SUMA 41
noviembre 2002, pp. 69-79

El juego del caos en la calculadora gráfica: construcción de fractales

Juan C. Moreno-Marín

IDEAS Y RECURSOS

Este artículo aporta un modelo de actividad matemática en el contexto constructivista. Se proponen unos ejercicios atractivos sobre la generación de fractales lineales con el juego del caos. Se ha elegido este tema por su utilidad en la didáctica de la geometría en la ESO, favoreciendo un aprendizaje efectivo de las transformaciones de similaridad.
El juego del caos produce una secuencia aleatoria de puntos que eventualmente condensan en el atractor de un fractal lineal. A partir del listado del juego que genera el triángulo de Sierpinski, se puede modificar la descripción analítica de las transformaciones y obtener el atractor de numerosos fractales, como resultado del juego, en la pantalla de la calculadora. Esto no sólo es divertido, sino que es una forma interesante de estudiar las transformaciones lineales en el plano, uno de los objetivos de las matemáticas en secundaria.

LA IDEA de fractal, concebida por B. B. Mandelbrot (1977), es el punto de partida para el desarrollo de toda la geometría fractal en el último cuarto del siglo XX, y representa un concepto revolucionario que ha permitido importantes progresos en el estudio de objetos y fenómenos irregulares. Sus aplicaciones en el aula, para la enseñanza de la geometría, son muy interesantes (Fernández y Pacheco, 1991), permitiendo la exploración e investigación con reglas y estructuras matemáticas muy sencillas pero con resultados de complejidad y belleza extraordinarias.

Con la introducción de los fractales como objeto de estudio, se puede trabajar de acuerdo con numerosos objetivos de la competencia matemática propios de la secundaria. Se manejan conceptos habituales de los currículos matemáticos como la iteración, las transformaciones geométricas lineales y las no-lineales, la semejanza y la homotecia, la convergencia y el límite, o el determinismo y el azar, permitiendo mostrar interesantes interconexiones entre diferentes ideas matemáticas.

En este artículo, se presenta una propuesta didáctica distinta al trabajo tradicional en geometría durante la etapa secundaria. Se refiere a actividades de tipo investigativo, sugeridas en las *pequeñas investigaciones* de las orientaciones didácticas oficiales. Plantea una recreación sobre *el juego del caos,* compuesta por la experimentación y estudio de diferentes transformaciones geométricas lineales. Esta actividad incide en algunas de las líneas de investigación en la didáctica de las matemáticas que, desde hace tiempo, se consideran como prioritarias en el contexto de la enseñanza secundaria, como geometría, creatividad, diseño de materiales para la enseñanza y algoritmos (Caballer, Carrascosa y Puig, 1986). Para seleccionar el tema de la actividad y la metodología, se han utilizado criterios de innovación, interés y actualización.

Objetivos y metodología

Este trabajo consiste en el diseño y elaboración de una actividad que permita al alumno ampliar sus conocimientos sobre las transformaciones lineales, desarrollando destrezas y aplicando recursos personales en la resolución de los ejercicios. De esta manera, se proporciona a los profesores un ejemplo de ejercicios para fomentar una enseñanza de la geometría más creativa, favoreciendo el desarrollo de la enseñanza de las matemáticas y la investigación en el aula.

La programación del currículo oficial de matemáticas para la ESO supone considerar diferentes contenidos referidos a conceptos, procedimientos y actitudes, y un amplio rango de metodologías, enmarcadas dentro del enfoque constructivista sobre el aprendizaje y el cambio conceptual.

Los contenidos de geometría en esta etapa, centrados claramente en la geometría analítica, podrían basarse en una didáctica de la geometría fundamentada en los grupos de transformaciones, que, partiendo de juegos y ejercicios con transformaciones topológicas, afines y proyectivas, continúe con la construcción geométrica de modo natural de esos contenidos (Dienes y Golding, 1972). En este contexto, el objetivo específico de estas actividades instructivas es que los estudiantes puedan adquirir un dominio suficiente de las transformaciones geométricas lineales, de forma que las puedan utilizar y modificar a medida que se enfrentan con nuevos ejercicios.

Para este fin se ha propuesto la generación de fractales lineales con el juego del caos. Su elección se debe a que, partiendo de este tema considerado como centro de interés, se pueden desarrollar de una manera distinta diversos aspectos de la geometría y la probabilidad, que forman parte de la programación de matemáticas en ESO (Sánchez, 1997). Estas actividades entroncan contenidos de la etapa de las operaciones concretas, con los de la geometría analítica en la etapa de las relaciones formales, propios de la secundaria.

Distinguir elementos de figuras planas, hallar relaciones de simetría, incidencia o perpendicularidad; reconocer figuras congruentes, semejantes o equivalentes según un criterio dado; o definir conceptos y enunciar propiedades geométricas, son algunos de los objetivos, referentes a los conceptos, del estudio de la geometría durante la etapa 12-16 años (Alsina, Burgués y Fortuny, 1987), en los que incide esta actividad.

Realizar observaciones sistemáticas, clasificarlas, y expresarlas en diferentes lenguajes; usar las transformaciones geométricas, isometrías y semejanzas; resolver problemas por el método analítico y el método gráfico; o interpretar representaciones y deducir relaciones geométricas de las mismas, son algunos de los objetivos procedimentales.

Mientras que, valorar positivamente las actividades destinadas a resolver cuestiones o descubrir hechos; valorar el uso correcto del vocabulario estudiado; y reconocer la necesidad de utilizar todas las técnicas e instrumentos de cálculo y representación gráfica a su alcance para abordar situaciones problemáticas, son objetivos actitudinales que se persiguen con el trabajo propuesto.

Las posibilidades de los estudiantes de manejar mentalmente las transformaciones geométricas y sus propiedades, son prácticamente ilimitadas, igual que los grados de dificultad con los que pueden plantearse problemas y actividades.

