SUMA 48

Febrero 2005, pp. 33-43

Una evaluación de habilidades matemáticas

Durante un curso pre-universitario de Matemáticas en la Universidad Nacional de General Sarmiento se aplicó una evaluación para conocer la brecha en el aprendizaje de ciertas habilidades matemáticas de los alumnos. Se han diseñado los instrumentos de modo de poder tener información sobre la brecha individual que se mide en función de la diferencia entre las respuestas de un mismo alumno al comienzo y al final del curso. Se han evaluado habilidades matemáticas de diversa complejidad respectivamente que están relacionadas entre sí. Se presentan aquí las características, los criterios, los instrumentos y el análisis de los resultados obtenidos.

At a pre-university maths course at the Universidad Nacional de General Sarmiento (Argentina) assessment was given to the undergraduates in order to learn about their gap in learning abilities. Tools were devised to find about the individual gap measuring the difference between a specific student's answers at the beginning and at the end of the course. Through both exams interrelated maths abilities were assessed, of both high and low complexity.This paper looks at the pre-university course features, the assessment criteria and its tools, as well as the results obtained.

La Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), localizada en el conurbano bonaerense, tiene como primera etapa curricular de carácter obligatorio para todos los aspirantes a ingresar en ella el Curso de Aprestamiento Universitario (CAU). El CAU consta de dos asignaturas, Matemática y Taller de Lecto-Escritura. Actualmente existen dos modalidades para cursar el CAU:

- el CAU Regular,
- el CAU Complementario (CAUC).

El C.A.U regular tiene una duración de ciento cuatro horas distribuidas a lo largo de seis meses, mientras que el CAUC es de desarrollo intensivo, con una duración de 60 horas y se lleva a cabo en sólo seis semanas entre enero y febrero de cada año.

El contexto en el que este trabajo se realizó es el de Matemática del CAUC 2004, dictado en los meses de enero y febrero. Por esta razón detallamos las características centrales de este curso que ayudan a comprender el planteo del problema que estudiamos aquí.

Cualquier estudiante egresado del nivel medio puede inscribirse en el CAU regular, no así en el CAUC Éste está destinado centralmente a estudiantes que, por diversos motivos, ya posean algunos de los conocimientos de Matemática que incluye el curso. Este requisito hace que confluyan en el CAUC dos tipos de estudiantes: aquellos que han tenido acceso a más años de formación en otras instituciones o quienes han cursado[1], sin aprobarlo, el CAU regular. De este modo el CAUC convoca a estudiantes que, por ejemplo, han egresado de colegios de nivel medio que brindan preparación técnica (el nivel medio en estos colegios es de seis años mientras que en los otros es de sólo cinco años), han aprobado ingresos en otras universidades nacionales, o bien han aprobado cierta cantidad de materias en carreras universitarias o terciarias.

Esta modalidad complementaria tiene por objetivos:

- completar la capacitación de los estudiantes del CAU regular que no hayan aprobado alguna de las dos asignaturas,
- brindar un aprestamiento intensivo a aquellos aspirantes que hayan obtenido habilidades y conocimientos por otros medios.

Mabel Rodríguez
Gustavo Carnelli
Alberto Formica
Universidad Nacional de General Sarmiento. Buenos Aires.

Por alguna de las razones antes mencionadas, los estudiantes disponen al comienzo del curso de conocimientos matemáticos que deberán complementar y ajustar para ingresar en la Universidad. El objetivo que nos planteamos es identificar qué conocimientos, en términos de habilidades, tienen disponibles los estudiantes al inicio del CAUC (habilidades de baja complejidad) y cómo evoluciona su saber hacia el final del curso (habilidades de mayor complejidad). Una de las principales razones que justifican este trabajo es que este tipo de análisis nos podría permitir, en una segunda instancia, elaborar hipótesis que relacionen el logro de habilidades complejas en función de las habilidades simples disponibles al comienzo del curso. Una vez corroboradas éstas, podrían proponerse ajustes en la propuesta de enseñanza con un sustento empírico y teórico sólido.

> "No se puede separar el saber
> del saber hacer, porque siempre
> saber es saber hacer algo;
> no puede haber un
> conocimiento sin una habilidad,
> sin un saber hacer."
> Talizina

Acordamos con los principios del National Council of Teaching Mathematics Standards (Schoenfeld, 1992) que establecen:

> La Matemática es un tema viviente que intenta entender patrones que atañen tanto al mundo circundante como a nuestra mente. Aunque el lenguaje de la Matemá-tica está basado en reglas que deben ser aprendidas, es importante para la motivación que los estudiantes se muevan más allá de las reglas para ser capaces de expresar cosas en el lenguaje de la Matemática. Esta transformación sugiere cambios en el contenido curricular y en el estilo instruccional. Involucra renovados esfuerzos para centrarse en:
>
> - Buscar soluciones, no simplemente memorizar procedimientos
>
> - Explorar patrones, no simplemente memorizar fórmulas
>
> - Formular conjeturas, no simplemente hacer ejercicios.
>
> Cuando la enseñanza empiece a reflejar estos énfasis, los estudiantes tendrán la oportunidad de estudiar Matemática como una disciplina exploratoria, dinámica, en evolución, en vez de un cuerpo cerrado, rígido, absoluto de leyes a memorizar. Tendrán valor para ver la Matemática como una ciencia, no como un canon y reconocer que la Matemática se trata de patrones y no simplemente de números. (National Research Council, 1989, pg. 84)[2]

De esta forma es que concebimos el aprendizaje de la Matemática como una construcción social, donde el estudiante tiene un rol activo de trabajo con la Matemática. La siguiente frase describe la génesis del conocimiento matemático en relación con la actividad matemática que realiza el estudiante.

