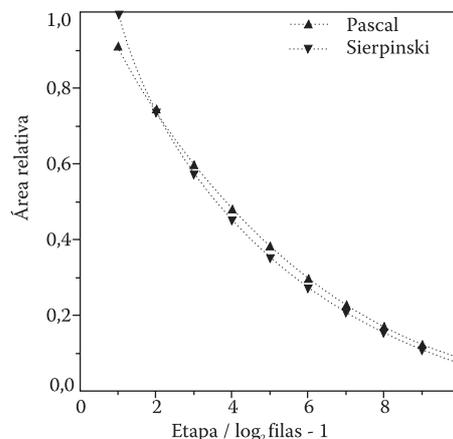


Figura 5. Área relativa del triángulo de Sierpinski ($k=2$) en etapas sucesivas, y proporción de números pares (mod.2) en el triángulo de Pascal respecto al número de filas.

El iniciador de estas figuras es siempre un tetraedro o pirámide triangular regular, y la estructura que nos permite diseñar generadores fractales se obtiene al cortarlo por planos paralelos a sus caras, que dividan sus aristas en un número determinado k de partes iguales. Como estas descomposiciones del tetraedro dan lugar a otros de menor tamaño, un subconjunto cualquiera de ellos constituye el generador de un fractal lineal. En este caso, se estudian sólo los algoritmos más sencillos, que seleccionan todos los tetraedros con la orientación del iniciador, formando una interesante familia.

El primer elemento y miembro más conocido de esta familia es el tetraedro de Sierpinski, el de $k=2$, cuyo algoritmo consiste en cortar el iniciador por planos paralelos a las caras que pasen por los puntos medios de las aristas, seleccionando los cuatro tetraedros de mitad de tamaño formados en los vértices y eliminando el resto del sólido, un octaedro de la misma arista. La segunda etapa de este fractal fue el motivo elegido para la edición de un sello conmemorativo de la celebración en Budapest del 2º Congreso Matemático Europeo en 1996, que se presenta en la figura 6.

Otro ejemplo de la popularidad de este fractal lo representa el espectacular tetraedro de papel de casi 6 metros de altura de

la figura 7 que construyeron estudiantes de secundaria norteamericanos, del Anoka High School (Anoka, Minnesota), como parte de una unidad de matemáticas dedicada a la geometría fractal, coincidiendo con una reunión anual de la Sociedad Nacional de Profesores de Matemáticas (Kelley, 1999).



Figura 6. La segunda etapa de formación del tetraedro de Sierpinski es el motivo de este sello húngaro conmemorativo de un congreso matemático europeo.



Figura 7. Estudiantes del Anoka High School montando un tetraedro de Sierpinski con motivo la reunión anual de la Sociedad Nacional de Profesores de Matemáticas estadounidense (NCTM's 75th Annual Meeting, 1997).

En las caras del tetraedro y en sus secciones, la partición presenta la estructura triangular de una malla, con triángulos de orientación igual y opuesta a esa cara. Es inmediato comprobar que los triángulos de igual orientación corresponden a caras de los pequeños tetraedros obtenidos, mientras que los orientados al revés pertenecen a los octaedros que también se han generado. Esta descomposición del iniciador produce un conjunto de tetraedros y octaedros todos con el mismo tamaño de la arista, la k -ésima parte de la inicial.