El planteamiento de situaciones problemáticas concretas, puede establecer las conexiones entre los conceptos, los procedimientos y las actitudes que destacarían la funcionalidad de los conocimientos, fomentando las interacciones entre las matemáticas y el alumno dentro del contexto social y de desarrollo tecnológico en el que se desenvuelve.

Las actividades que se presentan pretenden la utilización del juego del caos para modificarlo y adaptarlo a diferentes transformaciones geométricas. Las posibilidades de los estudiantes de manejar mentalmente las transformaciones geométricas y sus propiedades, son prácticamente ilimitadas, igual que los grados de dificultad con los que pueden plantearse problemas y actividades (Núñez, 1985). El principal objetivo no debe ser únicamente la resolución de estos ejercicios, sino capacitar al estudiante para la utilización del juego hacia el estudio de nuevas situaciones, relacionarlas entre sí e interpretarlas como parte de un todo más amplio. De esta manera se convierte en una actividad matemática creativa, permitiendo producir resultados nuevos a partir de variaciones de los conocidos y sintetizar los diferentes aspectos del conocimiento matemático desarrollado para configurar una cierta visión global del mismo.

Una de las implicaciones didácticas que se persiguen con esta experiencia es el fomento en los estudiantes de la utilización, durante el proceso de resolución de estos ejercicios, de todos sus conocimientos y procedimientos involucrados en cada caso. Estos aspectos cognitivos constituyen, según Callejo (1994), el conjunto de conocimientos que están disponibles en la memoria del sujeto para ser utilizados: hechos, definiciones, algoritmos…, cuya integración no se consigue mediante la transmisión de conceptos y posterior resolución reiterativa de ejercicios de aplicación, sino realizando actividades de enseñanza-aprendizaje relacionadas con contextos concretos, que muestren a los estudiantes la necesidad de asimilar los conceptos matemáticos que intervienen.

En resumen, con esta metodología se plantea la necesidad de que tanto el profesor como el estudiante adopten un papel coherente con el enfoque constructivista, encaminando las actividades a conseguir que los estudiantes utilicen todos sus conocimientos sobre el tema, contrasten sus propuestas y resultados con sus compañeros, y apliquen estos resultados a otras situaciones. La manera de construir los aprendizajes, consiste en realizar los ejercicios propuestos, dando respuesta a las actividades planteadas, aprendiendo a trabajar de forma autónoma, siendo capaz de tomar iniciativas y de acoplarse al trabajo del resto del grupo.

Otra cuestión a tener en cuenta es que la resolución de ejercicios puede contemplarse como una actividad de apoyo y consolidación para el aprendizaje de los contenidos conceptuales. Como afirman Boch y Gascón (1994), este tipo de propuestas se tienden a considerar peyorativamente, como trabajo considerado como meramente mecánico y repetitivo, sólo porque pueda parecer rutinario y no creativo. Lo que se propone es aparentemente un tipo de trabajo matemático insignificante y humilde, aunque necesario para el desarrollo creativo de la actividad matemática en general y del proceso didáctico en particular.

También se pretende el objetivo de superar la dificultad que tienen los estudiantes para diferenciar los aspectos deterministas de lo aleatorio, revisando las nociones fundamentales sobre el conocimiento probabilístico y, entre ellas, sobre la aleatoriedad. La capacidad de reconocimiento y tratamiento de los sucesos aleatorios depende del nivel de reconocimiento de la incertidumbre, de la comprensión de la noción de azar, fundamental a la hora del tratamiento de la probabilidad en el aula y en nuestro juego. Desde la educación primaria, se recogen en el currículo de matemáticas los conceptos fundamentales del conocimiento probabilístico: reconocimiento de los fenómenos y sucesos aleatorios, y cuantificación de la probabilidad de sucesos sencillos.

…con esta metodología se plantea la necesidad de que tanto el profesor como el estudiante adopten un papel coherente con el enfoque constructivista, encaminando las actividades a conseguir que los estudiantes utilicen todos sus conocimientos sobre el tema, contrasten sus propuestas y resultados con sus compañeros, y apliquen estos resultados a otras situaciones.

Conforme se llevan a cabo las actividades en la práctica, se pone en marcha la fase de evaluación del proceso educativo. La evaluación en geometría nos debe indicar qué comportamientos de percepción espacial, y de comprensión de conceptos y relaciones geométricas han sido adquiridos (Alsina, Burgués y Fortuny, 1987).

Para conocer el proceso de aprendizaje, se propone una técnica de evaluación compuesta básicamente por dos fases. Una fase basada en la observación directa de la realización de los distintos ejercicios y exploraciones. Esta observación se puede realizar de forma subjetiva *in situ*, en el momento de la realización de las actividades, y de forma más objetiva controlando y revisando los registros escritos en el cuaderno de matemáticas.

La otra fase de evaluación es la de observación indirecta, quizá la más productiva, en la que se analiza la respuesta gráfica en la calculadora y escrita en el listado de los programas que el estudiante da al aplicar los conceptos utilizados en cada nueva situación. La observación indirecta nos permitirá evaluar si el aprendizaje ha sido significativo. En esta fase, las preguntas que se planteen no sólo son importantes para la evaluación, sino para todo el proceso educativo.

La representación gráfica es un lenguaje muy importante para construir y expresar los conocimientos geométricos. Cada vez hay más herramientas inteligentes disponibles para la generación y representación gráfica de fractales, tales como calculadoras gráficas, hojas de cálculo o programas gráficos. Además de la capacitación para generalizar el uso de las herramientas, un problema clave del aprendizaje es que los estudiantes sean más capaces de discernir e identificar las situaciones en las cuales una herramienta resulta aplicable. Mediante el juego del caos se ha convertido el estudio de las transformaciones lineales a una forma que facilita el uso de una de esas herramientas.

