Elementos para una Descomposición Genética del concepto de recta tangente

Abilio Orts, IES Guadassuar (España)

Salvador Llinares, Universidad de Alicante (España)

Francisco José Boigues, Universidad Politécnica de Valencia (España)

Recibido el 5 de junio de 2016 ; aceptado el 15 de octubre de 2016

Elementos para una Descomposición Genética del concepto de recta tangente

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar la construcción del significado del concepto de recta tangente en estudiantes de Bachillerato (16-17 años). Presentamos el proceso de generación de una Descomposición Genética del concepto de recta tangente a una curva como descripción de una progresión en el aprendizaje en estudiantes de 16-17 años, integrando información desde tres análisis: epistemológico, curricular y cognitivo. Nuestros resultados indican que la progresión en el aprendizaje se articula mediante dos características: (i) la integración de las perspectivas analítica local y geométrica, y (ii) la coordinación de la concepción leibniziana y la concepción cartesiana para superar los obstáculos derivados de la concepción euclídea. Finalmente, situamos los resultados de esta investigación en el debate sobre las diferentes maneras de entender las ideas de "trayectoria de aprendizaje" y "progresión en el aprendizaje" generadas en la educación matemática en los últimos años.

Palabras clave. Progresión en el aprendizaje; comprensión matemática; recta tangente; Descomposición Genética; trayectoria de aprendizaje.

Elementos para uma Decomposição Genética do conceito de reta tangente

Resumo

O objetivo desta pesquisa é caracterizar a construção do significado do conceito de reta tangente em estudantes de Ensino Secundário (16-17 años). Apresentamos o processo de formação de uma Decomposição Genética do conceito de reta tangente a uma curva como descrição de uma progressão na aprendizagem em estudantes de 16-17 anos, integrando informação desde as três analises: epistemológica, curricular e cognitiva.Os nossos resultados mostram que a progressão na aprendizagem articula-se por meio de duas características: (i) a integração das perspectivas analítica local e geométrica, e (ii) a coordinação da conceção leibniziana e a conceção cartesiana com o fim de vencer os obstáculos procedentes da conceção euclidiana. Finalmente, situamos os resultados desta pesquisa no debate sobre as diferentes formas de perceber as idéias de "trajetória da aprendizagem" e "progressão na aprendizagem" geradas na educação matemática nos últimos anos.

Palavras chave. Progressão na aprendizagem; compreensão da matemática; reta tangente; Gecomposição Genética; trajetória de aprendizagem.

Para citar: Orts, A., Llinares, S., Boigues, F. J. (2016). Elementos para una Descomposición Genética del concepto de recta tangente. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *10, 111-134*

Elements for a Genetic Decomposition of the tangent line concept

Abstract

The goal of this research is characterize high school student's construction of the meanings to tangent line concept. We report the generation of a Genetic Decomposition for the tangent line concept as a high school students' learning progression. We integrate information from three perspectives: epistemological, curricular, and cognitive. Learning progression is articulated through two characteristics: (i) the integration of local analytical and geometrical perspectives, and (ii) the coordination of Leibnizian conception and the Cartesian conception as a mean to overcome the obstacles derived from the Euclidean conception. Finally, we situated our findings into the debate about the different ways to understand the "learning trajectories" and "learning progressions" constructs in mathematics education.

Keywords. *Learning progressions; mathematical understanding; tangent line; Genetic Decomposition; learning trajectory.*

Éléments pour une Décomposition Génétique du concept de ligne tangente

Résumé

Cette recherche poursuit le but de caractériser la construction du sens de la notion de ligne tangente sur des élèves du secondaire. Nous présentons le processus de génération d'une Décomposition Génétique de la notion de tangente à une courbe comme une description d' une progression dans l'apprentissage des élèves de 16-17 ans, en intégrant des informations venant de trois analyses: épistémologique, curriculaire et cognitif . Nos résultats indiquent que la progression dans l'apprentissage est articulée par deux caractéristiques: (i) l'intégration des perspectives suivantes: analytique, local et géométrique, et (ii) la coordination de la conception leibnizienne et euclidienne. Enfin, nous situons les résultats de cette recherche dans le débat sur les différentes façons de comprendre les idées de "parcours d'apprentissage" et "progression dans l'apprentissage" générées dans l'enseignement des mathématiques au cours des dernières années.

Paroles clés. *Progressions d'apprentissage; la compréhension des mathématiques; la ligne tangente; la Décomposition Génétique; la trajectoire d'apprentissage.*

1. Introducción

La recta tangente es un concepto que permite interpretar geométricamente la derivada de una función en un punto y al mismo tiempo es la recta que mejor aproxima localmente una función. En la constitución de su significado intervienen los conceptos de límite, derivada, monotonía o curvatura de una función así como los procesos de aproximación a una curva desde varios sistemas de representación (Robles, Del Castillo, & Font, 2010). La relación entre estos conceptos durante el aprendizaje favorece el que se generen diferentes significados para la recta tangente a una curva en un punto, como el de una recta que pasa por el punto pero no corta la curva, como una recta que tiene una doble intersección con la curva en dicho punto, como una recta que pasa por dos puntos infinitamente cercanos al punto de la curva, etc. (Artigue, 1991). Estos significados pueden coexistir en la mente de un matemático, pero resultar difíciles para los alumnos.

El conocimiento previo de los estudiantes de la recta tangente a un círculo influye en el desarrollo de una comprensión más general de recta tangente a una curva. Algunas investigaciones indican la existencia de diferentes perfiles de estudiantes caracterizados por usar significados próximos a la idea de recta tangente procedente del análisis o a ideas procedentes de propiedades geométricas (Biza & Zachariades, 2010; Páez & Vivier, 2013). Este hecho crea dificultades cuando los estudiantes tienen que considerar la idea de recta tangente en un punto de inflexión, en un punto cúspide o cuando la recta tangente coincide con la gráfica de la función (Biza & Zachariades, 2010; Castela, 1995). Esta situación ha generado el siguiente objetivo de investigación:

- Caracterizar el desarrollo de la comprensión del concepto de recta tangente en estudiantes de Bachillerato.

La respuesta a esta cuestión puede proporcionarnos elementos y características para comprender mejor la manera en la que los estudiantes construyen el significado de recta tangente, en el sentido de apoyar las predicciones de cómo la comprensión de los estudiantes evolucionará durante la realización de las actividades instruccionales (Simon, 2014).

2. Marco teórico

Dubinsky (1991) aplica la idea de abstracción reflexiva de Piaget al pensamiento matemático avanzado considerando formas de conocer los conceptos matemáticos como acciones, procesos, objetos y esquemas, y los mecanismos constructivos de interiorización, encapsulación y tematización. Conocer como acción significa realizar los cálculos indicados en los procedimientos. La repetición de los procedimientos en ejemplos específicos permite que el concepto sea interiorizado como proceso (por ejemplo, conocer el concepto de pendiente de una recta como medida de la razón de crecimiento de dicha recta). Cuando los procesos pueden ser aplicados a diferentes relaciones se encapsulan en un objeto que puede llegar a ser desencapsulado volviendo al proceso que lo ha originado. Por último, los procesos y objetos pueden organizarse de una manera estructurada para formar un esquema. Cuando un estudiante se enfrenta a un problema matemático evoca un esquema o parte de él para resolverlo.

Para describir el desarrollo de la comprensión de los conceptos matemáticos en un determinado nivel educativo se introduce la idea de Descomposición Genética de un concepto como un conjunto de construcciones mentales que un estudiante debería desarrollar (Arnon et al., 2014). En el desarrollo de la comprensión, algunas veces hay que tener en cuenta obstáculos que lo dificultan y que aparecen en el mismo acto de conocer como una necesidad funcional (Brousseau, 1983). Por ejemplo, la idea de recta tangente concebida como la recta que tiene un solo punto en común con la curva, introducida al estudiar la recta tangente a la circunferencia, suele ser un obstáculo para identificar una recta tangente que tenga varios puntos de corte con la función.