> La génesis del conocimiento matemático se produce como consecuencia de la actividad del sujeto enfrentado a situaciones problemas y haciendo uso de los elementos ostensivos e intensivos disponibles (Godino, 1998).

Consideraremos como actividad matemática aquel tipo de actividad implicada en la solución de cierta clase de situaciones problemáticas de la cual emergen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos.

La actividad matemática puede ser descrita en términos de las siguientes entidades (Godino, 1998):

- Ostensivas: representaciones materiales usadas en la actividad matemática (términos, expresiones, símbolos, tablas, gráficos). Se incluyen las entidades lingüísticas y notacionales.
- Extensivas: las entidades fenomenológicas que inducen actividades matemáticas (problemas, situaciones, aplicaciones).
- Intensivas: ideas matemáticas, abstracciones, generalizaciones, métodos (conceptos, proposiciones, teorías, técnicas, algoritmos).
- Actuativas: acciones del sujeto ante situaciones o tareas (describir, operar, argumentar, generalizar, etc.). Esta categoría tiene que ver con la génesis del conocimiento matemático, de acuerdo con las teorías constructivistas, los actos de las personas son la fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas.
- Afectivas: creencias, preferencias, etc.

Las *habilidades matemáticas* forman parte de la actividad matemática y pueden distinguirse entre las entidades actuativas. Consideramos que las entidades actuativas podrían incluir, además de las habilidades matemáticas, ciertas actividades exploratorias, asistemáticas o de indagación que no lleguen a conformar una habilidad matemática en el sentido que a continuación mencionamos. D. Rubí (1997) describe tres requerimientos que se han tenido en cuenta para determinar habilidades matemáticas generales:

a) que sean propias del quehacer matemático,
b) que sean generales como para que estén presentes en distintos niveles de escolaridad y
c) que resulten imprescindibles para la formación matemática.

Consideramos, sin ser exhaustivos sino a modo de ejemplo, las siguientes habilidades matemáticas: representar, comparar, resolver, estimar, operar, seleccionar, argumentar, reconocer estructuras, aproximar, calcular, razonar, simbolizar, justificar, etc. En el artículo mencionado puede encontrarse un listado de habilidades matemáticas con sus definiciones y ejemplos de cada una de ellas. Distintos autores especialistas en Educación han trabajado con habilidades en términos generales, sin dedicarse específicamente a Matemática. En algunos trabajos las habilidades cognitivas se presentan agrupadas y jerarquizadas en términos de complejidad. En este trabajo consideraremos distintos tipos de habilidades matemáticas según su complejidad, como indicamos en la sección 2.

M. de Guzmán Ozámiz (1993) plantea que en el conocimiento matemático, y en la Matemática como ciencia, predomina el método sobre el contenido, el saber hacer sobre el saber. Por otra parte, Talizina (1985) establece que *"no se puede separar el saber del saber hacer, porque siempre saber es saber hacer algo; no puede haber un conocimiento sin una habilidad, sin un saber hacer"*. De un modo u otro, las habilidades matemáticas ocupan un lugar central en el aprendizaje de la Matemática y en este trabajo nos centramos en diseñar una evaluación sobre algunas de ellas.

Método utilizado: diseño de la evaluación

Para obtener la información sobre las habilidades matemáticas en alumnos del CAUC 2004 diseñamos una evaluación que consta de dos instancias: un diagnóstico y un examen final, que detallamos en las secciones que siguen.

Trabajamos con un universo formado por los 521 estudiantes que asistieron a clase el primer día, de modo que en este trabajo no hemos considerado una muestra. Para poder llevar a cabo el análisis ha sido imprescindible tener información de las dos instancias de evaluación, diagnóstico y final. De esta forma hemos tomado en cuenta los 431 casos de los que dispone la información de la evaluación completa.

La evaluación a partir de la cual intentamos conocer la brecha en el aprendizaje individual de los alumnos, constó de: el diagnóstico y el examen final. Para medir el salto en los aprendizajes en el breve período del CAUC, se definió la evaluación partiendo de que la última instancia que formara parte de ésta fuera el final, instancia de acreditación del curso. Esto se debe a que, por falta de tiempo en el curso, cualquier otro examen adicional hubiera requerido disponer más horas de clase, lo que hubiera complicado el desarrollo de la materia.