Se puede generalizar que cualquier sección paralela a una cara es un triángulo equilátero de lado $a/k, 2a/k, \dots a$, de lados divididos en 1, 2, 3, ... k partes iguales respectivamente. Comenzando por un vértice, la primera sección paralela a la cara opuesta es un triángulo (1) perteneciente al tetraedro de igual vértice. La segunda sección contiene tres triángulos (en dos filas, 1+2) en orientación de la cara, que corresponden a tres tetraedros y un triángulo invertido (1) perteneciente a un octaedro; la tercera sección contiene seis triángulos (en tres filas, 1+2+3) en orientación directa, y tres orientados al revés (en dos filas 1+2). Las secciones reproducen las descomposi-

ciones que se habían hecho del triángulo equilátero, y la progresión de ambas orientaciones crece con estas secuencias conforme aumenta el número de partes en la arista del tetraedro. En ellos, la alternancia de elementos hace que se mantenga esta correspondencia en la parte con forma tetraédrica, y sea la contraria en la parte troncal resultante. En esta descomposición del tetraedro es posible obtener un número natural $k-1$ de secciones internas paralelas cada cara.

El conjunto de tetraedros y octaedros descrito no llena totalmente el iniciador, y a partir de $k=3$ aparecen entre los octaedros otros huecos con forma de tetraedros como los anteriores pero en posición invertida, con lo que se añade una nueva secuencia de figuras en el interior.

Para estudiar la descomposición, se incorporó en el desarrollo plano de tetraedros y octaedros una malla triangular fotocopiada. Se adecuaron las escalas de la malla para que utilizaran pegatinas triangulares de color y eligieran aristas de tamaños 8 y 9, que les permitía reproducir algunas etapas de la generación los primeros elementos de la familia fractal ($k = 2$ y 3). Estos objetos de cartulina permiten estudiar las propiedades descritas. En la figura 8 se observa la composición con quince elementos de la tercera etapa del tetraedro trisección ($k=3$), y en la figura 9 se muestra su descomposición presentando el hueco mencionado.

Algunas de las actividades que orientaban el trabajo se dedican a los algoritmos de formación y a su resultado:

- Antes de recortar el desarrollo plano de tetraedros cuyas aristas midan 2^n celdillas, y doblar y pegar las pestañas de esos cuerpos geométricos, se les sugiere que sombreen sobre sus

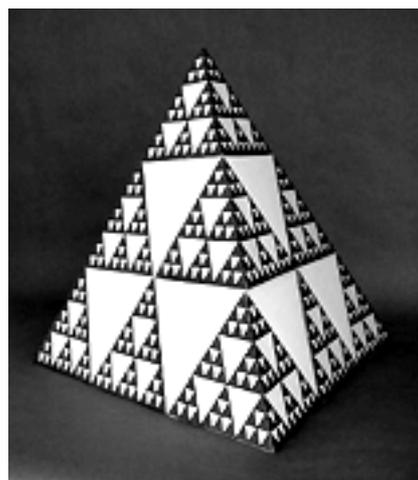


Figura 8. Modelo del tetraedro trisección ($k=3$) formado con once tetraedros y cuatro octaedros. Los triángulos de oscuros son las caras externas de los mil tetraedros de la tercera etapa de formación del fractal.

caras los triángulos que desaparecerán hasta la enésima etapa del triángulo de Sierpinski. Imaginando que sólo permanecen los tetraedros en blanco, se obtiene el fractal hasta esa etapa n de su formación. Otra opción consiste en recubrir con un adhesivo de color los triángulos que permanecerán en la figura. Si lo hacen con un color diferente en cada triángulo, resultan distintas las caras del tetraedro.

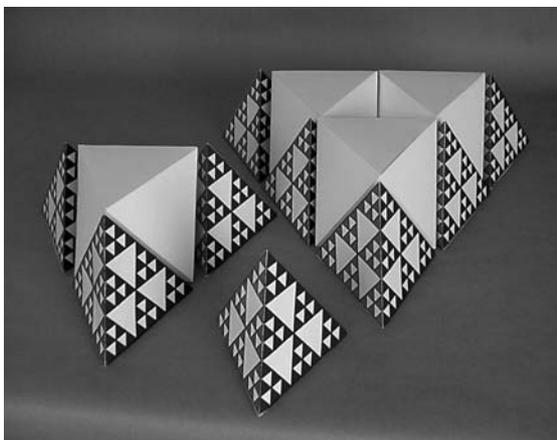


Figura 9. Secciones de un tetraedro trisección paralelas a la base y sus elementos: diez tetraedros en la etapa anterior y cuatro octaedros, cuya arista es la tercera parte de la de la figura completa. Entre los octaedros se observa el hueco de un tetraedro en posición invertida.

