SUMA 42
febrero 2003, pp. 47-59

Las centenas cuadriculadas: un material matemáticamente potente *para ilustrar el tránsito de la Aritmética al Álgebra*

Fredy E. González
Francisco Ruiz López

Se presentan los resultados de una experiencia realizada con estudiantes para profesores de secundaria en torno a las posibilidades que tiene la centena cuadriculada, o tabla de los números naturales del 1 al 100, para realizar el paso de la aritmética al álgebra. Las actividades favorecen que los estudiantes adquieran los siguientes objetivos: reconocer y describir patrones numéricos, usar variables para expresar relaciones matemáticas, formular y probar conjeturas, y comunicar ideas matemáticas.

ARTÍCULOS

LOS RESULTADOS de las evaluaciones que se hacen a los alumnos de las escuelas e institutos en relación con su rendimiento en Matemáticas, frecuentemente son desalentadores. En general, ellos no logran superar los niveles aprobatorios mínimos. Ésta es una situación demasiado extendida que crea la necesidad de diseñar opciones cuya implantación procure coadyuvar al incremento de la pericia que poseen los estudiantes para la realización de actividades propias de la matemática. Para ello, resulta conveniente examinar la situación con más detalle con objeto de precisar los factores de mayor incidencia; uno de éstos, a nuestro juicio, está relacionado con las concepciones de los profesores acerca de lo que es la matemática, su enseñanza y evaluación. Destacamos dos perspectivas en relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. En la primera de ellas, denominada «tradicional», la matemática es vista como un gran conjunto de expresiones simbólicas y fórmulas, cuyo aprendizaje consiste en el re-conocimiento de algoritmos que permitan transformar unas expresiones simbólicas en otras, siendo en este caso el papel del *enseñante* el de limitarse a presentar esos algoritmos, lograr que los alumnos los retengan y evaluar la capacidad de éstos para reproducirlos. Se trata de lograr un isomorfismo entre *lo visto* en clase, lo *evaluado* en los exámenes y lo *reproducido-devuelto* por los alumnos, es decir, se trata de la clásica rutina *teoría-ejemplos-ejercicios* que se basa en transmitir información para que el estudiante la registre y sea capaz de repetirla. En esta *visión reproductivista* del proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática predomina una visión estática y cerrada.

La intencionalidad de este enfoque presupone una *in-competencia* del alumno, que por sí mismo, no es capaz de acceder al conocimiento, y es preciso brindárselo desde fuera, donde se ubica el docente, quien opera como un proveedor de estímulos, conocimientos que han de «ponerse en la cabeza» de los estudiantes, quienes han de reaccionar ante tales estímulos mediante una respuesta que es valorada y, en consecuencia, reforzada o rechazada por el docente, según sea o no isomorfa con un patrón esperado previamente establecido.

Frente a este modelo tradicional, poco a poco, se ha venido construyendo una perspectiva diferente, la cual suscribe otra visión acerca de lo que significa «saber matemáticas», y ofrece una reconceptualización del rendimiento en matemática, asumiéndolo como la pericia en la ejecución de los procesos propios del quehacer matemático. Estos procesos se desarrollan a partir de la participación activa y consciente en «tareas intelectualmente exigentes» (González, 1998), que le permiten a los alumnos explorar ideas matemáticas en contextos de enseñanza y aprendizaje matemáticamente enriquecedores, contemplando una amplia variedad de nociones matemáticas, y posibilitan el ejercicio de procesos próximos al quehacer matemático. Este tipo de tareas hace posible que los alumnos aprendan matemática explorando y evaluando ideas, elaborando conjeturas, comunicándose, razonando, analizando y pensando acerca de su propio proceso de aprendizaje de esta materia. Desde este punto de vista, son deseables las proposiciones didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas que hagan posible que los alumnos:

- Desarrollen una valoración positiva hacia las Matemáticas.
- Incrementen razonablemente la confianza en su aptitud propia para desempeñar tareas específicas del quehacer matemático.
- Mejoren su capacidad para resolver problemas matemáticos.
- Amplíen su habilidad para comunicarse matemáticamente.
- Alcancen una adecuada pericia en el desarrollo de razonamientos matemáticos.
- Establezcan conexiones entre diversos campos de la matemática.

Este contexto conlleva ampliar el alcance de lo que significa «saber matemáticas», lo que implica, no sólo saber manejar algoritmos, sino además: (a) comprensión de las bases conceptuales mínimas de la matemática, (b) habilidad para comunicar ideas matemáticas a otros, (c) capacidad para razonar matemáticamente, (d) familiaridad con el uso de diversificar herramientas tecnológicas para aprender y hacer matemáticas. Así que, como alternativa al enfoque «tradicional», se formula otro que plantea que la educación matemática debe propender a que los estudiantes sean competentes para:

El campo general en el que se desenvuelve la investigación en Pensamiento Numérico comprende el estudio de los diferentes sistemas cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significado utilizando diferentes estructuras numéricas.

- Dotar de significado a las ideas matemáticas.
- Dilucidar si una idea es matemáticamente correcta o no.
- Razonar matemáticamente
- Realizar conjeturas, inventar y resolver problemas.
- Establecer conexiones entre distintos campos de la matemática y con el acontecer cotidiano.

Para lograr lo anterior se precisa que en el aula se desarrollen actividades adecuadas a tales fines, y es en esta dirección en la que se orientó la experiencia que en este artículo se relata.

Marco teórico

Ubicamos este trabajo, en primer lugar, en el marco de la línea de estudio e investigación dentro de la educación de la matemática que se denomina *pensamiento numérico y algebraico*, y se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos, tanto en el medio escolar como en el social. El campo general en el que se desenvuelve la investigación en Pensamiento Numérico comprende el estudio de los diferentes sistemas cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significado utilizando diferentes estructuras numéricas (Rico y otros, 1997).

Las tareas que proponemos a los estudiantes son tareas no convencionales de tipo aritmético y algebraico, y el planteamiento y resolución de dichas actividades tienen que ver con el llamado «sentido numérico», concepto utilizado en los *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática* (NCTM, 1991), que en el *Informe Cockcroft* (1985) figura como «sentido del número» y al que Wirtz (1974) se refiere como «simpatía por los números». No existe una caracterización del sentido numérico que sea universalmente aceptada, sin embargo podemos asumir la visión global que proporciona Howden (1989):

El sentido numérico puede ser descrito como una buena intuición sobre los números y sus relaciones. Se desarrolla gradualmente como consecuencia de explorar números, visualizándolos en una variedad de contextos, y relacionándolos de maneras que no están limitadas por algoritmos tradicionales.

Pensamos que difícilmente los futuros profesores podrán fomentar el sentido numérico en sus alumnos si ellos previamente no se ejercitan en destrezas que permiten reflexionar desde diferentes puntos de vista sobre los números y sus relaciones.

El objeto matemático en el que centramos la experiencia es la *centena cuadriculada*, o tabla que contiene los números naturales del 1 al 100 dispuestos en 10 filas y 10 columnas (figura 1). Las tablas numéricas constituyen un medio excelente para plantear tareas con el objeto de identificar patrones numéricos, y conjeturar, descubrir y probar propiedades aritméticas y algebraicas.

La noción de *patrón*, entendido como regularidad que se forma a partir de un núcleo generador, ocupa hoy día un lugar central en las matemáticas. Así, gran parte de los matemáticos están de acuerdo en concebir la matemática como «la ciencia o el estudio de los patrones» (Devlin, 1994). Para Stewart (1995) vivimos en un universo de patrones. El instinto del científico es tratar de comprender el mundo natural, y el del matemático es estructurar ese proceso buscando la regla, la norma, la estructura, es decir, el patrón.