La *brecha individual* se midió con ejercicios que relacionaran habilidades de baja y alta complejidad respectivamente para distintos contenidos matemáticos y en función de la diferencia entre las respuestas de un mismo alumno al comienzo y al final del curso.

Diseño del diagnóstico

Elegimos los contenidos y habilidades matemáticas del examen con el siguiente criterio: incluimos habilidades de baja complejidad que surgen de descomponer aquellas habilidades más complejas que se exigen al finalizar el curso. Hemos incluido muy pocos ítems que requieran conocer terminología específica que se enseña en el curso (imagen, dominio, asíntotas, etc.).

Los contenidos elegidos fueron: operatoria aritmética, álgebra y funciones, principalmente. Los contenidos del CAUC son: conjuntos numéricos, álgebra, geometría, modelización a través de funciones elementales (lineales, cuadráticas, polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas).

Los objetivos que se persiguen en cuanto a los conocimientos y habilidades matemáticas son:

- Evaluar expresiones numéricamente.
- Operar y comparar fracciones.
- Interpretar datos de funciones (ceros, pertenencia de puntos, positividad, puntos de encuentro, dominio, imagen) a partir de un gráfico.
- Hacer un gráfico que responda a datos (ceros, puntos, positividad, dominio, imagen) dados.
- Reconocer elementos (hipotenusa, cateto opuesto a un ángulo, base, altura) de un triángulo.
- Utilizar, si corresponde, el teorema de Pitágoras.
- Decidir si un valor es o no solución de una ecuación o de una inecuación.
- Hallar el conjunto solución de una ecuación lineal y cuadrática.
- Reconocer la diferencia de cuadrados y el cuadrado de un binomio.
- Aplicar el desarrollo del cuadrado de binomio y la distributividad.

Por el criterio expresado anteriormente, no hemos incluido como objetivos en esta instancia aquéllos que son de complejidad mayor como por ejemplo plantear problemas, modelizar, argumentar, etc.

El tipo de prueba (ver anexo) que hemos elegido es estructurada (Cami-lloni et al, 1998) con preguntas para completar las respuestas. Sólo en el ítem 1) a), referido centralmente a la operatoria aritmética, se incluye el desarrollo. En el el ítem 5) c), en el que se requiere reconocer diferencia de cuadrados y cuadrado de binomio, hemos propuesto opciones múltiples pero no hay sólo una respuesta correcta, sino varias y la cantidad de ellas no es dato. Hemos optado por no diseñar un examen de opción múltiple sólo para evitar las respuestas al azar. Una prueba de opción múltiple (que no incluyera entre las opciones una que fuera *ninguna de las anteriores*) ofrece la posibilidad de revisar los cálculos si acaso el estudiante no encuentra entre las soluciones propuestas la misma que halló, con lo cual se pone énfasis en lograr *precisión* en las respuestas. Con esta prueba también se pone énfasis en lograr precisión, tanto en los cálculos como en las observaciones de gráficos, en la producción de ellos, etc.; sólo se pierde la posibilidad de interactuar con las múltiples respuestas y, eventualmente, corregir los resultados. Diseñamos una prueba en la que no se incluye el desarrollo de los ejercicios, pues la redacción, simbolización, organización de ideas, etc., son cuestiones complejas que comienzan a enseñarse durante el curso y que, en general, no están presentes en los alumnos al inicio del mismo. Hacia fines del curso se logra evolución, aunque no un resultado acabado. Por otra parte, se agiliza la corrección, permitiendo una rápida devolución a los estudiantes. El examen final tuvo una estructura y características similares, aunque incluimos un ítem de desarrollo.

Para la corrección de la evaluación (diagnóstico y final) elaboramos una grilla de corrección que sistematizó la información y que se mostró a los alumnos, junto con el examen diagnóstico, para que ellos conocieran su estado inicial de conocimientos. Tal como se describió en Figliola, et al. (2001), es importante en esta instancia el papel del docente en el apoyo de quienes hayan resuelto incorrectamente el examen. El examen y la grilla se conservaron para disponer de las evidencias y como información para relacionar los resultados de la prueba inicial y la final. La grilla facilitó el análisis estadístico sobre la prueba.

Se incluye en el anexo el examen diagnóstico.

Diseño del final

Teniendo en cuenta el criterio con el que fue diagramado el diagnóstico, diseñamos el final incluyendo un tipo de habilidades más complejas que las incluidas en el diagnóstico, habilidades que se espera que los alumnos hayan alcanzado hacia el término del CAUC.

Incluimos todos los contenidos del curso, salvo función exponencial y logarítmica. Las habilidades más complejas, que se suman a las presentes en el diagnóstico, y que se requieren en el final, son:

- Interpretar enunciados.
- Elegir estrategias de resolución de problemas.
- Plantear la búsqueda de información intermedia que será requerida para responder las consignas.
- Interpretar un proceso a partir de un gráfico.
- Plantear una expresión funcional que describe un proceso.
- Obtener datos (ceros, positividad, imagen, etc.) a partir de una función dada por su expresión algebraica.
- Hacer un gráfico con los datos que el alumno debió hallar analíticamente.
- Interpretar soluciones de inecuaciones en gráficos que debe hacer el alumno.