Desde una perspectiva cognitiva, la manera en la que los estudiantes progresan en la comprensión de un concepto fue modelizada por Simon y sus colegas a través de dos fases (e.g. Tzur & Simon, 2004). La *fase de participación* se da cuando los estudiantes identifican regularidades en la relación entre las actividades realizadas (tareas instruccionales) y los efectos producidos que constituyen elementos del concepto que se está aprendiendo. En segundo lugar, la *fase de anticipación* en la que los estudiantes son capaces de usar estos elementos en diferentes situaciones permitiendo la consolidación del concepto mediante su tematización. El mecanismo de tematización permite a los estudiantes aplicar transformaciones al esquema relativo al concepto matemático (Dubinsky, 1991). Por ejemplo, en el caso de la recta tangente, ampliando el tipo de funciones y puntos singulares en los que evaluar su existencia o utilizándola para obtener el valor aproximado de una función en el entorno de un punto que permite inferir la tematización del esquema. En este sentido, la tematización implica la transición del uso implícito (fase de participación) a un uso consciente de las propiedades de la recta tangente (fase de anticipación) en la resolución de diferentes tareas en los que aparecen los puntos singulares. En esta transición desde la fase de participación a la de anticipación, Roig, Llinares y Penalva (2012) identificaron tres momentos característicos. En el primero, los estudiantes organizan un conjunto de registros relativos a los efectos de las actividades realizadas (momento de proyección). En el segundo, abstraen alguna regularidad en este conjunto de relaciones, coordinando y comparando los diferentes registros, en este caso, el concepto de recta tangente vinculado a la situación en la que se ha generado (momento de reflexión). Finalmente, el tercer momento, en el que son capaces de aplicar en diferentes situaciones la regularidad identificada, es decir, el concepto de recta tangente (momento de anticipación local).

Teniendo en cuenta estas referencias nos planteamos generar una Descomposición Genética del concepto *recta tangente* como un conjunto de construcciones mentales cada vez más sofisticadas que un estudiante debería desarrollar para alcanzar su comprensión en el nivel de Bachillerato. Esta Descomposición Genética puede apoyar la definición de objetivos de aprendizaje considerando las fases del aprendizaje conceptual, el conjunto de tareas previstas y la predicción de cómo la comprensión de los estudiantes evolucionará. Este último punto nos permitirá aportar reflexiones sobre la relación entre los diferentes significados dados a las ideas de “trayectoria de aprendizaje” y “progresiones en el aprendizaje” en el ámbito de la educación matemática (Battista, 2011; Simon, 1995, 2014).

3. Elementos para una Descomposición Genética de la recta tangente

Para generar una Descomposición Genética del concepto de recta tangente en los estudiantes de Bachillerato integramos la información reunida desde las investigaciones previas con los resultados de tres análisis diferentes: el análisis epistemológico del concepto, el análisis de libros de texto (perspectiva curricular) y los resultados de un cuestionario piloto (perspectiva cognitiva).

3.1. Análisis epistemológico del concepto

El análisis histórico del desarrollo del concepto de recta tangente permite identificar dos perspectivas (Boyer, 1986; Collette, 1991; González, 1992). Por un lado, una perspectiva dinámica, que se inicia en Arquímedes (recta tangente como dirección instantánea del movimiento) y a través de Roberval o Torricelli llega a Newton. Por otro lado, una perspectiva más estática que partiendo de Euclides y Apolonio lleva a Descartes y Fermat y desemboca en Leibniz, y en la que es posible identificar tres concepciones. Euclides concibe la recta tangente como aquella recta de mínimo contacto con una cónica (toca pero no corta), tiene un solo punto en común con la curva (*concepción euclídea*). Descartes propuso sustituir la definición anterior de recta tangente, pues solo era válida para las cónicas estudiadas por los griegos pero resultaba problemática para el creciente número de curvas que iban apareciendo. De esta forma define la recta tangente como el límite de las rectas secantes a una función en el punto considerado (*concepción cartesiana*). Finalmente, Leibniz plantea concebir una curva como formada por infinitos segmentos, al prolongar el segmento en el que se encuentra el punto obtenemos la recta tangente (*concepción leibniziana*).

Estas tres concepciones de la recta tangente perviven en la actualidad de diferente manera en el currículo y por consiguiente intervienen en cómo los estudiantes llegan a comprender el concepto de recta tangente.

3.2. Análisis curricular

Analizamos 16 libros de texto actuales de Bachillerato de las asignaturas de Matemáticas I y II y Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I y II de cuatro editoriales españolas: Anaya, SM, Santillana y Bruño (con fecha de edición menor de 10 años). Para el análisis de los libros de texto, hemos considerado cinco dimensiones: la organización del concepto en el texto; la definición usada (formal o intuitiva); el registro semiótico empleado y el tipo de ejercicios y problemas resueltos y propuestos; los fenómenos que dan origen a la introducción del concepto, en concreto, si se mueven en un campo específico de las matemáticas o tienen que ver con otras ciencias y si se tiene en cuenta las extensiones del concepto a otros problemas que no sean los propios del concepto; y, por último, la relación con otros contenidos (González & Sierra, 2004; Conejo, Arce & Ortega, 2015).

Las conclusiones más relevantes referidas a algunas de estas dimensiones se muestran a continuación. Todos los textos introducen el concepto de recta tangente a una curva como el límite de las rectas secantes (concepción cartesiana) con el apoyo de un gráfico (Figura 1), explicitándose la expresión de la recta tangente mediante la ecuación punto-pendiente. Solo en los textos de segundo curso de la editorial SM aparece una aplicación de la recta tangente como mejor aproximación lineal a una función en un punto.

Tres editoriales (Anaya, Santillana y Bruño) presentan rectas tangentes que cortan en un único punto a una curva asimilable a un arco de cónica, por lo que no contribuyen a superar la concepción euclídea. Solo en una editorial (SM) aparecen ejemplos con funciones como $f(x) = x^3$ en la que se remarca explícitamente que la recta tangente en x=0 puede cortar a la gráfica de la función en otros puntos.

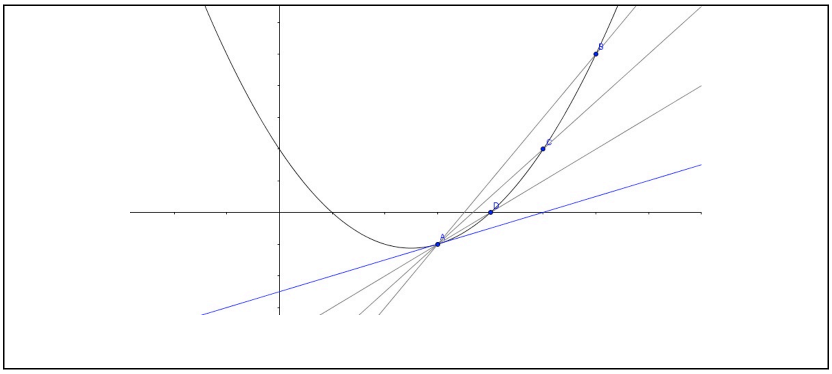


Figura 1. Modelo canónico usado en la mayoría de editoriales.

El paso de la concepción euclídea a la cartesiana no se realiza de modo explícito en ninguna de las editoriales. Se trata de que el alumno realice una generalización reconstructiva y no una generalización expansiva, en los términos definidos por Harel y Tall (1991), repitiéndose las condiciones que favorecen la reproducción del obstáculo epistemológico del paso de la concepción euclídea a la concepción cartesiana. Esto es, se reproduce en el desarrollo curricular de los textos el problema al que tuvieron que enfrentarse Descartes y Fermat: la concepción euclídea únicamente es válida para las cónicas pero no para cualquier curva. El principal problema, como señalan Ortega y

Sierra (1998), reside en el proceso de aproximación de la recta tangente mediante las rectas secantes, pues

> *"parece que llegados a este punto, la Comunidad Matemática sabe hallar la recta tangente a cualquier curva y distingue tangente de secante. Esto no es así, ya que salvo en las cónicas, no se dispone de ningún criterio para decidir si una recta es tangente a la curva o no. Entonces, ¿cómo interpretar que la derivada en el punto x=p es la pendiente de la recta tangente a la curva y=f(x) en el punto (p, f(p))? ¿No debiéramos definir previamente el concepto de recta tangente a la curva en dicho punto?"* (Ortega & Sierra, 1998, p. 98).

El hecho de no definir la recta tangente puede ser la razón por la que los alumnos asimilan la recta límite de las secantes con la recta tangente definida años atrás mediante la concepción euclídea, en lugar de la concepción cartesiana. Para evitar esta dificultad, generamos como hipótesis de una secuencia de enseñanza, partir de la concepción leibniziana para posteriormente relacionar dicha concepción con la cartesiana. Cuando se caracteriza la recta tangente como aquella recta que mejor aproxima localmente una función, el límite hacia el que tienden las rectas secantes es ya un objeto conocido. De esta manera, es posible interpretar geométricamente la derivada como la pendiente de la recta tangente pues esta ya ha sido definida y estudiada con anterioridad. A partir de aquí es posible obtener la ecuación de la recta tangente a una función en un punto. Para aportar argumentos de apoyo a esta hipótesis complementamos las perspectivas curricular y epistemológica con el análisis cognitivo.