Las tablas numéricas constituyen un medio excelente para plantear tareas con el objeto de identificar patrones numéricos y conjeturar, descubrir y probar propiedades aritméticas y algebraicas.

La actividad de reconocer y trabajar con patrones en tablas numéricas está directamente ligada con la *matemática visual* y con el pensamiento visual. En general, hay consenso entre investigadores y especialistas en que el desarrollo de las capacidades que caracterizan el pensamiento visual proporciona a los alumnos nuevos caminos para pensar y hacer matemáticas. Zimmerman y Cuningham (1991) recogen diversas investigaciones en torno a la visualización, y concluyen que los alumnos tienen una alta tendencia a pensar algebraicamente más que visualmente, incluso cuando se les fuerza a utilizar un proceso visual. Los autores explican este hecho aludiendo a razones tales como: «el proceso visual es más difícil que el analítico, lo visual se considera menos sólido para la enseñanza o lo visual no es matemático», según algunos matemáticos, profesores de matemáticas e incluso alumnos.

En nuestro trabajo planteamos tareas motivadoras con el fin de propiciar el descubrimiento y la conjetura, a través de «visualización» de regularidades o patrones numéricos y propiedades matemáticas, de manera que este hecho sirva de motivación para realizar representaciones simbólicas adecuadas que faciliten la demostración de algunas propiedades aritméticas y algebraicas.

Litwiller y Duncan (1980, 1986) proponen actividades variadas sobre tablas numéricas como la tabla de sumar, la tabla de restar, la tabla de multiplicar y la centena cuadriculada o tabla-100, término éste utilizado por Ruiz (2000) en el estudio de dicha tabla para obtener representaciones geométricas para conceptos aritméticos. Si bien se trata de un objeto didáctico que no presenta mayor dificultad de uso en el aula, sí hay que tener en cuenta que su estudio desde un punto de vista matemático formal escapa al ámbito escolar.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 1. Centena cuadriculada tipo 1

Descripción de la experiencia

Este trabajo de innovación curricular, ha sido llevado a cabo con un grupo de estudiantes para profesor de secundaria (EPP) en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador (UPEL) (Núcleo Maracay). La estructura curricular de los estudios que debe realizar en la UPEL, quien aspire a convertirse en profesor de matemática para educación secundaria, contempla los siguientes componentes: (a) Formación general; (b) Formación pedagógica; (c) Formación especializada; y (d) Práctica profesional. Los tres primeros constituyen la base común de la formación del egresado. El componente de formación especializada se refiere específicamente a las asignaturas de Matemática y de Educación Matemática. En relación con esta última se contempla el curso de *Introducción a la Educación Matemática* en el cual el futuro profesor tiene la oportunidad de vincularse con un conjunto de estrategias orientadas al logro de experiencias de aprendizajes sistematizadoras y formalizadoras que favorezcan el dominio de los conocimientos de las diversas disciplinas y propicien una actitud positiva hacia las Matemáticas, así como también de diseñar, desarrollar y evaluar situaciones didácticas y secuencias instruccionales relativas a los tópicos de los programas de matemática del nivel secundario y, al mismo tiempo, diseñar y participar en proyectos de investigación relativos a la enseñanza de la matemática. Este curso es parte del componente de Formación Especializada, se desarrolla durante cinco sesiones semanales de clase con una duración de cuarenta y cinco minutos cada una, en un «período académico» de dieciséis semanas. La experiencia a la que se refiere este artículo se llevó a cabo durante el periodo 2001-1 (marzo-julio); en ella participaron diecinueve alumnos (diez mujeres y nueve hombres), con una edad promedio de veinte años.

Los alumnos prepararon su propio plan individualizado de evaluación, seleccionando entre las actividades que se muestran seguidamente:

1. *Trabajo individual* (TI: 20 %).
2. *Cuaderno de notas* (CN: 30 %): registro escrito, diario y pormenorizado de las fases preactiva, activa y postactiva correspondiente a cada uno de los encuentros presenciales de trabajo (sesiones de clase).
3. *Reseña de artículo* (RA: 5 %): resumen escrito acerca del contenido de algún artículo referido a la Educación Matemática publicado en alguna revista de las que se encuentran en el Centro de Información y Documentación de la institución.
4. *Miniproyecto matemático* (MPM: 15 %): trabajo sencillo de investigación documental referido a un tema matemático señalado por el profesor o convenido, de común acuerdo, entre el alumno y el profesor.
5. *Ensayo libre* (EL: 10 %): trabajo monográfico de tema escogido libremente por el alumno en relación con la Educación Matemática, tal como se estudió en clase.
6. *Proyecto pedagógico de aula* (PPA: 20 %): elaboración de un Proyecto Pedagógico de Aula, según algún contenido matemático de lo estudiado en el curso.
7. *Miniproyecto educación matemática* (MPEM 20%): trabajo sencillo de investigación referido a algún asunto de la Educación Matemática señalado por el profesor o convenido, de común acuerdo, entre el alumno y el profesor.

8. Ensayo didáctico (ED: 15%).

9. Asistencia (A: 5%).

Entre los miniproyectos didácticos de educación matemática, el profesor propuso el trabajo con las centenas cuadriculadas, mediante el cual se invitaba a los alumnos a intentar hacer matemática a partir de materiales sencillos, mediante la reflexión y la abstracción, y que fue asumido por siete de los alumnos participantes en el curso. Los resultados de su actuación son los que en este artículo se relatan.

Era *objetivo principal* del miniproyecto didáctico de educación matemática denominado «centenas cuadriculadas», *que los estudiantes realizaran actividades propias del quehacer matemático, tales como: identificar regularidades y patrones numéricos, elaborar y verificar conjeturas, proponer enunciados de teoremas y, finalmente, demostrar tales teoremas*. Para ello se les proporcionó un «material matemáticamente potente» como son las Centenas Cuadriculadas, ya que presentan las siguientes tres características que definen a este tipo de material: (a) están al alcance de casi cualquier persona, (b) son de muy bajo costo o fáciles de fabricar, (c) conllevan implícito un conjunto de nociones o procesos propios de la Matemática. El uso adecuado de las centenas cuadriculadas, por parte del profesor, puede permitir que sus estudiantes desarrollen habilidades para:

1. Reconocer y describir patrones numéricos.
2. Usar variables para expresar relaciones matemáticas.
3. Formular y probar conjeturas.
4. Comunicar ideas matemáticas.

Para trabajar con las centenas cuadriculadas, en este caso, se propusieron a los estudiantes las actividades que se señalan a continuación:

- Explorar las centenas cuadriculadas y señalar algunos usos que pueda dárseles.
- Trabajando por parejas, desarrollar las actividades que se indican en cada una de las hojas que contienen una centena cuadriculada.

Era objetivo principal del miniproyecto didáctico de educación matemática denominado «centenas cuadriculadas», que los estudiantes realizaran actividades propias del quehacer matemático, tales como: identificar regularidades y patrones numéricos, elaborar y verificar conjeturas, proponer enunciados de teoremas y, finalmente, demostrar tales teoremas.

- Trabajando en parejas, construir otras versiones de centenas cuadriculadas e identificar en ellas patrones numéricos (si es que hay alguno).
- Reunidos en grupo total, compartir ideas, discutir hallazgos, y resolver diferencias de opinión, si es que hay alguna.

Este procedimiento fue formulado del modo como se expone en la figura 2.