La tabla de la página siguiente muestra la relación entre los ítems del diagnóstico y del final, incluyendo las diferencias en el nivel de exigencia de las habilidades específicas.

Elegimos un tipo de prueba coherente con el diagnóstico, incluyéndose un ejercicio que el alumno debe desarrollar en la hoja (ejercicio 3).

Para la corrección del final asignamos puntajes que figuran al lado de cada ítem. Los datos que se incluyen en la grilla de corrección de la evaluación son:

PUNTAJE TOTAL DIAGNOSTICO: .../40
NOTA D: … Esta nota resulta de dividir por 4 el puntaje total del diagnóstico.

PUNTAJE TOTAL FINAL: .../40
NOTA F: ... Esta nota resulta de dividir por 4 el puntaje total del final.

Al final de la grilla de corrección del diagnóstico aparece una tabla (tabla 1) en la que se volcaron los datos de los ítems que relacionan el diagnóstico con el final, pudiéndose así observar rápidamente la brecha en el aprendizaje para cada alumno de los contenidos involucrados. Los ítems relacionados tienen el mismo puntaje tanto en el diagnóstico como en el modo de comparar, en la tabla mencionada, las brechas con sólo restar los puntajes obtenidos. El final se aprobó con 16 puntos (que equivalen a 4 puntos en la escala de 1 a 10) y con un ejercicio completo bien.

	Del Diagnóstico	Del Final	F – D	Sobre un total de puntos
	1)d)………….	1)a)………….	A = ………..	2 puntos
I	1)c)………….	2)a)………….	B = ………….	2 puntos
T	2)…………….	3)…………….	C = ………….	6 puntos
E	3)…………….	4)…………….	D = ………….	11 puntos
M	4)…………….	5)b)………….	E = …………..	6 puntos
S	5)…………….	5)a)………….	F = ………….	9 puntos

Brecha promedio: BP = ………….

Tabla 1

Calculamos la brecha promedio del alumno, BP, que es un valor entre 0 y 10 y representa el promedio ponderado de las brechas de los ítems habiendo *normalizado* el puntaje de cada ítem a 10 puntos. Se calcula:

ANEXO

DIAGNÓSTICO MATEMÁTICA C.A.U.C. 2004

APELLIDO Y NOMBRES:………………………………………………………DNI:……………………

Ejercicio 1) Dadas las siguientes ecuaciones e inecuaciones, se pide:

a) Verificar que el valor x = 1 no es una solución de la ecuación A. (Resolverlo en el espacio dejado a continuación)

………

………

………

b) ¿Verifica el valor x = 1 la inecuación B?

SI: …… PORQUE……………………………………………………………………………………

ó

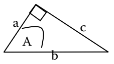
NO: …… PORQUE ……………………………………………………………………………………

c) El conjunto solución de la ecuación A es:……………………………………………………………

d) El conjunto solución de la ecuación C es:……………………………………………………………

ECUACION A	INECUACION B	ECUACION C
$\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}=\frac{x-2}{6}+\frac{3}{2}$	$\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}\geq\frac{x-2}{6}+\frac{3}{2}$	$(x-1)^2-2=3x(x-1)-1$

Ejercicio 2) Dado el siguiente triángulo, completar:



a) El área del triángulo es: área = …………………

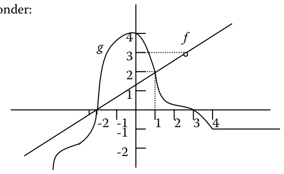
b) Conociendo los valores de los lados a y b, el lado c se puede calcular haciendo

c = ………………pues:………………

c) El cateto opuesto al ángulo A es: ……………………

d) La hipotenusa del triángulo es:………………………

Ejercicio 3) A partir de la información del siguiente gráfico responder:



a) Todos los ceros de *g* son:……………………………………

b) *f* se anula en:……………………………………………

c) *g* es positiva para los valores de x en:…………………

d) la imagen de *g* es: Im(*g*) = ……………………………

e) La imagen de *f* es: Im(*f*) = ……………………………

f) *f* y *g* se cortan en los pares ordenados:…………………

g) *f*(1) = ……. *g*(0) = …………..

h) la inecuación *g*(x) > *f*(x) tiene conjunto solución:…………

Ejercicio 4) Hacer un gráfico de una función *f* que cumpla todas las condiciones siguientes:

x = 2 es un cero de *f*

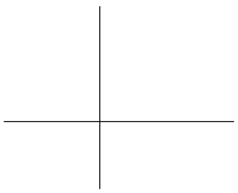
f(3) = -1

f(6) = 0

(4, 0) es un punto del gráfico de *f*.

f es positiva solamente en los intervalos (0; 2) y en (4; 6)

no existe *f*(5)