3.3. Análisis cognitivo

Síntesis de las investigaciones previas

Los resultados de investigaciones previas resaltan la influencia negativa que ejerce la idea de tangente a una circunferencia en la comprensión del concepto de recta tangente (Biza, Christou & Zachariades, 2008; Biza, Nardi & Zachariades, 2009, 2010; Biza & Zachariades, 2010). Estas investigaciones identifican tres maneras de comprender la recta tangente. Una primera concepción responde a la de recta que toca en un punto pero no corta a la función (concepción euclídea), una segunda concepción en la que se aplican propiedades geométricas solo de forma local, y una tercera en la que se comprende el concepto de recta tangente como límite de las rectas secantes (concepción cartesiana). Por otra parte, el análisis del proceso de construcción de la comprensión del concepto de recta tangente ha permitido identificar tres momentos (Castela, 1995; Vivier, 2010). Este proceso se inicia cuando los estudiantes comprenden la recta tangente con un único punto de intersección como en la circunferencia (punto de vista global). Es decir, los alumnos construyen el significado vinculado a una concepción geométrica, como la recta que toca en un punto a la circunferencia, que conlleva la idea de recta perpendicular al radio de la circunferencia (que es un significado introducido en el currículo junto con la concepción euclídea – en primer curso de la educación secundaria, 12-13 años). Luego se generan concepciones transitorias que producen problemas en los puntos angulosos, en los puntos de inflexión y cuando la curva se confunde con la recta tangente. Finalmente, se comprende el concepto de recta tangente apoyándose en los conocimientos del Cálculo Diferencial (concepción cartesiana). Los estudiantes acceden a concepciones analíticas (en Bachillerato), cuando se comprende la recta tangente a una función en un punto como el límite de las rectas secantes en dicho punto, que conlleva el significado de recta que pasa por el punto de tangencia con pendiente igual a la derivada de la función en dicho punto. Sin embargo, en esta progresión existe una desconexión entre las concepciones geométrica y analítica.

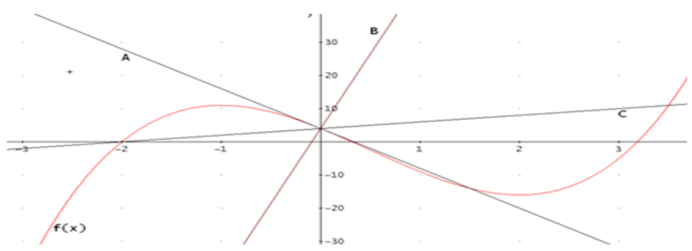
Algunos estudios han planteado superar esta desconexión partiendo de la idea de linealidad local, aprovechando los recursos tecnológicos de ampliación y reducción del zoom (Milani & Baldino, 2002; Maschietto, 2008). Por ejemplo, Maschietto (2008) realiza su estudio con universitarios utilizando calculadoras gráficas como elemento mediador para generar un nuevo significado de la recta tangente definida a partir de su *micro-straightness* (explotando la idea de Tall (1985) de realizar sucesivos zoom sobre la gráfica de la función). En cambio, para otros autores el tránsito entre la concepción global (euclídea) a la concepción local (leibniziana) podría realizarse a través de la convención matemática y no necesariamente a través de la visualización (Canul, Dolores & Martínez-Sierra, 2011).

Los resultados de estas investigaciones ponen de manifiesto las diferentes concepciones de la recta tangente construidas por los estudiantes y las características de cómo progresan en su aprendizaje. Para obtener información más detallada de estas características en nuestro contexto curricular planteamos un estudio piloto.

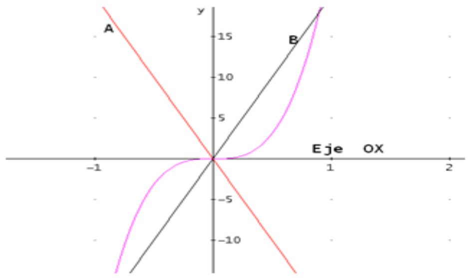
Características del aprendizaje: Estudio piloto

En este estudio piloto nos planteamos como objetivos: (a) constatar la influencia de la concepción euclídea en la comprensión de recta tangente de los estudiantes frente a la concepción cartesiana, y (b) determinar cómo comprenden el concepto de recta tangente como mejor aproximación lineal (concepción leibniziana). Para conseguir estos objetivos diseñamos un cuestionario con ocho ítems que presentaban distintas características. Cuatro de ellos (Figura 2) estaban centrados en identificar la recta tangente a una curva: en un punto determinado, teniendo en cuenta que la recta tangente posteriormente cortaba de nuevo a la curva (Q1), en un punto de inflexión (Q3), en un punto extremo (Q4) o la recta tangente a otra recta (Q5). La cuestión Q2 pedía hallar la expresión de la recta tangente en un punto determinado (Figura 3). La cuestión Q6 (Figura 4) preguntaba por la recta tangente en un punto anguloso y para ello se realizaba un zoom sobre la curva en el entorno del punto para visualizar que la curva no se convertía en una única recta sino en dos segmentos. La cuestión Q7 pedía obtener una aproximación del valor de una función en un punto a partir de la recta tangente (Figura 5) y, finalmente, la cuestión Q8 se centraba en el significado del concepto *(¿Podrías explicar brevemente lo que entiendes por recta tangente a una curva en un punto?*).

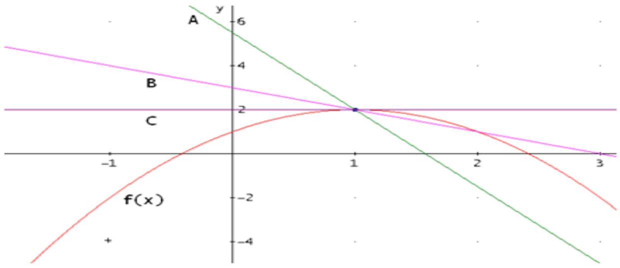
Q.1 En el gráfico siguiente aparece la representación gráfica de una función f(x) y su recta tangente en x=0. Identifica cuál de ellas es la recta tangente en dicho punto.



Q.3 Identifica de manera razonada la recta que es tangente a la curva $y= x^3$ en $x=0$.



Q.4 La gráfica de la función $f(x)$ que mostramos tiene un máximo relativo en el punto (1,2) por el cual pasan tres rectas. ¿Cuál sería la recta tangente a $f(x)$ en (1,2)?



Q.5 La función r que presentamos es una recta que tiene por ecuación $y= x/2+1$, ¿Cuál sería su recta tangente en $x=4$?

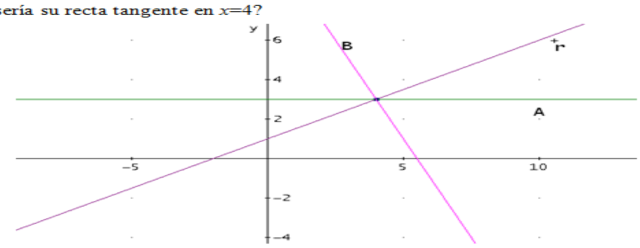


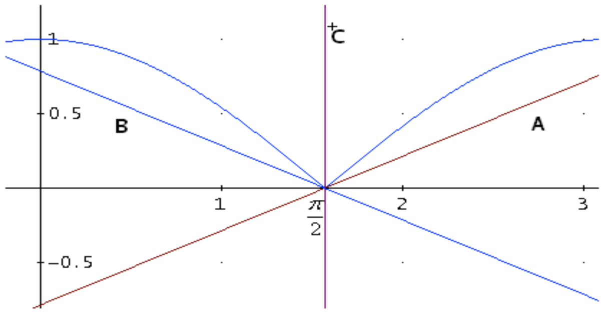
Figura 2. Cuestiones centradas en el reconocimiento de rectas tangentes en puntos singulares.

Q.2 Obtén la ecuación de la recta tangente a la curva $y= x^2$ en $x=1$.