La integración de la calculadora gráfica como soporte para el trabajo didáctico en clase, y utilizada como canal transmisor de contenidos matemáticos, proporciona a los estudiantes el entorno adecuado para esta actividad de investigación geométrica. Al optar por la calculadora, se fomentan actividades exploratorias con las que pueden contrastar rápidamente sus intuiciones. El trabajo individual, que favorece el manejo de esta herramienta, se equilibra con la cooperación entre ellos, necesaria para el aprendizaje de su uso y para resolver todos los errores que la edición y modificación de los programas conlleva.

La calculadora tiene la desventaja de la pobre resolución gráfica de su pantalla, fundamental para representar los resultados geométricos del juego, que con seguridad mejorará rápidamente en futuros modelos. A cambio, su capacidad de cálculo y de programación son suficientes para este propósito y, sobre todo, se ha convertido en la herramienta de cálculo más accesible. Muy por delante de los ordenadores, en la actualidad las calculadoras gráficas están disponibles en las aulas de secundaria, bien aportadas por los centros de enseñanza, o personalmente por los estudiantes.

Los fractales lineales

Los elementos de la geometría fractal se describen mediante reglas de cálculo y algoritmos que, con la ayuda de una herramienta de cálculo y representación como la calculadora gráfica, se convierten en formas y estructuras. Los fractales, que aparentan tener una gran complejidad, poseen una misma regularidad geométrica, la autosimilaridad o invarianza bajo escala. Si se analizan estas estructuras a distintas escalas, se encuentran una y otra vez los mismos elementos básicos. Su interrelación a distintas escalas, se describe matemáticamente con el concepto de dimensión fractal (Jürgens, Peitgen y Saupe, 1990).

Los fractales lineales forman un grupo fundamental de esta geometría. Cada fractal lineal queda totalmente definido por un conjunto de transformaciones lineales afines en el plano. Para constituir un algoritmo fractal lineal deben ser además transformaciones contractivas, es decir, que la distancia entre dos puntos cualesquiera disminuya cuando se aplica la transformación. En todas las transformaciones lineales afines, las rectas paralelas se transforman en rectas paralelas, así como los puntos medios en puntos medios, y las razones entre distancias a lo largo de las mismas rectas, o a lo largo de paralelas, se transforman en las mismas razones (Dienes y Golding, 1972).

El fractal es la figura límite resultante de una sucesión infinita de repeticiones de las transformaciones sobre una figura original. El comportamiento límite garantiza que, con independencia de la figura original, cada algoritmo fractal da lugar a una figura límite, y sólo una.

Los fractales lineales son estrictamente similares a sí mismos, es decir, un pequeño fragmento cualquiera de ellos contiene una figura que, con la ampliación adecuada, es idéntica al objeto completo. La singularidad de un fractal lineal, como objeto geométrico autosimilar, es fácilmente reconocida por los estudiantes si se revisan algunos ejemplos.

Esta experiencia, que permite desarrollar parte de los contenidos de la geometría analítica del plano en las matemáticas de la etapa secundaria obligatoria, se orienta hacia las transformaciones de similaridad, que son composiciones de escalado o contracción, traslación y rotación, a las que se les puede añadir la reflexión. Además de éstas, también puede haber transformaciones con diferentes factores de reducción en distintas direcciones. Una transformación de similaridad conserva los ángulos, mientras que contracciones más generales, no.

El objeto de esta actividad didáctica, consiste en la descripción y formulación analítica de transformaciones geométricas sencillas en el plano para obtener imágenes fractales. Se utiliza la calculadora gráfica programable como soporte para el cálculo y la representación gráfica de una larga sucesión de transformaciones. Además, la aplicación de un procedimiento aleatorio para obtener fractales lineales, puede parecer una paradoja que deberá ser analizada.

El algoritmo conocido como juego del caos es un método muy sencillo y eficaz para la generación de figuras fractales, consistente en realizar una sucesión de transformaciones sobre un solo punto.

El juego del caos

El algoritmo conocido como *juego del caos* es un método muy sencillo y eficaz para la generación de figuras fractales, consistente en realizar una sucesión de transformaciones sobre un solo punto. Comenzando con un punto cualquiera en el plano, se le aplica una de las transformaciones que definen el fractal, elegida aleatoriamente, y se obtiene un nuevo punto. Se le vuelve a aplicar otra transformación elegida al azar al nuevo punto, y así sucesivamente, obteniéndose un conjunto de puntos como consecuencia de la sucesión aleatoria de transformaciones. El conjunto así construido llena densamente la figura límite sin depender de la sucesión concreta de transformaciones elegidas.

Ésta es la característica más interesante del juego del caos: cuando el proceso aleatorio se repite un gran número de veces, el conjunto de puntos resultante se aproxima a una figura conocida y claramente determinista. Parece sorprendente que un juego aleatorio como éste, dé lugar a modelos tan estructurados como los fractales, ilustrando las potentes conexiones que subyacen en las matemáticas.

No se trata de un caso de caos determinista como sugiere Gallardo (1995), sino simplemente de un procedimiento aleatorio sobre un conjunto limitado de transformaciones, que tras un número elevado de iteraciones produce todas las secuencias posibles de las mismas, o al menos muchas, y por lo tanto el punto móvil visita todas, o casi todas, las pequeñas copias que constituyen la figura completa.

Otra de las características del juego del caos, es que presenta el fractal tal y como es, sin depender del número de iteraciones. Así, la figura mantiene un nivel infinito de detalle y autosemejanza a cualquier escala, aunque para escalas muy pequeñas sea necesario generar una gran cantidad de puntos, hasta que su densidad sea suficiente para observar la figura. Como el primer punto se ha elegido al azar sobre el plano, el juego debe encaminarse primero hacia la figura límite, por lo que los puntos obtenidos en las primeras tiradas se deben eliminar sin representar.