Ejercicio 5) Dada la función $f: R \to R$, $f(x)=(x^2-9).(x-2)^2$,

a) Completar la siguiente tabla de valores:

x	y
0	…
1	…
1/2	…
-2/3	…
-2	…

b) Todos los ceros de *f* son:………………………

c) Marcar, entre las siguientes, todas las expresiones equivalentes a *f*:

$(x^2-9).(x-2)(x+2)$	…..	$(x-3).(x+3).(x-2).(x+2)$	…..
$(x+3).(x-3).(x-2).(x-2)$	…..	$(x-3).(x-3).(x-2).(x-2)$	…..
$(x^2-9).(x^2+4)$	…..	$(x^2-4x+4).(x+3).(x-3)$	…..
$.(x-2)(x+3)(x-2)(x-3)$	…..	$(x-2)^2.(x^2-6x+9)$	…..
$(x-3)^2.(x-2)^2$	…..	$(x^2-9).(x^2-4)$	…..

FINAL MATEMÁTICA C.A.U.C. 2004

APELLIDO Y NOMBRES:………………………………………………………DNI:……………………

IMPORTANTE: EL FINAL SE APRUEBA CON POR LO MENOS 16 PUNTOS Y UN EJERCICIO COMPLETO BIEN

Ejercicio 1) Dada la ecuación $(x-2)^2-2x=\frac{1}{2}(10-4x)$ se pide:

…../2p a) Encontrar los valores de las dos soluciones que tiene la ecuación. Llamamos al menor de esos dos valores A y al mayor de ellos B.

Respuesta: A = ……………..y B = ……………..

…../2p b) Para los valores A y B hallados en el punto anterior se pide calcular el resultado de la resta A-B e indicar si dicho resultado es racional o irracional.

Respuesta: A-B = ……………………..y este número es:……………………..

Ejercicio 2)

…../2 a) Hallar el conjunto solución de la ecuación $\frac{2x-1}{3}+\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}x+2$

Respuesta: El conjunto solución es:…………………………………

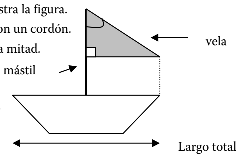
…../2 b) Hallar el conjunto solución de la inecuación $\left|\frac{2x-1}{3}+\frac{1}{2}\right|\geq-\frac{1}{3}x+2$

Respuesta: El conjunto solución es:…………………………………

…../6p Ejercicio 3) Se quiere fabricar la vela de un barco como muestra la figura. La vela es de tela plástica y lleva en todo su contorno un adorno hecho con un cordón. El largo total del barco es de 15 metros y el mástil está ubicado justo en la mitad. El ángulo señalado es de 60º.

a) Calcular cuánta tela es necesario comprar para hacer la vela.

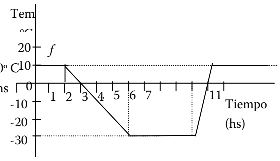
b) Calcular cuánto cordón es necesario comprar para hacerle el adorno que bordea la vela.



RESOLVER AL DORSO DE LA HOJA IMPRESA

JUSTIFICAR LOS PASOS.

…../11p Ejercicio 4) El siguiente es el gráfico de una función f que describe, en función del tiempo, la temperatura de una pieza A que se fabrica sometiéndola a calor y frío.



La temperatura que toma otra pieza B, que también se fabrica sometiéndola al calor y al frío, tiene un comportamiento lineal. por trozos.

Se sabe que a las 8 horas la pieza B tiene una temperatura de 10º C y la temperatura se estaciona en los 10º C, es decir desde las 8 hs en adelante la pieza conserva esta temperatura.

La pieza presenta una temperatura de 30º C bajo cero al comenzar el proceso.

Llamamos g a la función que describe la temperatura de la pieza B en función del tiempo

A partir de la información dada responder:

a) La temperatura de la pieza A fue nula en:……………………………………

b) La pieza B tuvo temperatura 0ºC en:……………………………………….

c) La pieza A tuvo temperatura positiva en:…………………

d) La imagen de f es: Im(f) = ………….

e) Las dos piezas tuvieron la misma temperatura en los momentos:…………………………………

f) La temperatura de la pieza A a las dos horas de haber empezado el proceso fue:…………………

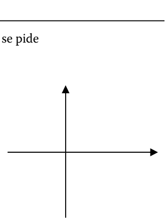
g) La inecuación g(x) > f(x) tiene conjunto solución:…………

h) Explicar qué significa, en el contexto del problema, la solución de la inecuación g(x) > f(x) ……………………………………………………………………………………………………

…../15 Ejercicio 5) Dada la función $f: A \subseteq R \to R$, $f(x)=\frac{(x^2-9).(x-2)^2}{(x-3)(x-2)}$, se pide

a) Hallar:

	Respuestas
Dom f	…………………………….
Ceros de f	…………………………….
El conjunto de positividad de f	…………………………….
El conjunto de negatividad de f	…………………………….
Asíntotas de f, si las tiene	…………………………….
Imagen de f	…………………………….



b) Con toda la información obtenida en el ítem anterior hacer un gráfico de la función.