Centena cuadriculada (tipo 1)

En esta figura se ha dibujado un cuadrado alrededor del 12; esta figura será llamada *cuadrado de cuatro puntos alrededor de 12* porque como vértices tiene los cuatro números, 2, 13, 22, y 11, y como centro tiene al número 12. Dibuje y denomine otros cuadrados de cuatro puntos. ¿Cuál es la relación existente entre los vértices y el centro? Elabore una conjetura y trate de demostrarla.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 2. Cuadrado de cuatro puntos

La *primera actividad* que se planteó a los estudiantes consistió en pedirles que señalaran la mayor cantidad posible de nociones matemáticas que ellos observaran en la centena cuadriculada. Fue una especie de juego libre y manipulación despreocupada. Se les dijo que podían hacer referencia a cualquier aspecto matemático que ellos percibieran, por muy obvio que pareciese. La intención de esta actividad fue hacerles reflexionar sobre los aspectos matemáticos que encierra la centena cuadriculada.

Entre las respuestas aportadas por los estudiantes destacamos las de Maiyelines, María y Efraín:

> Contiene los números consecutivos desde el 1 hasta el 100. Es un cuadrado. Puede ser dividida en triángulos y rectángulos, por tanto tiene ángulos. Su diagonal principal lleva los números ordenados de 11 en 11, desde el 1 hasta el 100. Su diagonal secundaria, lleva los números ordenadamente de 9 en 9, desde el 10 hasta el 91. Tiene filas y columnas. Cada columna tiene 10 números ordenados consecutivamente de 1 en 1. Cada fila tiene 10 números ordenados de 10 en 10. Se observa la relación «mayor que»: $a > b$, si b está en una de las filas anteriores a a y en una de las columnas anteriores a a. Tiene la forma de una matriz. (Maiyelines)
>
> Éstos son números naturales que van aumentando progresivamente de uno en uno hasta completar una cantidad de 10 números por fila y 10 números por columna, empezando con el número 1 y terminando la fila 10 con el número 100. La tabla me llama la atención por su sencillez y me invita a pensar en todo lo que se puede hacer con los números que constituyen la centena cuadriculada y qué aspectos matemáticos se pueden resaltar en ella. Nos permite conocer algo más allá de los números naturales y de las operaciones básicas que ellos nos permiten efectuar; por ejemplo, entrelazarlos de diferentes maneras, construyendo figuras geométricas conocidas entre ellos. Tomando debidamente los puntos que indican sus vértices y la unión de éstos para formar los lados de dicha figura. También nos permite analizar conceptos o aspectos matemáticos que se visualizan con facilidad. (María)
>
> Números naturales desde el 1 hasta el 100. Matriz, 10×10, 10 filas y 10 columnas. Figuras geométricas notables (triángulo, cuadrado, rectángulo). Diagonales, coordenadas. Progresiones aritméticas. Grupos y Subgrupos. Números Naturales y Números Enteros Positivos. Sistemas de Coordenadas. Conjuntos, índices. Relaciones de Orden. (Efraín)

Las observaciones anteriores se mantienen en los aspectos relacionados con la forma de la centena, su contenido, el ámbito al que se refieren los números. Hay manifestaciones relacionales explícitas, como por ejemplo, la noción de orden, sin embargo, no se aprecia aún la percepción de la estructura profunda de la centena cuadriculada, es decir, del modelo matemático subyacente, sobre el cual se soportan relaciones de mayor contenido matemático existentes entre los números ubicados en las celdillas que componen la centena cuadriculada. Para ello fue necesario conducirlos hacia la búsqueda de una relación entre el valor del elemento dentro de cada celdilla y la posición de ésta en el contexto de la centena cuadriculada, visualizándola como una *matriz de orden* 10×10.

Recurrimos entonces a la notación matricial, y con ello comenzamos a recorrer el tránsito de lo aritmético hacia lo algebraico, puesto que ya necesitaríamos apelar a notaciones simbólicas para expresar relaciones más generales. La representación matricialmente de la Centena Cuadriculada se muestra en la figura 3.

La tarea, ahora, consistió en pedir a los estudiantes que trataran de establecer alguna relación entre el número incluido en una celdilla cualquiera y la posición de ésta dentro de la centena cuadriculada. Se hicieron varias veri-

$a_{1\,1}$	$a_{1\,2}$	$a_{1\,3}$	$a_{1\,4}$	$a_{1\,5}$	$a_{1\,6}$	$a_{1\,7}$	$a_{1\,8}$	$a_{1\,9}$	$a_{1\,10}$
$a_{2\,1}$	$a_{2\,2}$	$a_{2\,3}$	$a_{2\,4}$	$a_{2\,5}$	$a_{2\,6}$	$a_{2\,7}$	$a_{2\,8}$	$a_{2\,9}$	$a_{2\,10}$
$a_{3\,1}$	$a_{3\,2}$	$a_{3\,3}$	$a_{3\,4}$	$a_{3\,5}$	$a_{3\,6}$	$a_{3\,7}$	$a_{3\,8}$	$a_{3\,9}$	$a_{3\,10}$
$a_{4\,1}$	$a_{4\,2}$	$a_{4\,3}$	$a_{4\,4}$	$a_{4\,5}$	$a_{4\,6}$	$a_{4\,7}$	$a_{4\,8}$	$a_{4\,9}$	$a_{4\,10}$
$a_{5\,1}$	$a_{5\,2}$	$a_{5\,3}$	$a_{5\,4}$	$a_{5\,5}$	$a_{5\,6}$	$a_{5\,7}$	$a_{5\,8}$	$a_{5\,9}$	$a_{5\,10}$
$a_{6\,1}$	$a_{6\,2}$	$a_{6\,3}$	$a_{6\,4}$	$a_{6\,5}$	$a_{6\,6}$	$a_{6\,7}$	$a_{6\,8}$	$a_{6\,9}$	$a_{6\,10}$
$a_{7\,1}$	$a_{7\,2}$	$a_{7\,3}$	$a_{7\,4}$	$a_{7\,5}$	$a_{7\,6}$	$a_{7\,7}$	$a_{7\,8}$	$a_{7\,9}$	$a_{7\,10}$
$a_{8\,1}$	$a_{8\,2}$	$a_{8\,3}$	$a_{8\,4}$	$a_{8\,5}$	$a_{8\,6}$	$a_{8\,7}$	$a_{8\,8}$	$a_{8\,9}$	$a_{8\,10}$
$a_{9\,1}$	$a_{9\,2}$	$a_{9\,3}$	$a_{9\,4}$	$a_{9\,5}$	$a_{9\,6}$	$a_{9\,7}$	$a_{9\,8}$	$a_{9\,9}$	$a_{9\,10}$
$a_{10\,1}$	$a_{10\,2}$	$a_{10\,3}$	$a_{10\,4}$	$a_{10\,5}$	$a_{10\,6}$	$a_{10\,7}$	$a_{10\,8}$	$a_{10\,9}$	$a_{10\,10}$

Figura 3. Expresión matricial de la centena cuadriculada

ficaciones, se formularon y probaron algunas conjeturas y, al final se obtuvo que

$$a_{ij} = (i - 1)10 + j, \quad \forall\, i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Esta notación permitió avanzar más hacia el campo algebraico.