El resultado del juego tampoco depende del dado utilizado, es decir, no está condicionado por las probabilidades con las que cada transformación contractora entre a formar parte del juego. Este aspecto probabilístico del juego conecta con su eficacia en la convergencia, con la rapidez en la obtención de la figura límite. El fractal se obtiene más rápidamente si no se eligen las transformaciones al azar con igual probabilidad, sino que la velocidad de formación de la figura aumenta sensiblemente cuando a las transformaciones más contractoras se les asigna una probabilidad mayor. De esta manera se puede conseguir que la sucesión de puntos en el juego, barra en promedio con la misma frecuencia cada uno de los puntos de la figura límite. La utilización de estas frecuencias permite formar figuras con diferentes tonos de gris, asignando probabilidades que den lugar a distintas frecuencias con que se marquen puntos en cada área. Aplicando con esta técnica los tres colores fundamentales pueden codificarse figuras en color.

El triángulo de Sierpinski (1915) es el ejemplo más sencillo que se puede utilizar para describir cómo se obtiene la imagen fractal en el juego. Las tres transformaciones lineales que lo definen, consisten en la reducción a la mitad de tamaño y el desplazamiento hacia uno de los vértices de un triángulo equilátero. Durante el juego, cada transformación se traduce en un desplazamiento del punto en el interior del triángulo. Para cada movimiento se utiliza un método aleatorio, por ejemplo lanzando un dado, para seleccionar una de las tres transformaciones, y consecuentemente uno de los vértices del triángulo, y el punto se desplaza hasta la mitad de la distancia al vértice correspondiente. Esta regla es reflejo de la geometría de Sierpinski, pues la figura consiste en tres copias autosimilares de mitad de tamaño cada una.

El triángulo de Sierpinski (1915) es el ejemplo más sencillo que se puede utilizar para describir cómo se obtiene la imagen fractal en el juego.

Si se representan las trayectorias que unen los puntos medios, aparece la secuencia del juego y se puede observar la aleatoriedad del proceso, el movimiento aparentemente caótico del punto móvil. Dibujando sólo los impredecibles puntos medios, en el triángulo emerge un modelo estructurado que, en el límite infinito, resulta ser el fractal de Sierpinski. Esta figura se puede generar por infinitos saltos aleatorios guiados por un dado, donde los puntos, eventualmente, condensan en un fractal determinista.

Mediante los sucesivos movimientos en el juego, aparecerán todas las secuencias posibles que localizan subtriángulos entre cuyos límites deberá caer el punto y, por lo tanto, el punto móvil alcanzará todos esos subtriángulos (Peitgen, Jürgen y Saupe, 1992). Cuanto más continúe el juego, mayor será el número de puntos que aparezcan representando esos subtriángulos. Jugando indefinidamente, aparecerá el triángulo fractal completo, mientras que, cuando paremos el juego después de un número finito de tiradas, el triángulo de Sierpinski aparecerá incompleto.

Fractales lineales en el juego del caos

El juego del caos permite la incorporación de diferentes transformaciones en el algoritmo, que, mediante su aplicación sobre puntos del plano, obtiene figuras fractales. La investigación en este tema se compone de una serie graduada de ejercicios que se presentan a los estudiantes. Para este trabajo la actividad será distribuida temporalmente en seis sesiones de una hora cada una, las cuales pueden ser ampliadas si surge su necesidad.

Hemos mencionado el triángulo equilátero de Sierpinski, pero cualquier otro fractal lineal puede ser reproducido igualmente con el juego del caos. Atendiendo a una de las cuestiones pendientes planteadas por Gallardo (1995), numerosos fractales matemáticos se obtienen por este procedimiento en la práctica totalidad de las aplicaciones informáticas que los calculan. En este caso, y para evitar dificultades añadidas, se ha decidido restringir su utilización sólo a los fractales lineales.

El trabajo matemático subyacente consiste en obtener la descripción analítica en términos de coordenadas cartesianas de todas las transformaciones estudiadas sobre los puntos del plano, que en la geometría afín resulta sencillo. A partir de un sistema de coordenadas cartesiano, se pueden hallar fórmulas matemáticas que permitan obtener la posición del punto transformado a partir del anterior. Para ello, cada transformación puede descomponerse en partes, expresándose como la que resultaría al aplicar sucesivamente varias transformaciones simples.

Metodológicamente, no resulta difícil que los estudiantes adquieran destreza en el uso del juego del caos en la calculadora si se introducen progresivamente, atendiendo a su dificultad, las diferentes transformaciones de similaridad; se ensaya y se experimenta con ellas hasta obtener su expresión analítica general y, posteriormente, se incorporan como modificaciones sobre el programa que obtiene el triángulo equilátero fractal. El listado de este programa suele aparecer como ejemplo de programación en el manual de muchas calculadoras. Se les proporciona ese programa ofreciéndoles el listado, que deben introducir en la calculadora, o mejor, pidiéndoles que se lo intercambien de máquina a máquina conectándolas entre sí.

La resolución de los ejercicios requiere la representación gráfica del resultado del juego: la primera vez como comprobación del resultado y, posteriormente, como experimentación de nuevas variantes.

Descripción de los ejercicios que componen esta actividad

¿Qué ocurre si se cambian las transformaciones, si se cambia el número de copias, o sus propiedades de contracción (escalado, rotación…), o la configuración en la que se agrupan las imágenes contraídas? La respuesta a esta pregunta es la tarea que se plantea.

Ejercicio 1

La primera puesta en marcha del juego se propone manual, para aplicar las tres transformaciones que generan el triángulo de Sierpinski. Los estudiantes deberán jugar, inicialmente, en una hoja de papel que contenga los tres vértices del triángulo equilátero. Las tiradas de un dado permiten elegir al azar cada transformación.

Para ejecutar las jugadas se les proporciona una *regla del punto medio*. Se trata de una pequeña regla graduada con una escala simétrica respecto a su centro, que resulta muy útil para realizar los desplazamientos al punto medio entre la posición del punto y el vértice correspondiente.