- Con el tetraedro de papel, considerando la primera etapa del fractal, o colocando adecuadamente cuatro de ellos, se pregunta a los estudiantes qué cuerpo geométrico constituye la parte eliminada en esa etapa, observando el número y forma de sus caras, el tamaño de sus aristas y el paralelismo entre caras. La figura 12 muestra esta composición de tetraedros y un octaedro central.

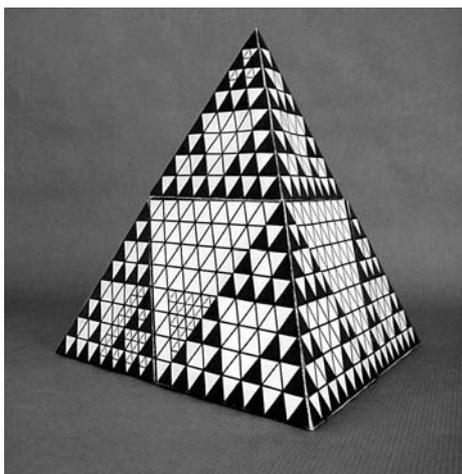


Figura 12. Modelo del tetraedro de Sierpinski (k=2) formado con cuatro tetraedros y un octaedro de cartulina. Los triángulos oscuros son las caras externas de los 44 tetraedros que constituyen la cuarta etapa de la formación del fractal.

- Una vez descrito el algoritmo de formación, se revisa su aplicación en sucesivas etapas, por ejemplo en cuanto al número de elementos que se generan, completando una tabla de valores, obteniendo el factor constante para pasar de una etapa a la siguiente y generalizando para expresar el número de tetraedros en la etapa n. Se describirá cómo va cambiando la figura cuando el proceso se repita indefinidamente.

De la observación y recuento se obtiene que, dependiendo del valor de k en el algoritmo, del tetraedro inicial de arista a surgen figuras de arista a/k cuyo número es:

Nº tetraedros	Nº octaedros	Nº tetraedros invertidos
$\frac{1}{2} \sum_1^k (k^2 + k)$	$\frac{1}{2} \sum_1^k (k^2 - k)$	$\frac{1}{2} \sum_1^k (k-1)(k-2)$

La figura 10 contiene el desarrollo plano del tetraedro que se ha utilizado en diferentes actividades escolares en todos los niveles educativos. Este material se presentó en la exposición La Geometría Fractal–IES Leonardo da Vinci, en la figura 11, organizada por la Sociedad de Educación Matemática de la Comunidad Valenciana Al-Khwarizmi en el marco del 2000 Año Mundial de las Matemáticas en Alicante.

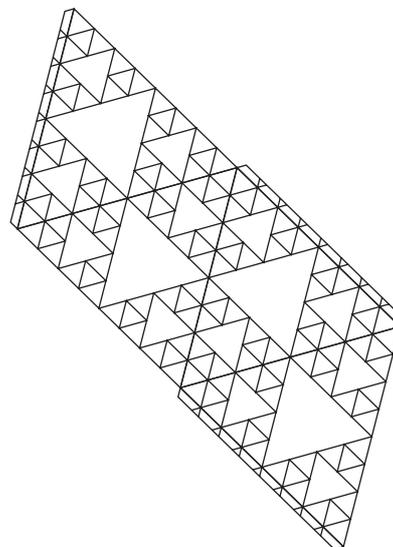


Figura 10. Hoja con el desarrollo plano del tetraedro que se entregaba a los alumnos de primaria para su construcción y estudio. Se adjuntaban pegatinas de color para colocar en las caras de la figura.