La figura 4 recoge patrones cuadrados con los vértices en una celdilla de la centena cuadriculada. Ahora la tarea consistía en averiguar si existía o no alguna relación que vinculara a los «vértices» con el «centro» del «cuadrado». Luego de varias verificaciones se formuló la siguiente conjetura:

La relación consiste en que, dado un cuadrado de cuatro puntos, si sumamos sus cuatro vértices y la suma se divide por el centro, el resultado es cuatro, una constante.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 4. Cuadrados con cuatro puntos con centro

La conjetura anterior fue verificada con cada uno de los «cuadrados de cuatro puntos» indicados en la figura 4 y con otros señalados por los estudiantes; todo ello permitió reformular la conjetura y darle forma al siguiente «teorema»:

Teorema 1

Dada una centena cuadriculada de tipo 1, se tiene que para todo «cuadrado de cuatro puntos» se cumple que el promedio de sus «vértices» es igual a su «centro».

Para poder demostrar esto, resultó necesaria una generalización aún mayor que la anterior; fue así como se presentó la centena cuadriculada de tipo 1 en la forma como se muestra en la figura 5

Con este dispositivo, ya se podía demostrar el Teorema 1.

Para ello fue conveniente plantear una situación genérica, tal como se muestra en la figura 6.

$a_{1\,1}$	$a_{1\,2}$	$a_{1\,3}$	…	$a_{1\,(j-1)}$	$a_{1\,j}$	$a_{1\,(j+1)}$	…	$a_{1\,8}$	$a_{1\,9}$	$a_{1\,10}$
$a_{2\,1}$	$a_{2\,2}$	$a_{2\,3}$	…	$a_{2\,(j-1)}$	$a_{2\,j}$	$a_{2\,(j+1)}$	…	$a_{2\,8}$	$a_{2\,9}$	$a_{2\,10}$
$a_{3\,1}$	$a_{3\,2}$	$a_{3\,3}$	…	$a_{3\,(j-1)}$	$a_{3\,j}$	$a_{3\,(j+1)}$	…	$a_{3\,8}$	$a_{3\,9}$	$a_{3\,10}$
$a_{4\,1}$	$a_{4\,2}$	$a_{4\,3}$	…	$a_{4\,(j-1)}$	$a_{4\,j}$	$a_{4\,(j+1)}$	…	$a_{4\,8}$	$a_{4\,9}$	$a_{4\,10}$
$a_{5\,1}$	$a_{5\,2}$	$a_{5\,3}$	…	$a_{5\,(j-1)}$	$a_{5\,j}$	$a_{5\,(j+1)}$	…	$a_{5\,8}$	$a_{5\,9}$	$a_{5\,10}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$a_{(i-1)\,1}$	$a_{(i-1)\,2}$	$a_{(i-1)\,3}$	…	$a_{(i-1)\,(j-1)}$	$a_{(i-1)\,j}$	$a_{(i-1)\,(j+1)}$	…	$a_{(i-1)\,8}$	$a_{(i-1)\,9}$	$a_{(i-1)\,10}$
$a_{i\,1}$	$a_{i\,2}$	$a_{i\,3}$	…	$a_{i\,(j-1)}$	$a_{i\,j}$	$a_{i\,(j+1)}$	…	$a_{i\,8}$	$a_{i\,9}$	$a_{i\,10}$
$a_{(i+1)\,1}$	$a_{(i+1)\,2}$	$a_{(i+1)\,3}$	…	$a_{(i+1)\,(j-1)}$	$a_{(i+1)\,j}$	$a_{(i+1)\,(j+1)}$	…	$a_{(i+1)\,8}$	$a_{(i+1)\,9}$	$a_{(i+1)\,10}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
$a_{8\,1}$	$a_{8\,2}$	$a_{8\,3}$	…	$a_{8\,(j-1)}$	$a_{8\,j}$	$a_{8\,(j+1)}$	…	$a_{8\,8}$	$a_{8\,9}$	$a_{8\,10}$
$a_{9\,1}$	$a_{9\,2}$	$a_{9\,3}$	…	$a_{9\,(j-1)}$	$a_{9\,j}$	$a_{9\,(j+1)}$	…	$a_{9\,8}$	$a_{9\,9}$	$a_{9\,10}$
$a_{10\,1}$	$a_{10\,2}$	$a_{10\,3}$	…	$a_{10\,(j-1)}$	$a_{10\,i}$	$a_{10\,(i+1)}$	…	$a_{10\,8}$	$a_{10\,9}$	$a_{10\,10}$

Figura 5. Generalización de la centena cuadriculada de tipo 1

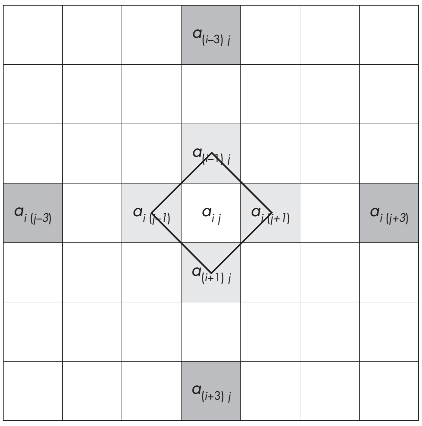

Figura 6. Representación genérica de un cuadrado de cuatro puntos con su respectivo centro

Lo que se desea es demostrar que el promedio de los vértices coincide con el centro, es decir:

$$\frac{a_{i(j-1)} + a_{(i-1)j} + a_{i(j+1)} + a_{(i+1)j}}{4} = a_{ij}$$

Efectivamente, dado que

$$a_{ij} = (i-1)10 + j, \ \forall \ i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

se tiene entonces que:

$$\frac{a_{i(j-1)} + a_{(i-1)j} + a_{i(j+1)} + a_{(i+1)j}}{4} =$$

$$= \frac{[(i-1)10 + (j-1)] + [(i-2)10 + j] + [(i-1)10 + (j+1)] + [10i + j]}{4} =$$

$$= \frac{40i - 40 + 4j}{4} = \frac{4[(i-1)10 + j]}{4} = a_{ij}$$

Nótese que no ha sido necesario recurrir a la centena cuadriculada (terreno aritmético) sino que se ha trabajado con las notaciones y relaciones algebraicas que poco a poco se han ido introduciendo. A partir de aquí los estudiantes fueron invitados a que exploraran la centena cuadriculada y formularan conjeturas en la búsqueda de nuevas relaciones algebraicas existentes entre sus elementos. Fue así como Maiyelines formuló las siguientes tres conjeturas:

Conjetura 1

Sean a y b números naturales cualesquiera, entre 1 y 50; se tiene entonces que $(a + b)$ siempre pertenece a la cuadrícula.

Conjetura 2

Sean a y b dos números de la cuadrícula; se tiene entonces que $(a - b) = 10$ si y sólo si a y b pertenecen a la misma columna y b pertenece a la fila i, mientras que a pertenece a la fila $(i - 1)$; es decir: si $a \in a_{(i-1)j}$ y $b \in b_{ij}$, entonces $(a - b) = 10$.

Conjetura 3

La suma de los elementos de cualquiera de las filas es un múltiplo de 5, es decir:

$$\sum_{j=1}^{10} a_{ij} = 5n, \ n \in \mathbb{N}$$

El paso siguiente consistía en verificar estas conjeturas y tratar de demostrarlas genéricamente; así se hizo, al menos en el caso de la conjetura 3:

Sea F el conjunto de todas las filas de la centena cuadriculada: $F = \{f_i / 1 \le i \le 10\}$.