Se pueden obtener resultados conjuntos de un gran número de tiradas si los estudiantes utilizan hojas transparentes al dibujar los puntos que aparecen en el juego, para, después, superponerlas y proyectar el resultado combinado sobre una pantalla. Aparecerá el agrupamiento esperado, pero sólo a partir de un número suficiente de jugadas. La formación de la figura fractal es la situación adecuada para discutir e interpretar cómo se produce este resultado, cómo los puntos acaban llenando densamente la figura límite.

Metodológicamente, no resulta difícil que los estudiantes adquieran destreza en el uso del juego del caos en la calculadora si se introducen progresivamente, atendiendo a su dificultad, las diferentes transformaciones de similaridad…

Las primeras preguntas que se pueden plantear como estas:

- ¿Hay límites y cuáles son para todos los posibles puntos en este juego?
- ¿Aparecerán localizados aleatoriamente los sucesivos puntos medios dentro de esos límites?
- ¿Cubren los puntos completamente la región triangular?
- ¿Parece predecible el resultado que aparece con los puntos que emergen del movimiento aleatorio de puntos en el juego del caos?

No cabe duda de que el lugar posible para el movimiento de los puntos será el interior del triángulo, y que aparecerá rápidamente una aproximación al triángulo de Sierpinski. La localización de una secuencia de puntos dibujados depende básicamente del resultado aleatorio del dado; cuando se comparen diferentes hojas del juego variarán considerablemente unas de otras. Aunque cada resultado es diferente, rápidamente se comprueba que un gran número de jugadas nos generan el resultado fractal. Comprobar que diferentes puntos de partida no dan lugar a diferencias en los resultados, es una de las observaciones que hay que realizar.

Ejercicio 2

Como resulta tedioso continuar utilizando lápiz y papel para realizar un gran número de tiradas, a partir de aquí se propone utilizar una herramienta a nuestro alcance para reproducir el juego del caos: la calculadora gráfica. Es necesario ser cuidadoso introduciendo y modificando los listados de programas en la calculadora para simular el juego.

La tarea principal es la de revisar el listado del programa del juego del caos (figura 1), interpretando sus diferentes

Program Hexagon

```
FnOff :ClrDraw
PlotsOff
AxesOff
0→Xmin:1→Xmax
0→Ymin:1→Ymax
rand→X:rand→Y
For(K,1,3000)
rand→N
If 1/6>N
Then
(X+(2*.25))/3→X:(Y+(2*.067))/3→Y
End
If 1/6<N and N≤1/3
Then
X/3→X
(Y+(2*.5))/3→Y
End
If 1/3<N and N≤1/2
Then
(X+(2*.25))/3→X:(Y+(2*.9330))/3→Y
End
If 1/2<N and N≤2/3
Then
(X+(2*.75))/3→X:(Y+(2*.9330))/3→Y
End
If 2/3<N and N≤5/6
Then
(X+(2*1.))/3→X
(Y+(2*.5))/3→Y
End
If 5/6<N
Then
(X+(2*.75))/3→X:(Y+(2*.067))/3→Y
End
Pt-On(X,Y)
End
StorePic 6
```

Figura 1. Listado del programa del juego del caos en la calculadora gráfica TI-83 para obtener el hexágono de Sierpinski. El resultado del juego se muestra en la figura 7

partes y todas las instrucciones. La calculadora utiliza un lenguaje de programación sencillo, similar al Basic.

Se procede a analizar y describir la estructura del algoritmo de cálculo que estructura el juego. Sin hacer hincapié en los detalles de programación, lo fundamental aquí es la comprensión de la simulación con la máquina. Continúa el trabajo con la introducción de manera cuidadosa en la calculadora del listado del juego del caos para el triángulo de Sierpinski, y con su ejecución.

La calculadora utiliza un lenguaje de programación sencillo, similar al Basic.

Antes de proponer nuevas versiones del programa, se deberá utilizar el ejemplo anterior para, conocidas las transformaciones que generan el triángulo fractal, revisar su conexión con los desplazamientos del punto.

Ejercicio 3

Una vez con el programa del juego en la calculadora, en este ejercicio se propone modificar las transformaciones en su aspecto más sencillo, las traslaciones. Sobre el triángulo obtenido en la etapa previa, esta primera variación de las reglas del juego supone cambiar la posición de los tres vértices del triángulo. Se pide a los estudiantes que obtengan el triángulo rectángulo de Sierpinski que aparece en la figura 2, y otro con un ángulo obtuso como muestra la figura 3. Cada uno de ellos sigue constituido por tres copias, con factor de escala dos, pero de forma distinta y colocadas en posiciones diferentes. En el listado del programa, basta con modificar las expresiones que describen el desplazamiento de las dos coordenadas del punto al centro entre su posición y cada vértice. Se puede comprobar que la autosimilaridad de la figura se mantiene.

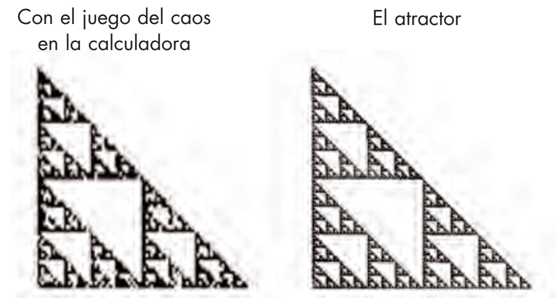

Figura 2. Triángulo rectángulo de Sierpinski obtenido como el equilátero, pero modificando las traslaciones (la posición de los vértices)

Figura 3. Triángulo obtusángulo obtenido igual que el equilátero de Sierpinski, pero modificando la posición de los vértices

Ejercicio 4

En general, cualquier transformación aplicada a un punto en el plano se convierte en un desplazamiento del punto a otra posición. La variación que se quiere obtener con este ejercicio se refiere al cambio de escala o relación de semejanza. Un escalado es una transformación en la que sólo cambian las distancias, todos los ángulos se conservan; se trata de una transformación particular que conserva el paralelismo. De igual manera que se ha visto con el triángulo de Sierpinski que la reducción a mitad de tamaño y traslación a un vértice del triángulo supone el desplazamiento a mitad de camino de la posición del punto, una contracción con factor de reducción k y traslación a un vértice supondrá el desplazamiento a una posición donde la distancia anterior d al vértice se reduce a d/k.