Otras cuestiones ayudan a los estudiantes a describir las características de los tetraedros:

- Se deduce la longitud de las aristas de los tetraedros que se generan en la primera etapa, en la segunda, en la tercera, ... y en la enésima etapa, así como su suma. También se hace recuento del número de caras, aristas y vértices que hay en los 16 (si k=2) ó 100 (si k=3) tetraedros resultantes en la segunda etapa del objeto, y se busca una expresión general para la enésima etapa.



Figura 11. La Geometría Fractal - IES Leonardo da Vinci, incluida en las Seis Exposiciones de Centros de Enseñanza del 2000 Año Mundial de las Matemáticas en Alicante (SEMCV Al-Khwarizmi).

- En otra actividad se estudia la evolución del área total y el volumen de las estructuras de tetraedros que se obtienen en etapas sucesivas. Como primer ejercicio los estudiantes buscarán en los libros y compararán las expresiones del área y del volumen del tetraedro y el octaedro regulares en función de la longitud de la arista. En esta comparación puede hacerse referencia también al cubo de igual arista.

$$Vol_{tetraedro} = a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}, \quad Vol_{octaedro} = a^3 \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Como las caras del tetraedro son triángulos equiláteros, les resulta inmediato obtener la superficie total de la figura en cada etapa. Comenzando con un tetraedro de arista a obtienen el área total de la figura en la segunda etapa, en la tercera, y en la cuarta. Y generalizan para obtener el área total en la n -ésima etapa de la pirámide fractal.

También calculan el volumen eliminado para obtener la primera etapa comparándolo con el volumen de los tetraedros que permanecen. Y conocidos el número y las aristas de los octaedros y tetraedros que se eliminarán en cada etapa, se pueden obtener los volúmenes eliminados (o alternativamente los volúmenes que permanecen de la figura) en las primeras etapas para compararlos entre sí.

Iteración	Número de elementos	Número de aristas	Long. arista	Área	Octaedros eliminados	Volumen eliminado	Fracción de volumen eliminado acumulado	Porcentaje acumulado
0	1	6	a	$\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$	0	0	0	0
1	10	$6 \cdot 10$	$a/3$	$\frac{10 a^2 \sqrt{3}}{3^2 \cdot 4}$	4	$\frac{1}{3^4} 4 \sqrt{2} a^3$	$\frac{8}{13}$	61.5
2	10^2	$6 \cdot 10^2$	$a/9$	$\frac{10^2 a^2 \sqrt{3}}{3^5 \cdot 4}$	$4 \cdot 10$	$\frac{10}{3^7} 4 \sqrt{2} a^3$	$\frac{8}{13} \cdot \left(1 + \frac{5}{13}\right)$	85.2
3	10^3	$6 \cdot 10^3$	$a/27$	$\frac{10^3 a^2 \sqrt{3}}{3^8 \cdot 4}$	$4 \cdot 10^2$	$\frac{10^2}{3^{10}} 4 \sqrt{2} a^3$	$\frac{8}{13} \cdot \left[1 + \frac{5}{13} + \left(\frac{5}{13}\right)^2\right]$	94.3
4	10^4	$6 \cdot 10^4$	$a/81$	$\frac{10^4 a^2 \sqrt{3}}{3^{11} \cdot 4}$	$4 \cdot 10^3$	$\frac{10^3}{3^{13}} 4 \sqrt{2} a^3$	$\frac{8}{13} \cdot \left[1 + \frac{5}{13} + \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^3\right]$	97.8
n	10^n	$6 \cdot 10^n$	$a/3^n$	$\left(\frac{10}{9}\right)^n \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$	$4 \cdot 10^{n-1}$	$\frac{10^{n-1}}{3^{3n+1}} 4 \sqrt{2} a^3$	$\frac{8}{13} \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{5}{13}\right)^{i-1} = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^n$	$\frac{13^n - 5^n}{13^n} \cdot 100$

Tabla 1

Tabla 1. Expresiones algebraicas de las principales características estudiadas en etapas sucesivas del triángulo trisección o de $k=3$.