Sea $f_i = \{a_{ij} / 1 \le j \le 10\}$; $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Entonces

$$\sum_{j=1}^{10} a_{ij} = 5n, \ \text{donde } n \in \mathbb{Z}$$

En efecto:

$$\sum_{j=1}^{10} a_{ij} = \sum_{j=1}^{10} [(i-1)10 + j] = \sum_{j=1}^{10} [(i-1)10] + \sum_{j=1}^{10} j =$$

$$= 10i - 10 + 55 = 10i + 45 = 5(2i + 9)$$

Sabemos que $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, entonces $i \in \mathbb{Z}$, $2 \in \mathbb{Z}$ y $9 \in \mathbb{Z}$; por tanto, $5(2i + 9) \in \mathbb{Z}$.

Además de Maiyelines, otros alumnos también se animaron a buscar sus propios teoremas; fue así como Eneida formuló el siguiente

Teorema de Eneida

Dada una centena cuadriculada; si se considera un triángulo isósceles cuyos vértices sean a_{ij}, $a_{(i+3)(j+3)}$, $a_{(i+3)(j-3)}$; entonces el centro del triángulo (figura 7) viene dado por la trisección de la suma de sus vértices, es decir, el centro del triángulo es $a_{(i+2)j}$.

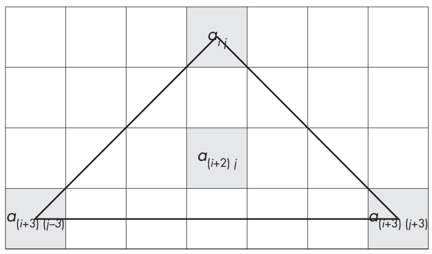

Figura 7. Triángulo isósceles

Demostración

Considérese un triángulo isósceles cuyos vértices sean a_{ij}, $a_{(i+3)(j+3)}$, $a_{(i+3)(j-3)}$; donde $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

En este caso se cumple que:

$$a_{ij} + a_{(i+3)(j+3)} + a_{(i+3)(j-3)} =$$
$$= [(i-1)10 + j] + [(i+2)10 + (j-3)] + [(i+2)10 + (j+3)] =$$
$$= [(i-1) + 2(i+2)]10 + [j + (j-3) + (j+3)] =$$
$$= (3i+3)10 + 3j = (i+1)3 \cdot 10 + 3j$$

Por lo tanto:

$$\frac{a_{ij} + a_{(i+3)(j-3)} + a_{(i+3)(j+3)}}{3} = \frac{(i+1)\cdot 3 \cdot 10 + 3j}{3} =$$
$$= (i+1)10 + j = [(i+2) - 1]10 + j = a_{(i+2)j}$$

Eneida, después de haber demostrado «su teorema» se planteó otros interrogantes:

¿Qué ocurrirá cuando, en vez de un triángulo isósceles con las características dadas, tengamos un isorrectángulo (triángulo rectángulo isósceles)? ¿Será acaso que todo se genera de la descomposición poligonal de los rombos que encontramos dentro de la centena cuadriculada?

Veamos el siguiente ejemplo (figura 8).

El centro del rombo es 36. Además, el rombo lo podemos descomponer en triángulos isósceles, siendo uno de ellos el de vértices 6, 33 y 39, y con el teorema de Eneida, podemos calcular su centro que es 26. Del mismo modo se puede descomponer el rombo en triángulos isorrectángulos. Si, por ejemplo, tomamos el de vértices 6, 33 y 36, al sumar los números de sus vértices y dividir por tres, se obtiene 25. Si tomamos el triángulo de vértices 6, 36 y 39, los sumamos, y dividimos por tres, se obtiene 27. Y así se repite en el resto de los casos para obtener los centros 45 y 47.

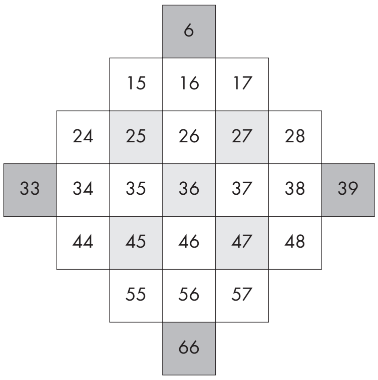

Figura 8. Rombo

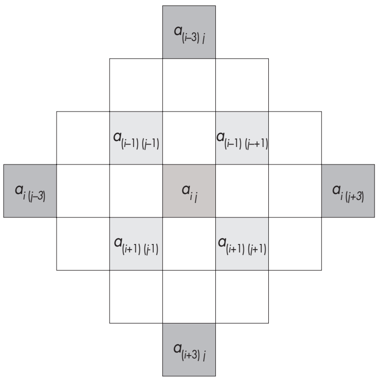

Figura 9. Rombo en forma matricial

Nótese que los cuatro centros de los triángulos isorrectángulos forman un cuadrado, cuyo promedio de vértices es 36; es decir, el centro del rombo que tomamos inicialmente.

Veamos ahora la *conjetura formulada por María:*

En todo cuadrado de «lado» dos, de «vértices contiguos», la suma de los vértices sobre la diagonal principal es igual a la suma de los vértices sobre la diagonal secundaria.

Demostración

En la figura 10 se puede apreciar que:

$$a_{(i-1)(j-1)} + a_{ij} =$$
$$= [(i-2)10 + (j-1)] + [(i-1)10 + j] =$$
$$= [(i-2)10 + j] + [(i-1)10 + (j-1)] =$$
$$= a_{(i-1)j} + a_{i(j-1)}$$

La producción algebraica de los alumnos fue abundante. Para lograrlo se les pidió que trabajaran en forma independiente fuera de clase, y que procuraran encontrar otras relaciones diferentes a las estudiadas en clase y distintas de las de sus compañeros. Así fue como trabajaron Efraín, Roselyn y José. A continua-

La producción algebraica de los alumnos fue abundante. Para lograrlo se les pidió que trabajaran en forma independiente fuera de clase, y que procuraran encontrar otras relaciones diferentes a las estudiadas en clase y distintas de las de sus compañeros.

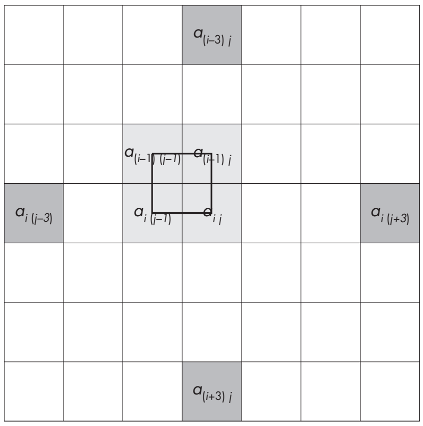

Figura 10. Cuadrado de lado dos

ción mostramos el resultado del trabajo de estos tres estudiantes.

Efraín demostró tener una imaginación matemática importante, de hecho él forma parte del equipo universitario de ajedrez y en algunos campeonatos ha sido «primer tablero». Sus apreciaciones iniciales al pedírsele que observara la centena cuadriculada fueron las siguientes:

> Números naturales desde el 1 hasta el 100. Matriz, 10×10, 10 filas y 10 columnas. Figuras geométricas notables (triángulo, cuadrado, rectángulo). Diagonales, coordenadas. Progresiones aritméticas. Grupos y subgrupos. Números naturales y números enteros positivos. Sistemas de coordenadas. Conjuntos, índices. Relaciones de orden.

Nótese que mencionó algunos aspectos no evidentes sino que formaban parte de la estructura profunda de la centena, es decir, de su modelo matemático subyacente. Esto hacía esperar conjeturas de naturaleza mucho más compleja que las anteriores. En efecto, la *primera conjetura que Efraín* formula establece que:

Los elementos situados en las diagonales ascendentes de una centena cuadriculada de tipo 1, constituyen los términos de una progresión aritmética de razón –9.