El ejercicio se presenta como la variación de los cambios de escala en las tres transformaciones que dan lugar al triángulo fractal, y la imagen resultante permitirá comprobar el efecto de las modificaciones realizadas. Tras su análisis, se concluye que las diferentes contracciones deben dar lugar a distintos desplazamientos del punto en el segmento que une su posición y el vértice elegido, que ya no serán al punto medio.

Se puede comenzar modificando la transformación que traslada al vértice superior, cambiándola a un factor de reducción tres. La contracción desplazará el punto sobre una línea recta hacia el vértice superior de tal manera que la nueva distancia sea 1/3 de la anterior. Si jugamos con esta nueva regla resultará una imagen muy diferente, con tres piezas autosimilares, dos de ellas exactamente de mitad de tamaño de la imagen completa, y la tercera de 1/3 del tamaño total. De nuevo, el número de copias es igual al número de vértices, y el factor de escala de cada transformación corresponde al factor de distancia al vértice.

Los estudiantes continuarán ganando confianza en el manejo de las transformaciones y en el control del programa si se les propone que ensayen modificaciones que sobre ese mismo programa supongan contracciones con diferentes reducciones de tamaño, con factor de reducción $k = 2, 3, 4$. Para que los cambios de escala en cada transformación correspondan a los factores propuestos, se edita y modifica el programa para desplazar el punto hasta 1/2, 2/3 y 3/4 del camino total hacia los vértices izquierdo, superior y derecho, respectivamente. El resultado de ejecutar el juego se muestra en la figura 4.

Figura 4. Configuración fractal resultado de diferentes contracciones. Los factores de reducción son 2, 3 y 4. Las traslaciones son las mismas que las del triángulo equilátero fractal

Ejercicio 5

Después de haber recreado diferentes figuras fractales definidas con tres transformaciones y, por consiguiente, utilizado el triángulo como elemento base o iniciador de las mismas, se abre una nueva perspectiva en el diseño de fractales al proponerse distinto número de contracciones y, por lo tanto, el uso de otros polígonos.

Aquí se sugieren algunos ejemplos sencillos con el cuadrado, el pentágono y el hexágono regulares. Dividir un cuadrado en nueve cuadrados iguales cuyos vértices coincidan con las terceras partes de las aristas del primero, permitirá definir varios generadores de figuras fractales. Basta con elegir un subconjunto cualquiera de esos cuadrados.

La figura 5 muestra un ejemplo donde aparecen el iniciador, el generador y la segunda etapa de la formación de un fractal muy conocido, inventado por Tamás Vicsek (Sander, 1987). Se pide dibujar un cuadrado dividido en subcuadrados y seleccionar algunos de ellos como generador de un fractal. Se puede también utilizar un triángulo dividido en subtriángulos (equiláteros, isósceles, rectángulos…). En estos casos sencillos, y a partir de imágenes como las de esta figura, los estudiantes

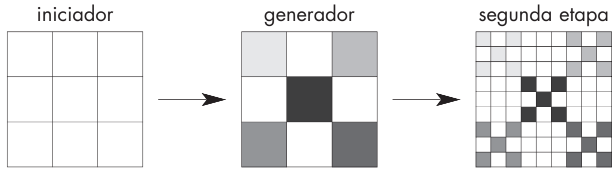

Figura 5. Esquema que muestra las primeras etapas de la generación de un fractal lineal a partir de un cuadrado. El atractor correspondiente se presenta en la figura 6

deben describir las transformaciones: calcular el factor de escala necesario y localizar las coordenadas de sus vértices. El resultado del juego con estas transformaciones se presenta en la figura 6.

Pero es necesario mantener una actitud crítica para no generalizar erróneamente, no todas las reglas en el juego del caos generan fractales. Cuando seleccionamos los cuatro vértices de un cuadrado y utilizamos un factor de escala de reducción de 2, ¿aparece el cuadrado de Sierpinski?

Con el juego del caos en la calculadora | El atractor

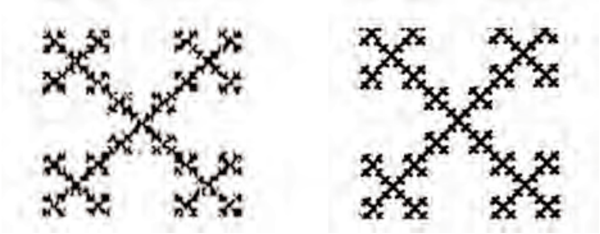

Figura 6. Las aspas de Vicsek definidas con cinco transformaciones con factor de reducción de tres, y traslación a los vértices y al centro de un cuadrado

Ejercicio 6

Si en el ejercicio anterior se enunciaban las transformaciones, en este se propone realizar uno de esos ejemplos. Los estudiantes tienen que introducir en el juego seis transformaciones, cada una con una reducción con factor de escala tres, y traslación a los vértices de un hexágono regular. Al fractal resultante, que aparece en la figura 7, se le puede llamar hexágono de Sierpinski, y consta de seis partes autosimilares.

Dentro del hexágono aparece otra famosa curva fractal, el límite interior de esta figura es la curva de copo de nieve de H. von Koch (1906). Un ejemplo parecido para construir es el pentágono de Sierpinski, que se puede obtener con cinco transformaciones con un factor de reducción de 3/8, y en el que también aparece una curva de Koch; de esta forma, los estudiantes revisan las propiedades de los polígonos regulares: las coordenadas de los vértices del pentágono y del hexágono.

Otras transformaciones lineales que permiten definir fractales son las rotaciones alrededor de un punto.