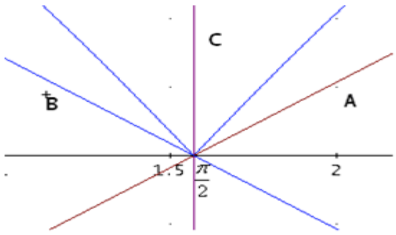
Solución: x= 1 ii) y= 2x-1 iii) y=x-1/2 iv) Ninguna de las anteriores

Figura 3. Cuestión centrada en hallar la recta tangente en un punto.

Q.6 Mostramos la gráfica de una función y una serie de rectas que pasan por un mismo punto P= $(\pi/2,0)$.



Además hemos ampliado mediante un zoom la zona del punto común $(\pi/2,0)$.



Identifica cuál sería la recta tangente a la curva en el punto *P*.

Figura 4. Cuestión centrada en la perspectiva leibniziana de la recta tangente y su relación con los puntos angulosos.

Q.7 Una determinada función $f(x)$ pasa por el punto (1,2). Además se sabe que su derivada en x=1 vale 3, es decir, $f'(1)=3$. Obtén de manera aproximada el valor de $f(1'027)$.

Figura 5. Cuestión centrada en obtener una aproximación del valor de una función en un punto a partir de la recta tangente a dicha función en un punto cercano.

Para elaborar el cuestionario revisamos diferentes tests propuestos en otros estudios (Vivier, 2010; Tall, 1987; Vinner, 1991; Castela, 1995) y tuvimos en cuenta la dificultad de los estudiantes en proporcionar una definición de recta tangente al recurrir a descripciones basadas en la tangente a una circunferencia, en generar rectas tangentes en puntos angulosos y en puntos de inflexión o en curvas que se confunden localmente con su tangente.

El cuestionario fue contestado por 24 estudiantes de Bachillerato de las modalidades de Ciencias y Ciencias Sociales después de la unidad didáctica sobre la idea de recta tangente en la que se introdujo la concepción cartesiana. Seis cuestiones eran de elección múltiple pero que debía ser justificada y dos cuestiones de respuesta abierta. Al final de cada cuestión se pedía a los estudiantes indicar su grado de seguridad con la contestación dada: 0 indicaba que no tenía seguridad en su respuesta, 1 que tenía ciertas dudas y 2 que estaba seguro de su respuesta.

Los resultados del estudio piloto indican, en relación al primer objetivo planteado (constatar la influencia de la concepción euclídea en la comprensión de recta tangente de los estudiantes frente a la concepción cartesiana) que una mayoría de estudiantes refleja una concepción euclídea de la recta tangente, lo que les supone un obstáculo para construir la concepción cartesiana. En este sentido, aunque son capaces de calcular la recta tangente a una curva en un punto de forma algorítmica, tienen dificultades para identificar la recta tangente a una curva en un punto de inflexión, en un punto anguloso o en determinar la recta tangente a una recta. Además, se constatan dificultades en usar la idea de recta tangente como la mejor aproximación lineal a una función en un punto.

Por ejemplo, todos los estudiantes reconocían la recta tangente en un punto de inflexión (Q3) pero la justificación que daban se apoyaba en razonamientos gráficos siguiendo la concepción euclídea: *"las rectas secantes cortan a la gráfica de la función mientras que la recta tangente la 'toca' o la 'roza' "* (A9, A10, A11, A12, A13, A19). La influencia de la concepción cartesiana queda patente cuando los estudiantes tienen que determinar la recta tangente a una recta dada (Q5). Veintidós de los veinticuatro estudiantes respondieron erróneamente sin proporcionar alguna justificación y con un grado de seguridad bajo. En este caso, los razonamientos de tipo geométrico no les permiten obtener la solución correcta. Por ejemplo, un alumno indicó que no existía la recta tangente "*ya que para ser tangente tiene que tocarla en un punto*" (A14). Por otra parte, los estudiantes no proporcionan justificaciones adecuadas cuando deben considerar el caso de una función no derivable en un punto (Q6). Estas dificultades ponen de manifiesto las limitaciones para generar una recta tangente en puntos en los que la concepción euclídea no es válida, por lo que se debe utilizar la concepción cartesiana.

En relación al segundo objetivo en este estudio (determinar cómo comprendían el concepto de recta tangente como mejor aproximación lineal -concepción leibniziana), la mayoría de los estudiantes tuvieron dificultades en considerar la recta tangente como aquella que mejor aproxima a una función (Q7). Quince alumnos dejaron la cuestión en blanco. Un alumno confunde la imagen de la función en $x=1$ con la imagen en $x=1.027$ y cuatro alumnos calculan la recta tangente pero no saben qué hacer con ella. Solo tres alumnos contestaron correctamente a esta cuestión.

Por último, la mayoría de los estudiantes sabían calcular la recta tangente (Q2), pero al explicar lo que entendían por recta tangente (Q8) pusieron de manifiesto la concepción euclídea: *la recta tangente de una curva es la recta que solo toca en un punto a la curva*" (A10); "*entiendo una recta que pasa cerca del punto de la curva"* (A11); "*una recta tangente a una curva en un punto es aquella recta que pasa por un punto sin cortar la curva, solo la toca*" (A12); "*es aquella recta que solamente toca en ese punto a la curva sin atravesar la curva*" (A19); "*es la recta que roza una curva en un punto*" (A22), "*la recta tangente no corta a la curva"* (A13). Solo dos estudiantes (A21, A24) recurren a la 'similitud' entre la función y la recta tangente (concepción leibniziana): "*la recta tangente a un punto es la que más se parece a la función en ese punto"*; "*es la recta que mejor aproxima a ese punto, si lo ampliamos será la que esté más junta"*.

Desde estos resultados pudimos generar dos ideas: (i) la influencia negativa de la concepción euclídea en generar un significado más general de la concepción cartesiana de la recta tangente, y (ii) la generalización del significado de recta tangente a la concepción cartesiana mediante la concepción leibniziana no se realiza de manera natural. Estas dos ideas junto con las hipótesis generadas a partir de las otras fuentes (epistemológica y curricular) nos proporcionan los elementos para fundamentar una propuesta de Descomposición Genética para la recta tangente en el nivel de Bachillerato.

4. Una Descomposición Genética del concepto de recta tangente

El análisis epistemológico, el análisis de los libros de texto, la síntesis de las investigaciones previas, los resultados del estudio piloto y una manera determinada de entender el aprendizaje conceptual a través de la transición entre las fases de proyección y anticipación (Simon, Tzur, Heinz & Kinzel, 2004; Roig et al., 2012) han aportado información que nos permite identificar elementos de una Descomposición Genética de la recta tangente. La Descomposición Genética del concepto de recta tangente debe ser entendida como una descripción del desarrollo de la comprensión y, por tanto, como una hipótesis previa para el diseño de un experimento de enseñanza. De esta manera, esta Descomposición Genética ayudará a articular una trayectoria hipotética de aprendizaje entendida como una ruta conjeturada a través de un conjunto de objetivos de aprendizaje y de tareas instruccionales diseñadas para generar los mecanismos cognitivos que permitan a los estudiantes progresar en la comprensión de la recta tangente (Clements & Sarama, 2004).

El concepto de recta tangente implica tres componentes y su relación: la linealidad local de una función en un punto, la sucesión de rectas secantes y la recta tangente como objeto. La relación entre los modos de representación analítico y gráfico es el medio para ayudar a interiorizar la recta tangente como objeto. En este sentido, el uso de la recta tangente (reconocimiento gráfico y cálculo de la ecuación) en condiciones especiales, como en puntos angulosos y en curvas en las que se confundan parcialmente con la gráfica de la función, permite estar en condiciones de favorecer la tematización del esquema de recta tangente.

La Descomposición Genética conjeturada se ha articulado a través de la relación entre distintos elementos en cinco fases:

a. Pre-requisitos en el desarrollo de la comprensión del concepto de recta tangente (E0)

b. Construcción de la concepción leibniziana de la recta tangente: mejor aproximación lineal a la curva (E1)

c. Construcción de la concepción cartesiana: límite de rectas secantes (E2)

d. Generalización a la concepción cartesiana a partir de la concepción leibniziana (E3)

e. Tematización del esquema de recta tangente mediante el uso consciente de sus propiedades (E4)

A continuación, pasamos a describir cada una de ellas.