ITEMS RELACIONADOS

DEL DIAGNÓSTICO		Se relaciona con	DEL FINAL	
Ej. Nº	Habilidades y contenidos que involucra. Grado de complejidad.	Ej. Nº	Habilidades y contenidos que involucra. Grado de complejidad.	
1) d)	Resolver una ecuación cuadrática. Debe hacer cuadrado de binomio y distributiva. Los coeficientes son enteros y la solución un entero y una fracción.	1) a)	Resolver una ecuación cuadrática. Debe hacer cuadrado de binomio y distributiva. Los coeficientes son racionales pero tras operar quedan enteros. Las soluciones son irracionales. Debe trabajar sin redondear las soluciones para responder el 1) b)	
1) c)	Se pide hallar la solución de una ecuación lineal que presenta operatoria con fracciones. En el ítem 1) a) el alumno verificó que un valor dado no es solución, lo que puede servirle para chequear su respuesta.	2)a)	Se pide hallar la solución de una ecuación lineal que presenta operatoria con fracciones.	
2)	Se da un triángulo rectángulo en una posición no "clásica" con nombres en sus lados y un ángulo marcado. El alumno debe reconocer cuál es la hipotenusa, cuál es la base y la altura para calcular el área, cuál es el cateto opuesto al ángulo marcado, y debe aplicar Pitágoras para dejar indicado cómo calcularía uno de los lados en función de los otros.	3)	Se da un problema que involucra un triángulo rectángulo al que se le deben calcular uno de sus lados mediante trigonometría. Debe calcular el área y el perímetro. Es necesario que identifique el cateto opuesto al ángulo marcado y debe hallar, usando Pitágoras o trigonometría, el otro lado faltante.	
3)	Se da una figura que tiene los gráficos de dos funciones, una lineal y otra que no lo es. A partir de los gráficos se pide información de tipo: ceros, imagen, intersecciones, dónde una de las funciones es mayor que la otra, valores numéricos, etc.	4)	Se da una figura que tiene el gráfico de una función que describe un proceso. Se da información sobre otro proceso lineal. Mediante la información dada se deberá hallar la expresión para responder las preguntas. Se quiere hallar el mismo tipo de información que en el diagnóstico (ceros, imagen, intersecciones, dónde una de las funciones es mayor que la otra, valores numéricos, etc.) pero se pregunta en relación al proceso, incluso también se pide interpretar qué significa el planteo de una inecuación.	
4)	Se da información (ceros, pares ordenados del gráfico, positividad, etc.) sobre una función y se le pide al alumno que haga un gráfico coherente con la información dada.	5) b)	Se le pide al alumno que haga un gráfico coherente con la información que él mismo tuvo que obtener a partir de una función dada por una expresión algebraica. A partir de ésta debe obtener cierta información (ceros, pares ordenados del gráfico, positividad, etc.) para el ítem a).	
5)	Se da la expresión de una función y se le pide al alumno hacer una tabla de valores y encontrar expresiones equivalentes. Aquí debe aplicar cuadrado del binomio y diferencia de cuadrados.	5) a)	La expresión dada es un cociente de polinomios factorizados que deben simplificarse. Para ello el alumno debe encontrar expresiones equivalentes mediante aplicar cuadrado del binomio y diferencia de cuadrados. Si no simplifica le será complicado hallar la información solicitada previo a la producción del gráfico.	

$$BP=(A\cdot 10/2+B\cdot 10/2+C\cdot 10/6+D\cdot 10/11+E\cdot 10/6+F\cdot 10/9)\cdot 1/6$$

donde los valores de *A, B, C, D, E* y *F* son los valores de la tercera columna de la tabla anterior. Este número debe tomarse en cuenta conjuntamente con las notas del diagnóstico y del final. (Notar que un alumno puede tener brecha 0 teniendo notas de 10 en ambos exámenes, ó 4 u otra).

En la tabla 1 se han volcado, en la primera y segunda columna respectivamente, los puntajes de los ítems del diagnóstico y del final que están relacionados. En la tercera columna, *F–D* se vuelcan los resultados de las diferencias entre la nota obtenida en el final y en el diagnóstico respectivamente y para cada ítem. Se incluye en el anexo el examen final.

Resultados obtenidos

Exponemos en esta sección los resultados obtenidos en el diagnóstico, en la prueba final y los correspondientes a las brechas. Al final se incluyen algunas conclusiones sobre el trabajo realizado.

Sobre el diagnóstico

Sobre la población de estudiantes que se han presentado a la prueba diagnóstica y también al examen final, que son en total 431, se encuentra que el curso fue aprobado por 221 alumnos y desaprobado por 210.