Con el juego del caos en la calculadora | El atractor

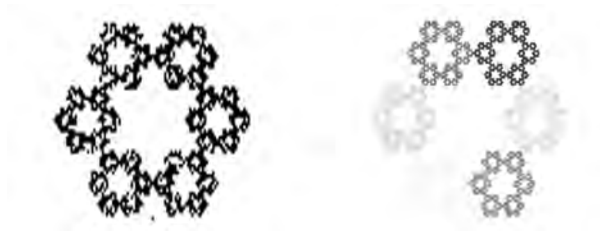

Figura 7. Hexágono de Sierpinski. Obtenido con seis transformaciones y un factor de reducción de tres. Aparecen curvas de Koch en el atractor

Ejercicio 7

Otras transformaciones lineales que permiten definir fractales son las rotaciones alrededor de un punto. Usualmente, la rotación resulta asociada a una semejanza y/o a una traslación. Cuando alguna contracción incluye una rotación, además del desplazamiento hacia el vértice, es necesario girar el punto a su alrededor.

Se comienza con las rotaciones más sencillas de expresar en coordenadas cartesianas, las de 180° y de 90°, en cualquiera de los dos sentidos de giro, para después generalizar el procedimiento que permita representar rotaciones de cualquier ángulo. Para la rotación de 90° de amplitud alrededor del origen de coordenadas, obtenemos que la x transformada es la opuesta de la y previa, y la y transformada es igual a la x previa.

Se propone, como primer ejemplo, utilizar el conjunto de transformaciones que genera el triángulo equilátero fractal, para añadir una rotación de 180° en la contracción que desplaza al vértice superior. Obtenida la expresión analítica de la rotación, habrá que editar y modificar el programa en las instrucciones correspondientes a los desplazamientos hacia los vértices. La imagen resultante se muestra en la figura 8.

Este ejemplo se puede ampliar añadiendo en las demás transformaciones una rotación de 180° alrededor de cada vértice del triángulo. Otro conjunto de transformaciones sobre el triángulo aparece en la figura 9, con el efecto de una rotación de –90° sobre el vértice superior.

Con el juego del caos en la calculadora

El atractor

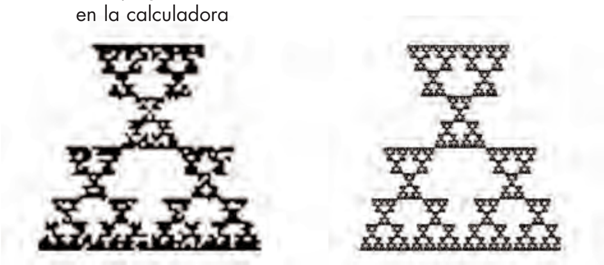

Figura 8. Imagen fractal descrita mediante tres transformaciones con factor de reducción dos, traslación a los vértices de un triángulo equilátero y una rotación de 180° alrededor del vértice superior

Con el juego del caos en la calculadora

El atractor

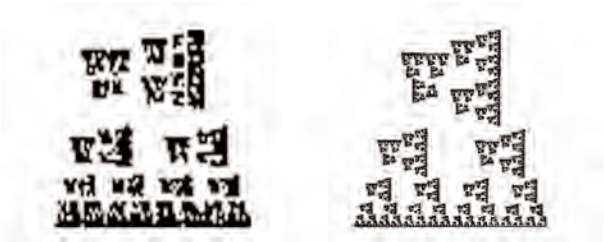

Figura 9. Figura fractal obtenida modificando el triángulo equilátero de Sierpinski al añadir a sus transformaciones una rotación de 90° alrededor del vértice superior

Ejercicio 8

Como segundo ejemplo de transformaciones con rotación, se pide construir la figura llamada árbol de Navidad autosimilar (Peitgen, Jürgen y Saupe, 1992). Se obtiene con las mismas tres transformaciones, de factor de reducción dos y traslación a los vértices del triángulo equilátero y con rotación en dos de ellas: de 90° en sentido horario alrededor del vértice inferior derecho, y de –90° alrededor del vértice inferior izquierdo.

Ejercicio 9

Pero investigar cómo actúa el juego del caos sobre un conjunto de transformaciones lineales, también nos puede llevar a modificar las reglas del juego en lo referente a la asignación de probabilidades para cada transformación. Los fractales geométricos más regulares se obtienen de forma más efectiva haciendo equiprobables todas las transformaciones. Esos ejemplos son la situación ideal para comprobar el efecto de modificaciones en la probabilidad de las diferentes transformaciones en el proceso aleatorio. El ejercicio consiste en modificar las probabilidades en algunos de los ejercicios anteriores, y comprobar cómo varían las densidades de puntos, cómo cuando el número de jugadas no sea muy grande, las regiones del fractal menos definidas son las correspondientes a las transformaciones menos probables.

Los fractales geométricos más regulares se obtienen de forma más efectiva haciendo equiprobables todas las transformaciones.

Ejercicio 10

Alternativamente al ejercicio 5, en el que se pedía la descripción de las transformaciones a partir de la figura del generador del fractal lineal, la realización de los ejercicios anteriores capacita a los estudiantes para deducir las reglas utilizadas en el juego a partir de la geometría de la figura fractal resultante. En este caso se pide la descripción de las contracciones que dan lugar a diversos fractales lineales. Se cuidará que las transformaciones resultantes sean sencillas, es decir, que las reglas no sean demasiado complicadas de describir. En muchos casos sencillos, el número de ejes radiales de simetría coincide con el número de vértices y de contracciones en la figura. La figura 10 presenta un ejemplo muy sencillo que se puede utilizar, en el que las transformaciones se reducen a contracciones y traslaciones.