4.1. Pre-requisitos en el desarrollo de la comprensión del concepto de recta tangente

Esta primera fase la conforman ocho elementos que sitúan la propuesta de Descomposición Genética en el contexto curricular de los alumnos de Bachillerato. Estos elementos hacen referencia, en primer lugar, a los contenidos del currículo de la

Educación Secundaria Obligatoria que hacen referencia al estudio de puntos y rectas en el plano, en los que interviene la idea de pendiente de una recta a partir de dos puntos o de pendiente de una recta como medida de su razón de crecimiento (Elementos E01, E02 y E03). También hacen referencia a los procedimientos para obtener puntos de una recta de forma analítica y gráfica y hallar la ecuación punto-pendiente de una recta a partir de su pendiente y las coordenadas de un punto que forman parte del currículo (Elementos E04 y E05) y, por último, se tiene en cuenta que en los temas previos de Bachillerato se introduce el concepto de límite, derivada de una función en un punto y el de función derivada (Elementos E06, E07 y E08). En la tabla 1 se muestran los elementos matemáticos que constituyen los prerrequisitos (E0) para apoyar la progresión en el aprendizaje.

Tabla 1. *Pre-requisitos en el desarrollo de la comprensión del concepto de recta tangente.*

E0	Pre-requisitos
E01	Reconocer puntos de una recta y de una función a partir de su abscisa a nivel gráfico y analítico
E02	Conocer como acción la pendiente de una recta a partir de dos puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) (Cálculo): $$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$
E03	Conocer como proceso el concepto de pendiente de una recta como medida de la razón de crecimiento de dicha recta
E04	Conocer como acción la idea de recta (forma analítica): Identificar y hallar puntos de una recta
E05	Conocer como proceso la idea de recta con la expresión ecuación punto-pendiente de una recta: $$y-y_0= m(x-x_0)$$
E06	Conocer como proceso el límite como tendencia
E07	Conocer como proceso el concepto de derivada de una función en un punto: $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
E08	Conocer como proceso el concepto de función derivada

4.2. Construcción de la concepción leibniziana de la recta tangente: mejor aproximación lineal a la curva

A partir de la información sintetizada en la sección anterior generamos la hipótesis de que los estudiantes inicien la construcción del significado del concepto de recta tangente a partir de la concepción leibniziana para posteriormente relacionarla con la concepción cartesiana. La coordinación cognitiva entre estas dos concepciones debe ser considerada un medio para introducir la ecuación de la recta tangente a una función en un punto, en vez de introducir directamente la recta tangente a partir de la concepción cartesiana que es la aproximación habitual en los libros de texto.

Esta segunda fase (E1) la constituyen tres elementos que permiten construir la recta tangente como la mejor aproximación local. Para ello, nos apoyamos en la linealidad local de una función derivable en un punto y en el potencial de los recursos tecnológicos como GeoGebra y algunas de sus herramientas como el zoom que favorecen la relación entre lo gráfico, lo analítico y lo numérico. Por ejemplo, aplicando varios zoom sobre una función f en un punto dado A, se observa que la gráfica (Figura 6a) tiene la apariencia de una recta (figura 6b). Es decir, en el entorno de A, *f* se comporta como una recta. Desde el modelo de aprendizaje conceptual descrito (Tzur & Simon, 2004) se infiere que tras realizar esta acción varias veces, los alumnos están en condiciones de empezar a relacionar las acciones con el efecto producido (momento de proyección) (Elemento E11). La posibilidad de interiorizar la regularidad observada en los conjuntos de relaciones actividad-efecto (momento de reflexión) genera las condiciones para coordinar y comparar los diferentes registros (momento de reflexión) (Elemento E12) (Roig et al., 2012). Esto permitirá definir la recta tangente a una función en un punto como la recta obtenida en este proceso (Elemento E13). La realización de estas actividades con funciones no derivables en un punto y que, por tanto, no tienen recta tangente en dicho punto, introduce a los estudiantes en los casos de la no linealidad de la función en un punto. Este proceso permite definir la recta tangente a una función en un punto mediante la concepción leibniziana como paso previo a introducir la concepción cartesiana (Tabla 2).

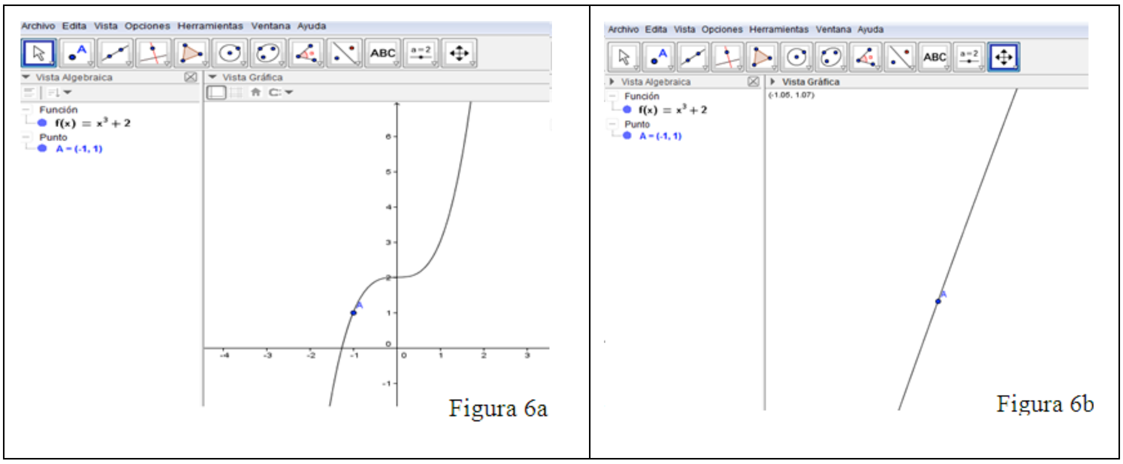


Figura 6. Efecto gráfico del uso del zoom para visualizar la linealidad local de la función.

Tabla 2. *Descripción del camino conjeturado de construcción de la concepción leibniziana a través de un conjunto de tareas diseñadas para apoyar la interiorización del proceso generado por las acciones del zoom.*

E1	Linealidad local de una función en un punto
E11	Acción de aplicar varios zoom sobre una función en un determinado punto
E12	Interiorización de la acción E11 en un proceso
E13	El objeto de concebir, localmente, la función como un segmento cuya prolongación se definiría como recta tangente (mejor aproximación lineal)

4.3. Construcción de la concepción cartesiana de la recta tangente como límite de rectas secantes

Esta tercera fase la constituyen tres elementos a través de los cuales se construye la idea de recta tangente como límite de rectas secantes (concepción cartesiana). Para la construcción de la recta tangente como límite de rectas secantes con los recursos tecnológicos podemos crear una sucesión de rectas secantes manteniendo fijo el punto en el que deseamos obtener la recta tangente y acercando a este punto cada vez más el otro punto considerado (Figura 7). El hecho de repetir esta acción con diferentes funciones (Elemento E21) posibilitará al estudiante *interiorizar la relación entre esta acción y el efecto* producido en un proceso (Elemento E22) (momento de proyección) que permite vincular la sucesión de rectas secantes con la aparición de la recta tangente al unir los puntos. Al *identificar la regularidad* en las relaciones actividad-efecto, entendida como la concepción cartesiana de la recta tangente (momento de reflexión), se está en condiciones de usar esta regularidad y coordinarla con la idea de la linealidad local de la función. Esta posibilidad de coordinación cognitiva debería ser entendida como la encapsulación del concepto de recta tangente como un objeto (Elemento E23) (Tabla 3).

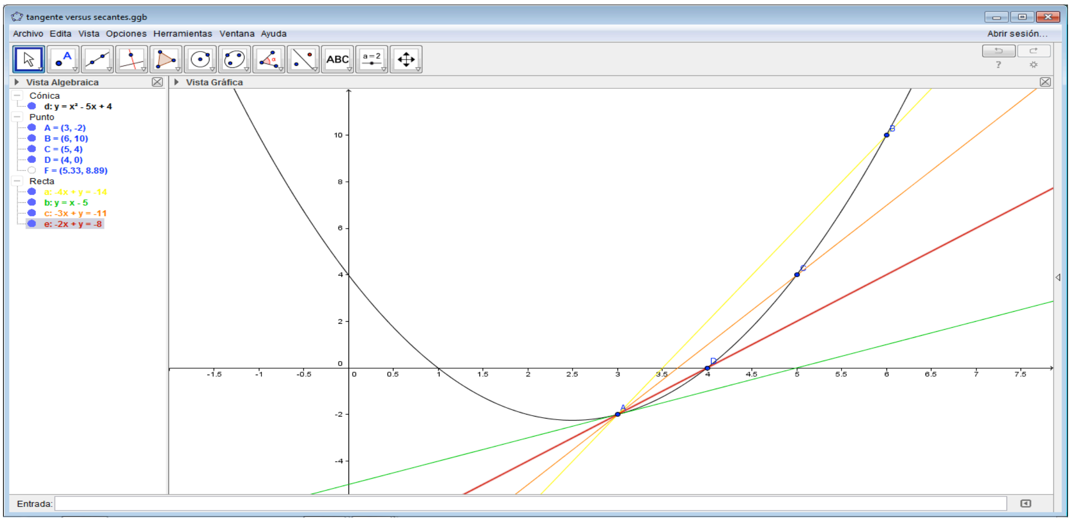


Figura 7. Acción de crear rectas secantes con un punto fijo y acercando otro punto al fijo.