Como n aumenta sin límite para alcanzar la forma fractal, se revisa la evolución y el volumen final de la figura. Estos volúmenes eliminados forman una serie numérica de razón menor que uno, con lo que la fracción total eliminada es la unidad, y los tetraedros fractales son objetos con volumen final nulo.

Los principales resultados de las características del tetraedro de Sierpinski son muy conocidos (Moreno-Marín, 2002), por lo que en la tabla 1 se presentan los correspondientes a la trisección ($k=3$). Generalizar estos resultados a cualquier valor de k en el tetraedro no es siempre fácil, y las expresiones algebraicas de las mismas que se presentan en la tabla 2, cuando no sean deducidas, pueden utilizarse como punto de partida para su comprobación y análisis.

La medida y la dimensión fractal

Complementariamente a las actividades anteriores, otra orientación del trabajo se dirige a estudiar la medida y la dimensión fractal en estas dos familias de fractales, con algoritmos de patrón común.

De manera muy sencilla se propone abordar con los estudiantes de bachillerato los conceptos de medida y de dimensión de Hausdorff-Besicovitch. Introduciremos la medida en geometría como la manera adecuada de cuantificar el tamaño de un objeto.

Para los objetos euclídeos, la medida de aquellos de dimensión cero, como los puntos, es su cardinal; la medida de los de dimensión uno, como las líneas, es su longitud; la de los de dimensión dos, como las superficies, es su área; y la medida de los objetos tridimensionales, como los cuerpos sólidos, es su volumen. En general, en cualquier objeto la medida de dimensión menor a la suya tiene valor infinito y es cero la medida de dimensión mayor a la propia.

Como los objetos fractales tienen dimensión fraccionaria, sus medidas euclídeas suelen ser infinito ó cero. Y esto es lo que ocurre con la longitud total de las aristas y el área total en los triángulos, y también lo que sucede con el área total y el volumen de los tetraedros. Tanto los triángulos como los tetraedros fractales tienen reglas de generación

por eliminación, con lo que su aplicación sucesiva nos llevará siempre a una medida euclídea final –área ó volumen respectivamente– nula.

Características del tetraedro fractal (k,n)	
Número de elementos	$\left(\frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6}\right)^n$
Número de aristas	$\frac{(k^3 + 3k^2 + 2k)^n}{6^{n-1}}$
Longitud de la arista	$\frac{a}{k^n}$
Área total	$\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{k^n}\right)^2$
Número de octaedros eliminados en la etapa n	$\left(\frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{k^3 - k}{6}\right)$
Fracción de volumen eliminado en cada etapa	$\frac{4k^3 - 4k}{5k^3 + 3k^2 - 2k}$

Tabla 2. Características generales de los tetraedros fractales en función de los parámetros k y n.

Para cuantificar la medida de nuestras figuras (caracterizadas por los parámetros n y k, propios de la etapa y de cada miembro de la familia fractal), se propone a los estudiantes calcular la fracción sobre su valor inicial, dado su carácter factorial para etapas sucesivas, razonando sus resultados.

En los triángulos, la fracción de área f_1 en la primera etapa depende del parámetro k y se expresa

$$f_1(k) = \frac{k+1}{2k}$$

y por lo tanto, a través de las sucesivas etapas, la medida –en este caso el área– queda expresada por

$$f_n(k) = (f_1(k))^n = \left(\frac{k+1}{2k}\right)^n$$

Estas fracciones son menores que la unidad, por lo que su límite tiende a cero,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k) = 0$$

decreciendo asintóticamente hacia $\frac{1}{2}$ conforme aumenta el valor de k. Esto significa que reglas más complejas de división del triángulo dan lugar a estructuras geométricas con menor área, más vacías. Lo cual se puede corroborar revisando la función derivada $f'_n(k)$ y obteniendo el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(k)$$