Nótese la introducción del concepto de *diagonal ascendent*e; dos ejemplos de ella se muestran en la figura 11.

Demostración de la conjetura 1 de Efraín

Sean a y b dos elementos consecutivos cualesquiera de una Centena Cuadricualada situados en una de las diagonales ascendentes. Queremos demostrar que su diferencia $(b - a)$ es una constante (en este caso, –9). Si a y b son dos elementos cualesquiera de una centena cuadriculada de tipo 1 situados consecutivamente en una de las diagonales ascendentes; entonces podemos suponer, sin pérdida alguna de generalidad, que: $a = a_{ij}$ y $b = a_{(i-1)(j+1)}$

Por lo tanto:

$$(b - a) = [(i - 1 - 1)10 + (j + 1)] - [(i - 1)10 + j\,] = -9$$

Además de lo anterior, Efraín introduce la noción de «triángulo isorrectángulo», ejemplificada en la figura 12.

A partir de aquí, Efraín formula su *segunda conjetura*:

El promedio de los vértices de un «triángulo isorrectángulo», en una Centena Cuadriculada de Tipo 1, es igual a su centro.

Demostración

Si a_{ij} es el «centro» de un «triángulo isorrectángulo» en una Centena Cuadriculada de Tipo; entonces, sus «vértices» serán: $a_{(i-1)(j-2)}$, $a_{(i-1)(j+1)}$, $a_{(i+2)(j+1)}$; por lo tanto:

$$\frac{[(i-1-1)10+(j-2)]+[(i-1-1)10+(j+1)]+[(i+2-1)10+(j+1)]}{3} =$$

$$= \frac{10i-20+j-2+10i-20+j+1+10i+20-10+j+1}{3} =$$

$$= \frac{30i-30+3j}{3} = \frac{3[(i-1)10+j]}{3} = (i-1)10+j = a_{ij}$$

A estas alturas, Efraín se atreve a formular el siguiente ejercicio: Replicar la demostración anterior para el «trián-

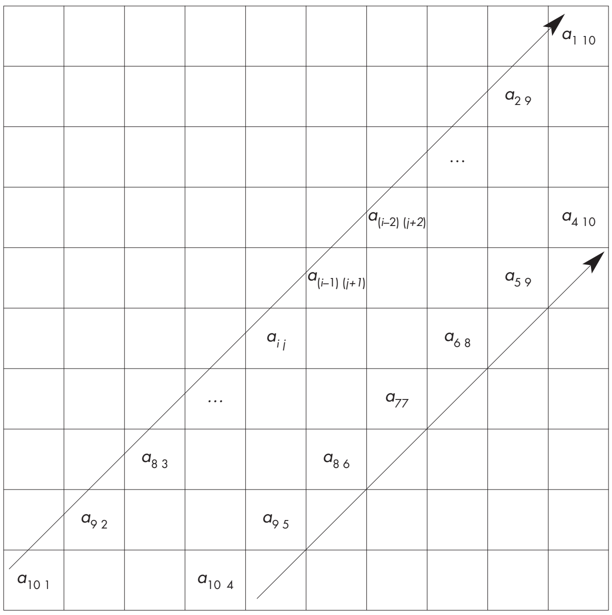

Figura 11. Dos ejemplos de diagonal ascendente

$a_{1\,1}$	$a_{1\,2}$	$a_{1\,3}$	$a_{1\,4}$	$a_{1\,5}$	$a_{1\,6}$	$a_{1\,7}$	$a_{1\,8}$	$a_{1\,9}$	$a_{1\,10}$
$a_{2\,1}$	$a_{2\,2}$	$a_{2\,3}$	$a_{2\,4}$	$a_{2\,5}$	$a_{2\,6}$	$a_{2\,7}$	$a_{2\,8}$	$a_{2\,9}$	$a_{2\,10}$
$a_{3\,1}$	$a_{3\,2}$	$a_{3\,3}$	$a_{3\,4}$	$a_{3\,5}$	$a_{3\,6}$	$a_{3\,7}$	$a_{3\,8}$	$a_{3\,9}$	$a_{3\,10}$
$a_{4\,1}$	$a_{4\,2}$	$a_{4\,3}$	$a_{4\,4}$	$a_{4\,5}$	$a_{4\,6}$	$a_{4\,7}$	$a_{4\,8}$	$a_{4\,9}$	$a_{4\,10}$
$a_{5\,1}$	$a_{5\,2}$	$a_{5\,3}$	$a_{5\,4}$	$a_{5\,5}$	$a_{5\,6}$	$a_{5\,7}$	$a_{5\,8}$	$a_{5\,9}$	$a_{5\,10}$
$a_{6\,1}$	$a_{6\,2}$	$a_{6\,3}$	$a_{6\,4}$	$a_{6\,5}$	$a_{6\,6}$	$a_{6\,7}$	$a_{6\,8}$	$a_{6\,9}$	$a_{6\,10}$
$a_{7\,1}$	$a_{7\,2}$	$a_{7\,3}$	$a_{7\,4}$	$a_{7\,5}$	$a_{7\,6}$	$a_{7\,7}$	$a_{7\,8}$	$a_{7\,9}$	$a_{7\,10}$
$a_{8\,1}$	$a_{8\,2}$	$a_{8\,3}$	$a_{8\,4}$	$a_{8\,5}$	$a_{8\,6}$	$a_{8\,7}$	$a_{8\,8}$	$a_{8\,9}$	$a_{8\,10}$
$a_{9\,1}$	$a_{9\,2}$	$a_{9\,3}$	$a_{9\,4}$	$a_{9\,5}$	$a_{9\,6}$	$a_{9\,7}$	$a_{9\,8}$	$a_{9\,9}$	$a_{9\,10}$
$a_{10\,1}$	$a_{10\,2}$	$a_{10\,3}$	$a_{10\,4}$	$a_{10\,5}$	$a_{10\,6}$	$a_{10\,7}$	$a_{10\,8}$	$a_{10\,9}$	$a_{10\,10}$

Figura 12. Dos ejemplos de «triángulos isorrectángulos», con sus respectivos «centros»

gulo Isorrectángulo» cuyo «centro» sea $a_{(i+2)(j+1)}$, llegando, incluso a introducir algunas definiciones como las de «cuadrado principal», «cuadrado encajado» y «cuadrado encajado degenerado». Seguidamente se presentan dichas definiciones:

- En una centena cuadriculada de tipo 1, se dedomina *cuadrado principal* a todo «cuadrado» de lado n, con $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- En una centena cuadriculada de tipo 1, se dedomina *cuadrado encajado* dentro de un cuadrado principal de lado n» a todo «cuadrado» de lado $m = (n - 2)$; por tanto, se tiene que m, el lado de un cuadrado encajado de lado n, es tal que $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- Se denomina *cuadrado encajado degenerado* a un cuadrado encajado de lado 1, es decir, aquel que está constituido por un único punto.

En la figura 13, se muestran ejemplos de cuadrado principal» y «cuadrado encajado.