Tabla 3. *Construcción de la concepción cartesiana de la recta tangente: límite de la sucesión de rectas secantes.*

E2		Sucesión de rectas secantes
	E21	Acción de crear rectas secantes manteniendo un punto fijo y acercando otro punto al fijo
	E22	Interiorización de la acción de crear sucesiones de rectas secantes (E21) en un proceso
	E23	Encapsulación como objeto de la idea de sucesión de recta secante

El uso de la concepción leibniziana para llegar a la concepción cartesiana conjeturada desde la síntesis del análisis epistemológico, curricular y cognitivo se convierte así en el instrumento para la encapsulación del concepto de recta tangente como un objeto. Por otra parte, generalizar el significado de la recta tangente a una curva a la concepción cartesiana a partir de la concepción leibniziana implica coordinar la perspectiva geométrica y la analítica local.

4.4. Generalización a la concepción cartesiana de la recta tangente mediante la concepción leibniziana

En estos momentos, recursos tecnológicos como GeoGebra pueden ayudar a generar este proceso cognitivo al facilitar ver cómo las rectas secantes convergen a la recta tangente (Figura 8) y cómo se relacionan en los registros analíticos. Por ejemplo, mediante un deslizador (definido como la distancia h entre las abscisas del punto de tangencia y del otro punto que se considera para obtener la recta secante) se puede introducir la convergencia como un proceso dinámico. Por ejemplo, en la Figura 8 la recta tangente viene representada en color verde (los estudiantes pueden comprobarlo mediante sucesivos zoom). Variando el deslizador (en esta Figura aparece inicialmente con valor h=2) se crean las condiciones para visualizar la convergencia de las rectas secantes (elemento E2: sucesión de rectas secantes) a la recta tangente (elemento E1: linealidad local de una función en un punto). Esta situación permite relacionar la tendencia de las pendientes de las rectas secantes con la derivada de la función en dicho punto visto a través de la recta a la que converge la sucesión de rectas secantes al mover el deslizador (esta relación entre E1 y E2 la denotamos comoE1RE2).

La generalización a la concepción cartesiana mediante la concepción leibniziana se establece al centrar la atención sobre los elementos que conforman la ecuación de una recta: y = mx + n. Para ello, nos apoyamos en el conocimiento previo de los estudiantes de que la constante *m* indica la pendiente de la recta, es decir, la forma de la función, mientras que la ordenada en el origen, *n,* indica la posición de la recta en el plano. Desde la comprensión de la recta tangente como el límite de las rectas secantes, *la forma* (pendiente) de la recta tangente debe ser el límite de las *formas (pendientes) de las correspondientes rectas secantes*. Es decir, la pendiente de la recta tangente es el límite de las pendientes de las rectas secantes cuando la distancia entre los dos puntos considerados tiende a cero ($h \to 0$):

Pendiente de la recta tangente:

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Establecer esta relación implica usar el concepto de pendiente de una recta a partir de dos puntos (E02), la idea de límite como tendencia (E06) y el concepto de derivada de una función en un punto (E07) como límite del cociente incremental (considerando $x_1=x_0 + h$ en E02 y el límite cuando h tiende a 0). Al establecer esta relación podemos obtener que la pendiente de la recta límite (la recta tangente) es el valor de la derivada de la función en el punto x_0 considerado. Por lo que respecta a *la posición de la recta tangente* que nos permitirá obtener su ordenada en el origen, *n,* se considera el punto de tangencia (x_0, y_0) y mediante la ecuación punto-pendiente de una recta se obtiene la expresión analítica de la recta tangente (E31): $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

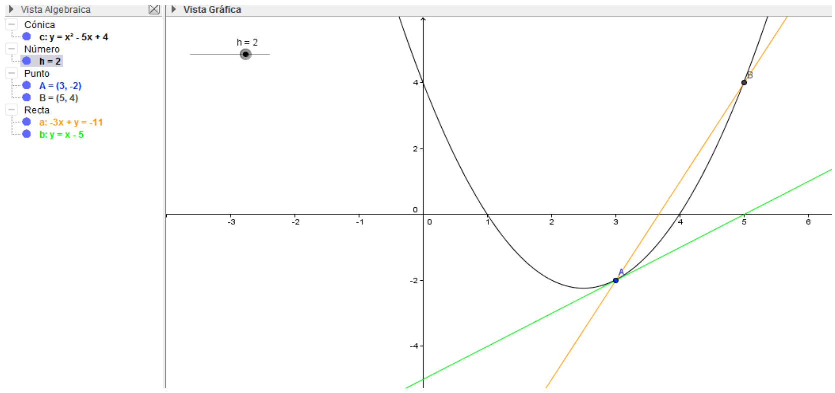
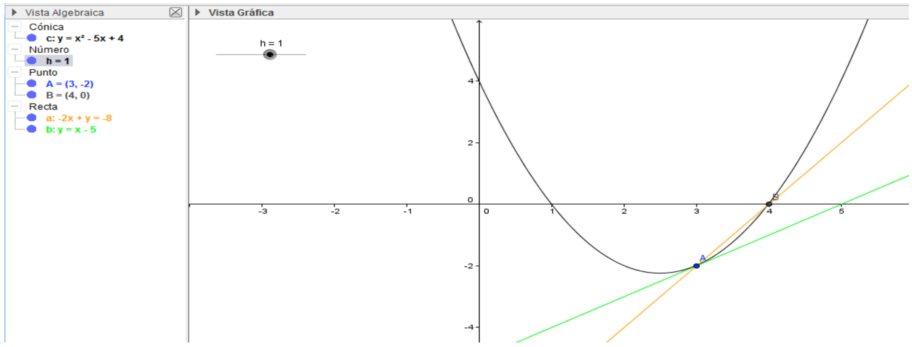
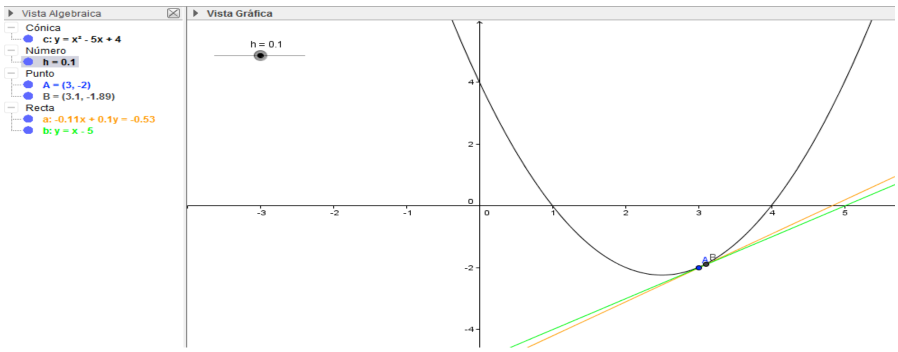
Rectas secantes convergiendo a recta tangente h=2	
h=1	
h=0.1 (para h=0 la recta secante y la tangente están superpuestas	

Figura 8. Uso de GeoGebra para generar el proceso cognitivo de aproximación al facilitar ver cómo las rectas secantes convergen a la recta tangente.

Para generalizar a la concepción cartesiana a partir de la concepción leibniziana debemos transitar desde una perspectiva geométrica a una analítica. Esto es, los estudiantes deben interiorizar la convergencia de las rectas secantes a la recta tangente de una manera gráfica para posteriormente obtener la expresión analítica de la recta tangente (definida previamente mediante la concepción leibniziana y de la que desconocíamos su ecuación) como el límite de las expresiones de las rectas secantes (de estas sí conocemos su ecuación). De esta forma la visualización, puesta de manifiesto por algún recurso tecnológico colocando en relación lo gráfico con lo analítico, permite crear las condiciones para coordinar la concepción cartesiana y la leibniziana, lo que posibilita obtener la ecuación analítica de la recta tangente (Tabla 4).