En los tetraedros, la fracción de medida $g(k)$ que permanece en la primera etapa es

$$g_1(k) = \frac{1}{6} \left(\frac{k^2 + 3k + 2}{k^2}\right)$$

y de igual manera, el volumen de la enésima etapa queda

expresado como $g_n(k) = (g_1(k))^n$. También en este caso el volumen tiende a desaparecer en etapas sucesivas,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(k) = 0$$

mientras que esta fracción decrece asintóticamente hacia $1/6$ al aumentar el valor de k.

La representación gráfica de ambos resultados se presenta en la figura 13, permitiendo la discusión de los mismos y una interpretación común, comprobándose que valores mayores de k o reglas más complejas dan lugar a estructuras geométricas más vacías, con menor área o volumen.

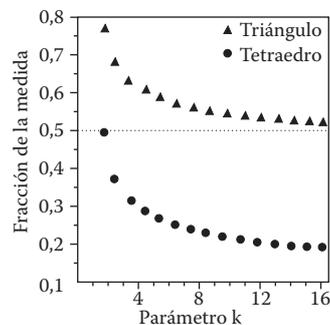


Figura 13. Evolución de la fracción constante de medida (área/volumen) en los triángulos y tetraedros fractales según el parámetro k.

Estos resultados confirman, como ya era conocido, que los triángulos son figuras bidimensionales de área final cero, y los tetraedros son tridimensionales de volumen final nulo, por lo que se hace necesaria otra caracterización diferente a su medida euclídea.

Aprovechando que este estudio se limita a fractales lineales exactamente autosimilares, proponemos a los estudiantes uno de los conceptos de dimensión fractal más sencillos, el de dimensión de autosimilaridad, como una forma de medir la irregularidad de estos objetos y al mismo tiempo, alternativamente a su dimensión euclídea, cuantificar cómo ocupan el espacio.

El cálculo de la dimensión fractal de estas figuras es inmediato al tratarse de fractales matemáticos autosimilares. Para cada una de ellas, siendo k el factor de escala entre los elementos de la figura en etapas consecutivas, y s el número de elementos en los que se descompone el de una etapa hacia la siguiente, se define su dimensión de autosimilaridad como $d = \log s / \log k$.

El primer trabajo con esta definición de dimensión fractal es calcular y justificar las dimensiones del triángulo y el tetraedro de Sierpinski: En el primero, el factor de escala k entre los lados de un triángulo en etapas sucesivas es 2, mientras que el número de partes generadas en cada iteración que podrán representar el conjunto completo es 3. Así, resulta $d = \log 3 / \log 2 = 1,585$. En

el segundo, el factor de escala k entre las aristas de un tetraedro es 2, mientras que el número de partes s es 4 (de cada tetraedro se obtienen cuatro). Por lo tanto, resulta $d = \log 4 / \log 2 = 2$, con lo que el tetraedro fractal de Sierpinski tiene la misma dimensión que una superficie euclídea (resultado que conecta con el hecho de que su área total permanece constante en diferentes etapas).

Una actividad con mayor dificultad es la generalización de estos resultados para cualquier otro elemento de las familias fractales respectivas. En ambos casos el parámetro k es el factor de escala y de manera sencilla, mediante series numéricas elementales, se obtiene la expresión del número de elementos s en función de k . En la tabla 3 se muestran los primeros valores de dimensión y su expresión general para ambos grupos de fractales.

	Triángulos	Tetraedros
k	Dimensión d	
2	1.585	2.000
3	1.631	2.096
4	1.661	2.161
5	1.683	2.209
...
k	$d = \frac{\log\left(\frac{k^2 + k}{2}\right)}{\log k}$	$d = \frac{\log\left(\frac{k^3 + 3k^2 + 2k}{6}\right)}{\log k}$

Tabla 3. Primeros valores y expresión general de la dimensión fractal según el parámetro k para ambos grupos de objetos.