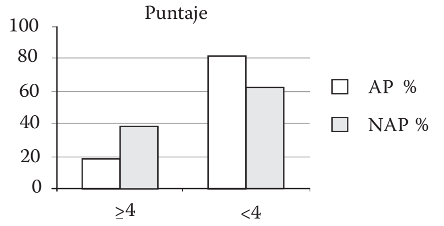
> *Miguel de Guzmán Ozámiz (1993) plantea que en el conocimiento matemático, y en la Matemática como ciencia, predomina el método sobre el contenido, el saber hacer sobre el saber.*

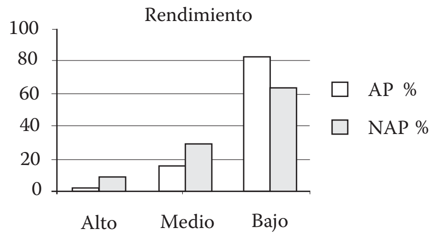
En todas las tablas y gráficos que siguen vamos a usar las notas *normalizadas* de 0 a 10 y las presentamos agrupadas en dos categorías. Con la primera de ellas clasificamos el resultado de cada ejercicio según su puntaje sea menor que 4 puntos o mayor o igual que él. Con la segunda categoría consideramos los puntajes asociados en tres grupos según el rendimiento observado: rendimiento alto (puntajes mayores o iguales que 7), rendimiento medio (puntajes mayores o iguales que 4 y menores que 7) y rendimiento bajo (puntajes menores que 4).

Las tablas y gráficos que siguen corresponden a los *resultados del diagnóstico según se aprobó o no el CAUC.*

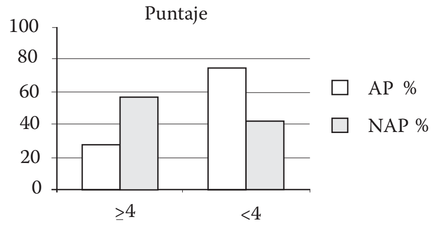
Referencias: AP: aprobaron el CAUC; NAP: no aprobaron el CAUC; Punt: puntaje; Cant: cantidad; %: porcentaje; Rend: rendimiento.

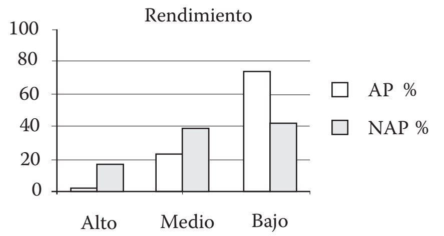
Ej. 1 (Ecuaciones e inecuaciones)										
	AP		NAP				AP		NAP	
Punt	Cant	%	Cant	%		Rend	Cant	%	Cant	%
≥4	40	18	79	38		Alto	6	3	18	9
						Medio	34	15	61	29
<4	181	82	131	62		Bajo	181	82	131	62



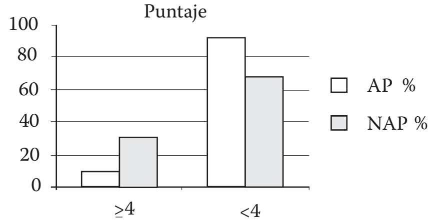


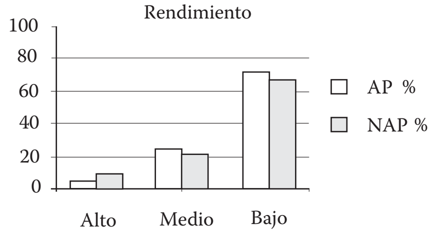
Ej. 2 (Geometría)										
	AP		NAP				AP		NAP	
Punt	Cant	%	Cant	%		Rend	Cant	%	Cant	%
≥4	60	27	119	57		Alto	9	4	37	18
						Medio	51	23	82	39
<4	161	73	91	43		Bajo	161	73	91	43



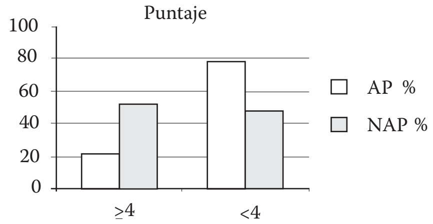


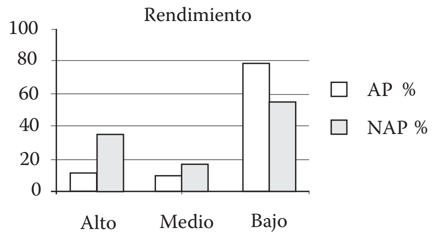
Ej. 3 (Interpretación de gráficos)										
	AP		NAP				AP		NAP	
Punt	Cant	%	Cant	%		Rend	Cant	%	Cant	%
≥4	21	10	68	32		Alto	5	4	23	11
						Medio	16	23	45	21
<4	200	90	142	68		Bajo	200	73	142	68



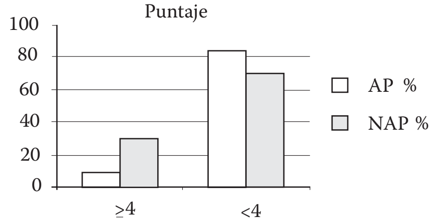


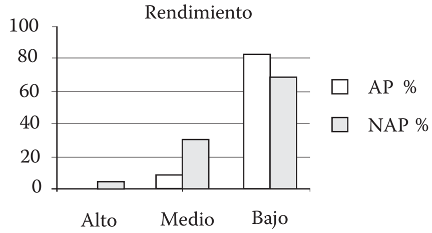
Ej. 4 (Graficar funciones)										
	AP		NAP				AP		NAP	
Punt	Cant	%	Cant	%		Rend	Cant	%	Cant	%
≥4	47	21	111	53		Alto	24	11	76	36
						Medio	23	10	35	17
<4	174	79	99	47		Bajo	174	79	99	47