$a_{1\,1}$	$a_{1\,2}$	$a_{1\,3}$	$a_{1\,4}$	$a_{1\,5}$	$a_{1\,6}$	$a_{1\,7}$	$a_{1\,8}$	$a_{1\,9}$	$a_{1\,10}$
$a_{2\,1}$	$a_{2\,2}$	$a_{2\,3}$	$a_{2\,4}$	$a_{2\,5}$	$a_{2\,6}$	$a_{2\,7}$	$a_{2\,8}$	$a_{2\,9}$	$a_{2\,10}$
$a_{3\,1}$	$a_{3\,2}$	$a_{3\,3}$	$a_{3\,4}$	$a_{3\,5}$	$a_{3\,6}$	$a_{3\,7}$	$a_{3\,8}$	$a_{3\,9}$	$a_{3\,10}$
$a_{4\,1}$	$a_{4\,2}$	$a_{4\,3}$	$a_{4\,4}$	$a_{4\,5}$	$a_{4\,6}$	$a_{4\,7}$	$a_{4\,8}$	$a_{4\,9}$	$a_{4\,10}$
$a_{5\,1}$	$a_{5\,2}$	$a_{5\,3}$	$a_{5\,4}$	$a_{5\,5}$	$a_{5\,6}$	$a_{5\,7}$	$a_{5\,8}$	$a_{5\,9}$	$a_{5\,10}$
$a_{6\,1}$	$a_{6\,2}$	$a_{6\,3}$	$a_{6\,4}$	$a_{6\,5}$	$a_{6\,6}$	$a_{6\,7}$	$a_{6\,8}$	$a_{6\,9}$	$a_{6\,10}$
$a_{7\,1}$	$a_{7\,2}$	$a_{7\,3}$	$a_{7\,4}$	$a_{7\,5}$	$a_{7\,6}$	$a_{7\,7}$	$a_{7\,8}$	$a_{7\,9}$	$a_{7\,10}$
$a_{8\,1}$	$a_{8\,2}$	$a_{8\,3}$	$a_{8\,4}$	$a_{8\,5}$	$a_{8\,6}$	$a_{8\,7}$	$a_{8\,8}$	$a_{8\,9}$	$a_{8\,10}$
$a_{9\,1}$	$a_{9\,2}$	$a_{9\,3}$	$a_{9\,4}$	$a_{9\,5}$	$a_{9\,6}$	$a_{9\,7}$	$a_{9\,8}$	$a_{9\,9}$	$a_{9\,10}$
$a_{10\,1}$	$a_{10\,2}$	$a_{10\,3}$	$a_{10\,4}$	$a_{10\,5}$	$a_{10\,6}$	$a_{10\,7}$	$a_{10\,8}$	$a_{10\,9}$	$a_{10\,10}$

Figura 13. Dos ejemplos de cuadrado principal de lado $n = 4$, con sus respectivos cuadrados encajados de lado $(n - 2) = 2$

En relación con estas definiciones, Efraín formula el siguiente teorema:

Teorema de Efraín

En una centena cuadriculada de tipo 1, la semisuma de los «vértices» de un cuadrado principal de lado $n = 4$, es igual a la suma de los elementos de la diagonal principal de su cuadrado encajado.

$a_{(i-2)\,(j-1)}$			$a_{(i-2)\,(j+2)}$
	$a_{(i-1)\,j}$	$a_{(i-1)\,(j+1)}$	
	$a_{i\,j}$	$a_{i\,(j+1)}$	
$a_{(i+1)\,(j-1)}$			$a_{(i+1)\,(j+2)}$

Figura 14

Demostración

Consideremos la situación de la figura 14; sin pérdida alguna de generalidad, podemos afirmar que:

$$\frac{[(i+1-1)10+(j-1)]+[(i+1-1)10+(j+2)]}{2}+$$

$$+\frac{[(i-2-1)10+(j+2)]+[(i-2-1)10+(j-1)]}{2}=$$

$$=\frac{10i+j-1+10i+j+2+10i-30+j+2+10i-30+j-1}{2}=$$

$$=\frac{40i-60+4j+2}{2}=20i-30+2j+1=$$

$$=[(i-1)10+j]+[(i-1-1)10+(j+1)]=a_{ij}+a_{(i-1)(j+1)}$$

Veamos seguidamente los *aportes de Roselyn*. Las apreciaciones iniciales de ésta fueron las siguientes:

> En las cuadrículas se encuentran los números naturales desde el 1 hasta el 100. Los elementos ubicados en las cuadrículas que conforman la diagonal principal (en orden descendente) van de once en once. Los elementos ubicados en las cuadrículas que conforman la primera columna van de diez en diez. Los elementos ubicados en las cuadrículas que conforman la diagonal secundaria (en orden descendente) van de nueve en nueve. La centena cuadriculada puede dividirse en cuatro cuadrados congruentes. La centena cuadriculada puede dividirse en dos triángulos congruentes. La suma de dos números naturales cualesquiera pertenecientes a {1, 2, 3, ..., 48, 49, 50} pertenece a la Centena Cuadriculada. La diferencia entre el elemento que pertenece a una cuadrícula y el que pertenece a la cuadrícula inmediatamente superior (es decir, está en la misma columna pero en la fila anterior) es diez. La suma de los elementos que pertenecen a las cuadrículas que constituyen una fila es múltiplo de cinco.

Nótese la varieda y riqueza de observaciones, algunas apreciables a simple vista y otras de carácter relacional (algebraicas).

Nótese la varieda y riqueza de observaciones, algunas apreciables a simple vista y otras de carácter relacional (algebraicas).

Roselyn también formuló conjeturas; una de ellas fue la siguiente:

La diferencia entre la suma de los elementos que constituyen dos filas consecutivas es cien; es decir:

$$\sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{j=1}^{10} a_{(i-1)j} = 100,$$

$$i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \ i \neq 1$$

Apréciese que $a_{ij} = a_{(i-1)j} + 10$, $\forall\, i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Demostración

Consideremos la situación de la figura 15. Lo que queremos demostrar es:

$$\sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{j=1}^{10} a_{(i-1)j} = 100,$$

$$i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \ i \neq 1$$

En efecto:

$$\sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{j=1}^{10} a_{(i-1)j} = \sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{j=1}^{10} (a_{ij} - 10) =$$

$$= \left[\sum_{j=1}^{10} a_{ij} - \sum_{j=1}^{10} a_{ij}\right] - \sum_{j=1}^{10} (-10) = \sum_{j=1}^{10} 10 = 10 \cdot 10 = 100$$

$a_{(i-1)\,1}$	$a_{(i-1)\,2}$	$a_{(i-1)\,3}$	…	$a_{(i-1)\,(j-1)}$	$a_{(i-1)\,j}$	$a_{(i-1)\,(j+1)}$	…	$a_{(i-1)\,8}$	$a_{(i-1)\,9}$	$a_{(i-1)\,10}$
$a_{i\,1}$	$a_{i\,2}$	$a_{i\,3}$	…	$a_{i\,(j-1)}$	$a_{i\,j}$	$a_{i\,(j+1)}$	…	$a_{i\,8}$	$a_{i\,9}$	$a_{i\,10}$
$a_{(i+1)\,1}$	$a_{(i+1)\,2}$	$a_{(i+1)\,3}$	…	$a_{(i+1)\,(j-1)}$	$a_{(i+1)\,j}$	$a_{(i+1)\,(j+1)}$	…	$a_{(i+1)\,8}$	$a_{(i+1)\,9}$	$a_{(i+1)\,10}$

Figura 15

Finalmente, veamos la *producción de José*, quien introdujo la noción de cuadrado simétrico con respecto a los lados de la centena cuadriculada de tipo 1; ejemplos de Cuadrados Simétricos se aprecian en la figura 16; con base en esta noción, José formula el siguiente teorema:

Teorema de José

La suma de los vértices de todo «Cuadrado Simétrico con respecto a los lados de la Centena Cuadriculada de tipo 1» es constantemente igual a 202.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 16. Se observan tres cuadrados de vértices simétricos con respecto a los lados de la centena cuadriculada

Demostración

En todo «cuadrado simétrico con respecto a los lados de la Centena cuadriculada de tipo 1», sus vértices vienen dados por a_{ii}, $a_{i(11-i)}$, $a_{(11-i)i}$, $a_{(11-i)(11-i)}$.