Con el juego del caos en la calculadora

El atractor

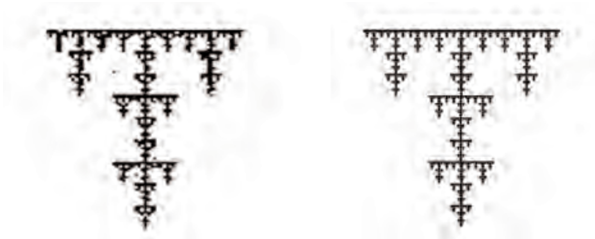

Figura 10. Fractal lineal que se define seleccionando cinco de los subcuadrados del iniciador de la figura 5. Las cinco transformaciones sólo son reducciones de factor tres y traslaciones

Ejercicio 11

Los fractales se caracterizan por su dimensión fractal, generalización de la dimensión euclídea, por lo que otro análisis interesante es la deducción de la dimensión fractal de cada una de las imágenes. Utilizando cualquiera de las definiciones de dimensión fractal, como por ejemplo la dimensión de homotecia de Haussdorff-Besicovitch (1919), se concluye que el número de transformaciones que generan copias del conjunto inicial, y el factor de escala en las mismas, son los determinantes de esta característica de cada fractal. Se propone, en este ejercicio, que los estudiantes deduzcan la dimensión fractal de las imágenes obtenidas en los ejercicios anteriores.

Cuando se llega al final de esta experiencia, del programa original del triángulo fractal sólo queda lo esencial del juego aleatorio del caos, que puede volver a revisarse con los estudiantes. Ellos, con la práctica adquirida, se atreverán con casi cualquier propuesta que se les haga de transformaciones en el plano, incluso las no-lineales.

En el diseño de esta actividad se pueden añadir ejercicios con mayor complejidad para atender a estudiantes de diferentes niveles en la misma clase. Sobre todos los ejercicios presentados, existen innumerables variaciones que permitirán a los estudiantes afianzar el carácter de cada tipo de transformación, su expresión analítica y su consecuencia gráfica. Hay numerosos objetos fractales que presentan características parecidas en los que seguir investigando las propiedades de las transformaciones geométricas y la autosimilaridad.

Conclusión

Como se indicó al principio, el propósito de esta propuesta es ofrecer una estrategia atractiva para mejorar las destrezas de los estudiantes en el manejo de las transformaciones lineales en el plano.

Esta innovación quiere responder a la necesidad del profesorado tanto de incorporar actualizaciones en el currículo de geometría, como la de fomentar en los estudiantes el uso de nuevas herramientas.

El aprendizaje significativo de la geometría analítica se consigue en muchas ocasiones desde la práctica de ejercicios de investigación como los presentados en esta actividad.

La rentabilidad del estudio de los fractales lineales en el aula está garantizada, permitiendo combinar conocimientos, procedimientos y habilidades de una manera eficaz, y sobre un tema de actualidad en las matemáticas. El planteamiento como investigación que hace esta propuesta y el manejo de un sencillo programa en la calculadora, fomentan el interés en su realización, con una implicación muy alta de los estudiantes en la tarea planteada desde el principio.

El aprendizaje significativo de la geometría analítica se consigue en muchas ocasiones desde la práctica de ejercicios de investigación como los presentados en esta actividad.

Juan C. Moreno-Marín
IES Leonardo da Vinci
Alicante.
Dpto. Física Aplicada,
Fac. Ciencias
Universidad de Alicante.
Societat d'Educació
Matemàtica de la Comunitat
Valenciana «Al-Khwarizmi»

Referencias bibliográficas

ALSINA C., C. BURGUÉS y J. M.ª FORTUNY (1987): *Invitación a la didáctica de la geometría,* Síntesis, Madrid.

BOSCH, M., y J. GASCÓN (1994): «La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de estudio de matemáticas», *Enseñanza de las Ciencias*, n.° 12, 314-332.

CABALLER SENABRE, M.ª J., J. CARRASCOSA ALÍS y L. PUIG ESPINOSA, (1986): «Establecimiento de las líneas de investigación prioritarias es la didáctica de las ciencias y las matemáticas», *Enseñanza de las Ciencias*, n.° 4, 136-144.

CALLEJO DE LA VEGA, M. L. (1994): *Un club matemático para la diversidad*, Narcea, Madrid.

DIENES, Z. P., y E. W. GOLDING (1972): *La geometría a través de las transformaciones*, *vols. 1, 2 y 3*, Teide, Barcelona.

FERNÁNDEZ RODRÍGUEZ, F., y J. PACHECO CASTELAO (1991): «Valor matemático elemental de los fractales», *Suma*, n.° 9, 4-10.

GALLARDO CALDERÓN, J. (1995): «Fractales y Azar. Un acercamiento mediante la calculadora gráfica», *Suma*, n.° 20, 69-72.

HAUSSDORFF, F. (1919): «Dimension und äusseres Mass», *Mathematische Annalen*, n.° 79, 157-179.

JÜRGENS, H., H. O. PEITGEN y D. SAUPE (1990): «El lenguaje de los Fractales», *Investigación y Ciencia*, n.° 169, 46-57.

KOCH, H. VON (1906). «Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes», *Acta Mathemática*, n.° 30, 145-174.

MANDELBROT, B. B. (1977): *The Fractal Geometry of the Nature* W. H. Freeman & Co Publishers, Nueva York. [Existe traducción al castellano (1997): *La Geometría Fractal de la Naturaleza*, Tusquets, Barcelona.]

NUÑEZ ESPALLARGAS, J. M.ª (1985): «Enseñanza de la geometría y didáctica genética», *Enseñanza de las Ciencias*, n.° 3, 131-135.

PEITGEN, H. O., H. JÜRGENS y D. SAUPE (1992): *Fractals for the Classroom*, Springer-Verlag, Nueva York.

SÁNCHEZ VÁZQUEZ, G. (1997): «La enseñanza de la geometría en el momento actual y en el futuro inmediato», *Suma*, n.° 14/15, 18-24.

SANDER, L. M. (1987): «Crecimiento Fractal», *Investigación y Ciencia*, n.° 126, 66-73.

SIERPINSKI, W. (1915): «Sur une curbe dont tout point est un point de ramification», *Comptes Rendus Acad. Paris*, n.° 160, 302.