La figura 14 reproduce estos resultados como una herramienta más que ayuda a su interpretación. Se comprueba así que la dimensión fractal de estos objetos crece asintóticamente al aumentar el grado de división del iniciador, convergiendo hacia sus dimensiones euclídeas. Las dimensiones de los triángulos fractales tienden a 2, mientras que los tetraedros adoptan dimensiones crecientes convergentes a 3. Aparentemente paradójico, aunque totalmente coherente, disminuye el valor de la medida euclídea –área y volumen respectivamente– al aumentar el valor de k , pero no ocurre igual con la dimensión fractal, sino lo contrario. Estamos comparando, en resumen,

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRALLO CALONGE, J. (1993): *Geometría fractal, Algorítmica y representación*, Ed. Anaya multimedia, Madrid.
 ENZENSBERGER, H. M. (1997): *El Diablo de los números*, Ed. Siruela, Madrid.
 FIGUEIRAS, L., M. MOLERO, A. SALVADOR y N. ZUASTI (2000): "Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales", *SUMA*, nº 35, 45-54.
 GUZMÁN OZAMIZ, M. (2002): *La experiencia de descubrir en Geometría*, Ed. Nivola, Madrid.
 KELLEY, P. (1999): "Build a Sierpinski Pyramid", *Mathematics*

pocos elementos de tamaño mayor con más elementos aunque de menor tamaño. Estos últimos adquieren mayor dimensión, ocupan más el espacio. La discusión planteada en clase con la interpretación de estos resultados resulta muy interesante y enriquecedora.

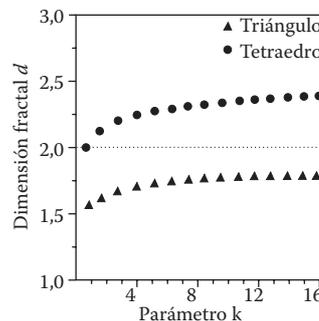


Figura 14. Dimensión fractal de los triángulos y tetraedros fractales según el parámetro k .

Conclusión

Se presentan en este artículo las interesantes cualidades de estos fractales para plantear con ellos un trabajo de investigación en las matemáticas de secundaria. A pesar de lo variado de los aspectos planteados, sin duda no quedan agotadas todas las posibilidades formativas de esta actividad, en la que se atienden los objetivos de la asignatura en esta etapa mediante un trabajo realmente interdisciplinar –entre las diferentes disciplinas que configuran las matemáticas–.

El desarrollo de este tipo de actividades es una de las mejores acciones formativas, pues la diversidad de tareas propuestas y la graduación de su dificultad en los diferentes ámbitos garantizan la obtención de buenos resultados a todos los estudiantes que se interesen por ellas, independientemente de sus capacidades, atendiendo de esta manera a las expectativas de éxito que todo estudiante tiene al comenzar una investigación. Estos resultados son necesarios en el aula para seguir contando con el interés de los estudiantes hacia nuestra asignatura, por lo que acudir a trabajos como este contribuirá a deshacer el tópico social, a veces totalmente falso, de rechazo a las matemáticas. ■

Teacher, nº 92, 5.

MORENO-MARÍN, J.C. (2002): "Experiencia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales", *SUMA*, nº40, 91-104.
 PEITGEN, H.O., H. JÜRGENS y D. SAUPE (1992): *Fractals for the classroom*, Springer-Verlag, Nueva York.
 QUERALT LLOPIS, T. (1997): "Fractales en la ESO", *SUMA*, nº 24, 81-88.
 STEWART, I. (1990): *Ingeniosos encuentros entre juegos y matemática*, Ed. Gedisa, Barcelona.
 STEWART, I. (2001): *El laberinto mágico*, Crítica, Barcelona.