Por lo tanto se cumple que:

$$a_{ii},\ a_{i(11-i)},\ a_{(11-i)i},\ a_{(11-i)(11-i)}$$
$$= [(i-1)10 + i] + [(i-1)10 + (11-i)] + [(10-i)10 + i] +$$
$$+ [(10-i)10 + (11-i)] = 10i - 10 + i + 10i$$
$$—10 + 11 - i + 100 - 10i + i + 100 - 10i + 11 - i =$$
$$= (10 + 1 + 10 - 1 - 10 + 1 - 10 - 1) +$$
$$+ (-10 - 10 + 11 + 100 + 100 + 11) = 202.$$

Conclusiones

Con esta experiencia hemos pretendido poner de manifiesto que la Centena Cuadriculada es un «material matemáticamente potente». Su uso adecuado por parte del docente en el aula puede provocar en los estudiantes gratificantes hallazgos y hacer que ellos tengan comportamientos propios del quehacer matemático, como son: apreciar regularidades, identificar patrones, formular conjeturas, verificarlas, enunciar teoremas y demostrarlos. Existen diversas líneas de trabajo abiertas centradas en la Centena Cuadrículada, algunas de las cuales se refieren a las posibilidades de este material para realizar representaciones geométricas para conceptos aritméticos, y otras ponen énfasis en el paso de la aritmética al álgebra.

Hemos constatado, después de diversas experiencias tanto en Maracay (Venezuela) como en Granada (España), que este tipo de trabajo con estudiantes para profesor favorece una actitud más positiva hacia la Matemática y su enseñanza.

Referencias bibliográficas

COCKROFT, W. (1985): *Las Matemáticas sí cuentan. Informe Cockroft*, MEC, Madrid.

DEVLIN, K. (1994): *Mathematics: The Science of Patterns*, Scientific American Library, Nueva York.

GONZÁLEZ, J.L. (1995): *El Campo Conceptual de los Números Naturales Relativos*, Tesis doctoral, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada.

HOWDEN, H. (1989): «Teaching Number Sense», *Arithmetic Teacher,* v. 36, n.° 6, 6-11.

LITWILLER, B.H. y D.R. DUNCAN (1980): *Activities for the maintenance of computational skills and the discovery of patterns*, NCTM, Reston, Virginia.

LITWILLER, B.H. y D.R. DUNCAN (1986): «The extended subtraction table: a search for number patterns», *Arithmetic Teacher*, v. 33 n.° 9, pp. 28-31.

NCTM (1991): *Estándares curriculares y de evaluación para la Educación Matemática*, Addenda Series, Nivel Inicial, SAEM Thales, Sevilla.

RICO, L., E. CASTRO, E. CASTRO, M. CORIAT e I. SEGOVIA (1997): «Investigación, Diseño y Desarrollo Curricular», en L. RICO (ed.): *Bases Teóricas del Curriculum de Matemáticas en Educación Secundaria*, Síntesis, Madrid.

RUIZ, F. (2000): *La Tabla-100. Representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación*, Tesis doctoral, Departmento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, Granada.

STEWART, I. (1995): *Nature's Numbers. Discovering order and pattern in the Universe*, Weidenfeld and Nicholson, Londres.

WIRTZ, R. (1974): *Matahematics for Everyone*, Curriculum Development Associates, Washington.

ZIMMERMANN, W. y S. CUNNINGHAM (1991): «Visualization and the nature of Mathematics», en W. ZIMMERMENN y S. CUNNINGHAM (eds.): *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, Mathematical Association of America. Washington.

Anexo. Centenas Cuadriculadas de tipos diferentes a la de Tipo 1

Centena cuadriculada (tipo 2) (figura 17)

1. Sume los números en cada una de las cuatro primeras filas.
2. ¿Existe algún patrón en estas sumas? ¿Por qué ocurrirá?
3. Adivine y verifique las sumas correspondientes a las siguientes seis filas.
4. Repita los pasos 1, 2 y 3, pero trabajando por columnas.
5. Adivine y verifique los grandes totales de las sumas y las columnas.
6. ¿Por qué los grandes totales están relacionados en esa forma?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 17

Centena cuadriculada (tipo 3) (figura 18)

Antes de trabajar con la siguiente Centena, encuentre los siguientes tres términos de cada una de las siguientes secuencias numéricas. Hay más de una respuesta posible.

1. 1 20 21 40 41 __ __ __
2. 1 19 23 37 45 55 __ __ __
3. 10 12 28 34 __ __ __
4. Explore la centena dada.

5. ¿En qué difiere esta centena de la centena tipo 2.
6. Adivine y verifique las sumas de las primeras tres columnas.
7. ¿Por qué son iguales las sumas de las columnas en esta centena cuadriculada?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
80	79	78	77	76	75	74	73	72	71
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
100	99	98	97	96	95	94	93	92	91

Figura 18

Centena cuadriculada (tipo 4) (figura 17)

1. Dibuje un cuadrado de cuatro puntos alrededor de 34. ¿Cuál es la media de los cuatro números en este cuadrado?
2. Experimente dibujando otros cuadrados de cuatro puntos y promedie los cuatro números en cada figura.
3. Dibuje un cuadrado de cuatro puntos cuyos números vértices sumen 296. ¿Cuál es el número que queda en el centro de este cuadrado?
4. Se denomina *suma del cuadrado* a la suma de los números vértices del cuadrado. ¿Pueden tener la misma suma dos cuadrados de cuatro puntos que sean distintos?
5. ¿Es posible dibujar cuadrados de cuatro puntos cuya suma sea 175 o 255?
6. Formule dos conjeturas acerca de los cuadrados de cuatro puntos y pruébelas.

Centena cuadriculada (tipo 5) (figura 19)

1. Use la variación de la Centena Cuadriculada que se muestra a continuación para hallar el resultado de las siguientes operaciones sin efectuar la adición

   1 + 2

   1 + 2 + 3

   ...

   1 + 2 + 3 + . . . + 8 + 9 + 10

   1 + 2 + 3 + . . . + 8 + 9 + 10 + 9

   1 + 2 + 3 + . . . + 8 + 9 + 10 + 9 + 8

   ...

   1 + 2 + 3 + . . . + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + . . . + 2 + 1
2. Explore esta Centena Cuadriculada. Comparta sus descubrimientos con los compañeros (Sugerencia: Estudie los patrones en las sumas de las filas y las columnas).

1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
2	5	9	14	20	27	35	44	54	64
4	8	13	19	26	34	43	53	63	72
7	12	18	25	33	42	52	62	71	79
11	17	24	32	41	51	61	70	78	85
16	23	31	40	50	60	69	77	84	90
22	30	39	49	59	68	76	83	89	94
29	38	48	58	67	75	82	88	93	97
37	47	57	66	74	81	87	92	96	99
46	56	65	73	80	86	91	95	98	100

Figura 19

Fredy E. González
Universidad Pedagógica
Experimental Libertador.
Instituto Pedagógico
«Rafael Alberto Escobar Lara»
Maracay (Venezuela)
Francisco Ruiz
Departamento de Didáctica
de la Matemática.
Universidad de Granada.
Sociedad Andaluza
de Educación Matemática
«Thales»