Tabla 4. *Generalización a la concepción cartesiana a partir de la concepción leibniziana*

E1RE2		Conocer como proceso la identificación de la recta tangente (E1) con la tendencia límite de E2
E03RE07		Conocer como proceso la identificación de la tendencia de las pendientes de las rectas secantes con la derivada de la función en el punto tangencia (pendiente de la recta tangente): $\lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$
E3		Recta tangente como objeto: $y\text{-}y_0 = f'(x_0)(x\text{-}x_0)$
	E31	Acción de hallar la ecuación de la recta tangente
	E32	Interiorizar la acción de determinar la ecuación de la recta tangente
	E33	Encapsular como objeto la idea de recta tangente, relación modo gráfico y analítico (ecuación)

4.5. Tematización del esquema de recta tangente

La tematización se da cuando los estudiantes amplían el tipo de funciones y puntos singulares en los que evaluar la existencia de rectas tangentes (Elemento E4). Así, la tematización implica la transición de la aplicación o uso implícito a un uso consciente de las propiedades de la recta tangente. Para ello, los estudiantes deben comprobar las propiedades de la recta tangente y razonar cuándo dos rectas que pasan por el mismo punto en una curva y cumplen ciertas condiciones del concepto de recta tangente pero no otras, son o no rectas tangentes a la curva en ese punto.

En este proceso de construcción del concepto de recta tangente juega un papel importante la idea de desencapsulación, pues permite ver la relación entre los mecanismos y elementos implicados en dicha construcción. La desencapsulación permite regresar desde el objeto al proceso que lo generó (Arnon et al., 2014). Para ello, por ejemplo, se pueden plantear actividades en las que se debe obtener la recta tangente paralela a otra recta dada u obtener un parámetro de una función para que las rectas tangentes en dos puntos diferentes sean paralelas.

La tabla 5 resume los elementos y características de la Descomposición Genética del concepto de recta tangente descrito.

Tabla 5. *Elementos y características de una Descomposición Genética del concepto recta tangente en el nivel de Bachillerato. E_i = Elementos matemáticos; E_iRE_j = Relaciones entre elementos.*

E0		Pre-requisitos
	E01	Reconocimiento como acción de puntos de una recta y de una función a partir de su abscisa a nivel gráfico y analítico
	E02	Conocer como acción el concepto de pendiente de una recta a partir de dos puntos (x_0, y_0), (x_1, y_1) (Cálculo): $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$
	E03	Conocer como proceso el concepto de pendiente de una recta como medida de la razón de crecimiento de dicha recta

	E04	Conocer como proceso la idea de recta (forma analítica): Identificar y hallar puntos de una recta
	E05	Conocer como objeto la idea de recta: Ecuación punto-pendiente de una recta: $y\text{-}y_0= m(x\text{-}x_0)$
	E06	Conocer como proceso el límite como tendencia
	E07	Conocer como proceso el concepto de derivada de una función en un punto: $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
	E08	Conocer como objeto el concepto función derivada
E1		Linealidad local de una función en un punto
	E11	Acción de aplicar varios zoom sobre una función en un determinado punto
	E12	Interiorización de la acción E11 en un proceso
	E13	El objeto de concebir, localmente, la función como un segmento cuya prolongación se definiría como recta tangente (mejor aproximación lineal)
E2		Sucesión de rectas secantes
	E21	Acción de crear rectas secantes manteniendo un punto fijo y acercando otro punto al fijo
	E22	Interiorización de la acción de crear sucesiones de rectas secantes (E21) en un proceso
	E23	Encapsulación como objeto de la idea de sucesión de recta secante
E1RE2		Conocer como proceso la identificación de la recta tangente (E1) con la tendencia limite de E2
E03RE07		Conocer como proceso la identificación de la tendencia de las pendientes de las rectas secantes con la derivada de la función en el punto tangencia (pendiente de la recta tangente): $\lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$
E3		Recta tangente como objeto: $y\text{-}y_0=f'(x_0)(x\text{-}x_0)$
	E31	Acción de hallar la ecuación de la recta tangente
	E32	Interiorizar la acción de determinar la ecuación de la recta tangente
	E33	Encapsular como objeto la idea de recta tangente, relación modo gráfico y analítico (ecuación)
E4		Tematización del esquema de recta tangente
	E41	Desencapsulación del objeto recta tangente

5. Descomposición Genética del concepto de recta tangente como referencia en una trayectoria hipotética de aprendizaje

La progresión en la comprensión que se considera en esta Descomposición Genética está enraizada en la forma en que asumimos se da el aprendizaje conceptual (Simon et al., 2004), y por los objetivos de aprendizaje pretendidos en el nivel curricular del Bachillerato. La progresión descrita tiene en cuenta las ideas núcleo que organizan el significado que constituye la recta tangente (análisis epistemológico) vinculando el conocimiento procedimental y conceptual (sucesión de rectas secantes, relación con el cociente incremental y limite). La Descomposición Genética generada en esta investigación conjetura la naturaleza de las estructuras cognitivas y del razonamiento de los estudiantes mediante diferentes formas de conocer los elementos matemáticos y considerando los mecanismos de construcción del conocimiento. De esta manera y como ya hemos indicado, la Descomposición Genética para la recta tangente se articula a través de cinco fases:

1. adquisición de los pre-requisitos
2. construcción de la concepción leibniziana: mejor aproximación lineal a una curva
3. construcción de la concepción cartesiana: límite de rectas secantes
4. generalización a la concepción cartesiana a partir de la concepción leibniziana
5. tematización del esquema de recta tangente mediante el uso consciente de sus propiedades

Los elementos usados para describir las progresiones en el aprendizaje de la recta tangente permiten estar en disposición de fundamentar los experimentos de enseñanza (Simon et al., 2004; Clements & Sarama, 2004). Los resultados previsibles de estos experimentos de enseñanza aportarán información sobre características de trayectorias de aprendizaje (Battista, 2011). Estas trayectorias de aprendizaje deben ser entendidas como descripciones detalladas de las secuencias de ideas, estrategias y formas de pensar que un estudiante emplea mientras se implica en el aprendizaje de la recta tangente (considerando cómo el estudiante interacciona con otros y con las tareas instruccionales). De esta manera, esta investigación se sitúa en la intersección de tres constructos teóricos usados en Educación Matemática, la Descomposición Genética de un concepto, la Progresión en el aprendizaje y el significado dado a Trayectoria de aprendizaje. La descripción de la Descomposición Genética del concepto mostrada en este trabajo debe ser entendida como una manera de caracterizar la progresión en el aprendizaje y, por tanto, ser vista como una parte de una "trayectoria de aprendizaje hipotética" (Simon, 1995) al definir un objetivo de aprendizaje (la tematización del concepto de recta tangente con alumnos de Bachillerato).

Esta investigación aporta información al debate entre los significados dados a la idea de progresión en el aprendizaje y las diferentes maneras de entender la noción de trayectoria de aprendizaje (hipotética o real) (Battista, 2011; Clements & Sarama, 2004; Simon & Tzur, 2004; Weber, Walkington & McGalliard, 2015). Así, la diversidad de las fuentes de datos usadas (análisis epistemológico, análisis curricular a través de libros de texto y análisis cognitivo a partir de las respuestas de alumnos a un cuestionario) ha permitido generar información de diferente naturaleza permitiéndonos inferir características relevantes para describir la progresión en el aprendizaje. Como consecuencia, la información sobre la progresión en el aprendizaje dada en la Descomposición Genética puede ser considerada una trayectoria de aprendizaje hipotética en el sentido de Simon y Tzur (2004). Esta trayectoria hipotética aporta información para el diseño de una secuencia de enseñanza-aprendizaje dirigida a apoyar los mecanismos cognitivos que permitan mover a los estudiantes hacia niveles de pensamiento más sofisticados hasta llegar a la tematización del concepto de recta tangente. En este segundo paso, es cuando es posible adoptar la perspectiva de Clements y Sarama (2004) sobre la idea de trayectoria de aprendizaje ya que en este momento se deben especificar tareas instruccionales que promueven y evalúan la progresión a través de los niveles de pensamiento que son considerados como parte constitutiva de una trayectoria de aprendizaje (Battista, 2004).

Agradecimientos.

Esta investigación ha recibido el apoyo parcial del Proyecto I+D+i EDU2014-54526-R del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *Apos Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. London: Springer.

Artigue, M. (1991). Analysis. En D.O. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 167-198). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Battista, M. (2004). Applying cognition based assesment to elementary school students' development of understanding of area and volume measurement. *Mathematical Thinking and Learning*, 6 (2), 185-204.

Battista, M. (2011). Conceptualizations and issues related to Learning Progressions, Learning Trajectories, and Levels of Sophistication. *The Mathematics Enthusiast, 8*(3), 507-570.

Biza, I., Christou, C. & Zachariades, T. (2008). Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis. *Research in Mathematics Education, 10(1), 53-70.*

Biza, I., Nardi, E. & Zachariades, T. (2009). Teacher beliefs and the didactic contract on visualisation. *For the learning of Mathematics, 29*(3)*,* 31-36.

Biza, I., Nardi, E. & Zachariades, T. (2010). Teachers' views on the role of visualization and didactical intentions regarding proof. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 261-270). Lyon, Francia: INRP.

Biza, I. & Zacharides, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line*. The Journal of Mathematical Behavior 29*(4)*,* 218-229.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 4*(2), 165-198.

Canul, E., Dolores. C. & Martínez-Sierra, G. (2011). De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(2), 173-202.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures: Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *15*(1), 7-47.

Clements, D.G. & Sarama, J. (2004). Learning Trajectories in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-89.

Collette, J. (1991). *Historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.

Conejo, L., Arce, M. & Ortega, T. (2015). Análisis de las justificaciones de los teoremas de derivabilidad en los libros de texto desde la Ley General de Educación. *AIEM. Avances de Investigación en Educación matemática, 8,* 51-71.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D.O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

González, P. (1992). *Las raíces del cálculo infinitesimal en el siglo XVII.* Madrid: Alianza.

González, M.T. & Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(39), 389-408.

Harel, G. & Tall, D. O. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the learning of mathematics, 11* (1), 38-42.

Maschietto, M. (2008). Graphic Calculators and micro-straightness: Analysis of a didactic engineering. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 13*, 207-230.

Milani, R. & Baldino, R. (2002). The theory of limits as an obstacle to infinitesimal analysis. En A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 345-352). Norwich, Reino Unido: University of East Anglia.

Ortega, T. & Sierra, M. (1998). El concepto de derivada: algunas indicaciones para su enseñanza. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 32, 87-115.

Páez, R. & Vivier, L. (2013). Teachers' conception of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(2), 209-229.

Robles, M.G., Del Castillo, A.G. & Font, V. (2010). La función derivada a partir de una visualización de la linealidad local. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 523-532). Lleida: SEIEM.

Roig, A.I., Llinares, S. & Penalva, M. (2012). Different Moments in the Participatory Stage of the Secondary Students' Abstraction of Mathematical Conceptions. *BOLEMA, 26*(44), 1345-1366.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Simon, M. (2014). Hypothetical Learning Trajectories in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 272-275). London: Springer.

Simon, M.A., Tzur, R., Heinz, K. & Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 305-329.

Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the Role of mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Tall, D. O. (1985). Chords, Tangents and the Leibniz Notation. *Mathematics Teaching*, 112, 48-52

Tall, D. O. (1987). Constructing the concept image of a tangent. En J.C. Bergeron, N. Herscovics & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp.69-75). Montreal, Canadá: PME.

Tzur, R. & Simon, M. A. (2004). Distinguishing two stages of mathematics conceptual learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *2*, 287-304.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. En D.O. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Vivier, L. (2010). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. *Annales de Didactique et de Sciencies Cognitives*, 15, 173-199.

Weber, E., Walkington, C. & McGalliard, W. (2015). Expanding Notions of “Learning Trajectories” in Mathematics Education. *Mathematical Thinking and Learning, 17*(4), 253-272.

Anexo I: textos utilizados en el análisis

Arias, J.M. y Maza, I. (2008). *Matemáticas I*. Madrid: Grupo Editorial Bruño.

Arias, J.M. y Maza, I. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Grupo Editorial Bruño.

Arias, J.M. y Maza, I. (2009). *Matemáticas II*. Madrid: Grupo Editorial Bruño.

Arias, J.M. y Maza, I. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: Grupo Editorial Bruño.

Antonio, M., González, L., Lorenzo, J., Molano, A., del Río, J., Santos, D. y de Vicente, M. (2008). *Matemáticas I*. Madrid: Santillana Educación.

Antonio, M., González, L., Lorenzo, J., Molano, A., del Río, J., Santos, D. y de Vicente, M. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Santillana Educación.

Cólera, J., Oliveira, M., García, R. y Santaella, E. (2008). *Matemáticas I*. Madrid: Anaya.

Cólera, J., Oliveira, M., García, R. y Santaella, E. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Anaya.

Cólera, J. y Oliveira, M. (2009). *Matemáticas II*. Madrid: Anaya.

Cólera, J. y Oliveira, M. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: Anaya.

Escoredo, A., Gómez, M., Lorenzo, J., Machín, P., Pérez, C., del Río, J. y Sánchez, D. (2009). *Matemáticas II*. Madrid: Santillana Educación.

Escoredo, A., Gómez, M., Lorenzo, J., Machín, P., Pérez, C., Rey, M., del Río, J. y Sánchez, D. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: Santillana Educación.

Vizmanos, J.R., Hernández, J. y Alcaide, F. (2008). *Matemáticas I*. Madrid: SM.

Vizmanos, J.R., Hernández, J. y Alcaide, F. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: SM.

Vizmanos, J.R., Hernández, J. y Alcaide, F. (2009). *Matemáticas II*. Madrid: SM.

Vizmanos, J.R., Hernández, J. y Alcaide, F. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II*. Madrid: SM.

Referencias a los autores

Abilio Orts, IES Guadassuar (España), abilioorts@gmail.com

Salvador Llinares, Universidad de Alicante (España), sllinares@ua.es

Francisco Boigues, Universidad Politécnica de Valencia (España), fraboipl@mat.upv.es

Elements for a Genetic Decomposition of the tangent line concept

Abilio Orts, IES Guadassuar (España)

Salvador Llinares, Universidad de Alicante (España)

Francisco José Boigues, Universidad Politécnica de Valencia (España)

The goal of this research is to characterize high school students' construction of the meanings to tangent line concept. We report the generation of a Genetic Decomposition of the tangent line concept as a high school students' learning progression. We integrate information from three perspectives: epistemological, curricular and cognitive.

This epistemological study allowed to identify three conceptions of the tangent line: 1) as a line that touches a curve without cutting it (Euclidean conception); 2) as the limit of the secant lines (Cartesian conception) and 3) the Leibnizian conception when we consider a curve formed by infinitesimal segments, and if we prolong the segment where the point is, we get the tangent line. The curricular analysis in our country indicates that students have their first contact with the tangent line in secondary school in relation to tangent line to a circumference. As a consequence, students come to know the Euclidean concept of tangent line that is only valid for conical. Next, they progress in the curriculum, after studying the concepts of limit and derivate, they become to know the Cartesian conception of tangent line concept. But this skip is an epistemological obstacle for them. Students often find difficult to relate Euclidean and Cartesian conception. For this reason, we introduce the Leibnizian conception as a way to overcome this disconnection. In this process, the idea of local linearity plays a crucial role. Finally, the cognitive analysis indicated different characteristics that we should take into account to support the learning progression.

The information from these three perspectives allow us to consider the learning progression of tangent line concept articulated through two characteristics: (i) the integration of local analytical and geometrical perspectives, and (ii) the coordination of Leibnizian conception and the Cartesian conception as a mean to overcome the obstacles derived from the Euclidean conception.

From the different data sources we generate a Genetic Decomposition of line tangent concept as a hypothetical learning trajectory. This Genetic Decomposition of line tangent concept has been articulated in five stages: 1. acquisition of the pre-requisites; 2. construction of the Leibnizian conception as the best linear approximation to the curve; 3. construction of Cartesian conception as the limit of secant lines; 4. generalization to the Cartesian conception from the Leibnizian conception and 5. thematization of the scheme of tangent line by the conscious use of their properties.

Finally, we situated our findings into the debate about the different ways to understand the “learning trajectories” and “learning progressions” constructs in mathematics education in the domain of teaching of Calculus in secondary school.