Ej. 5 (Expresiones algebraicas)										
	AP		NAP				AP		NAP	
Punt	Cant	%	Cant	%		Rend	Cant	%	Cant	%
≥4	18	8	63	30		Alto	0	0	9	4
						Medio	18	8	54	26
<4	203	92	147	70		Bajo	203	92	147	70





Como se muestra en los gráficos anteriores, en cada uno de los ejercicios, se observa una marcada proporción de alumnos con baja nota. A su vez, dentro de este grupo, se encuentra que la mayoría de estos alumnos aprueba el curso.

Sobre el final

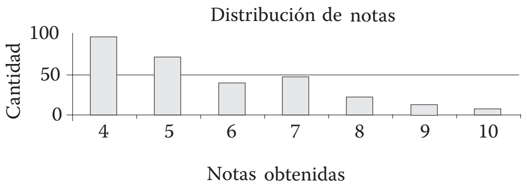
En todo este trabajo, excepto en esta sección, se informa sobre una población de 221 estudiantes ya que de éstos se tiene la información tanto del diagnóstico como del examen final.

En este apartado describimos los resultados por ejercicio y calificaciones de los 288 alumnos *que aprobaron el CAUC*

La tabla y gráfico que siguen muestran la distribución de las notas obtenidas.

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad	94	70	39	46	21	11	7

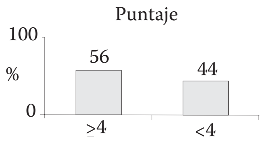
Nota promedio: 5,62

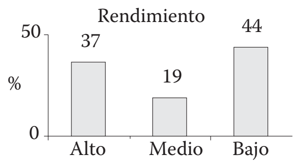


Las tablas y gráficos que siguen corresponden al desagregado por ejercicio del examen final de dichos estudiantes. Nuevamente usamos las mismas categorías (puntaje respecto de 4 y tipos de rendimiento). Las notas también se presentan *normalizadas* de 0 a 10.

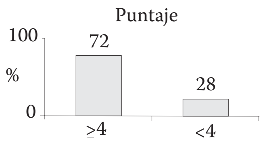
Referencias: Punt: puntaje obtenido; Cant: cantidad de estudiantes; %: porcentaje; Rend: Rendimiento.

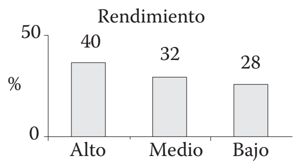
Ej. 1 (Ec. Cuadrática)						
Punt	Cant	%		Rend	Cant	%
≥4	161	56		Alto	106	37
				Medio	55	19
<4	127	44		Bajo	127	44
Nota promedio: 4,61						



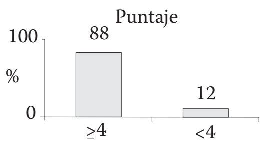


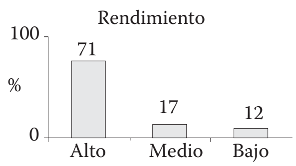
Ej. 2 (Ec. Lineal y módulo)						
Punt	Cant	%		Rend	Cant	%
≥4	207	72		Alto	114	40
				Medio	93	32
<4	81	28		Bajo	81	28
Nota promedio: 5,41						



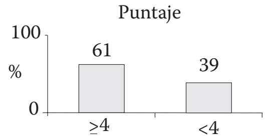


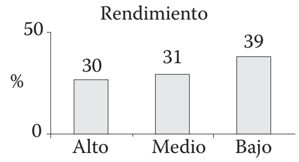
Ej. 1 (Ec. Geometría)						
Punt	Cant	%		Rend	Cant	%
≥4	253	88		Alto	203	71
				Medio	50	17
<4	35	12		Bajo	35	12
Nota promedio: 8,13						



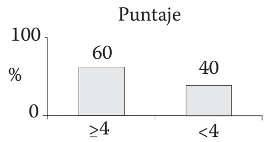


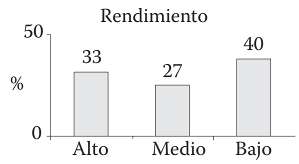
Ej. 4 (Funciones por gráficos)						
Punt	Cant	%		Rend	Cant	%
≥4	177	61		Alto	88	30
				Medio	89	31
<4	111	39		Bajo	111	39
Nota promedio: 5,17						





Ej. 5 (Funciones racionales)						
Punt	Cant	%		Rend	Cant	%
≥4	173	60		Alto	95	33
				Medio	78	31
<4	115	40		Bajo	115	40
Nota promedio: 5,29						





De los resultados obtenidos por los estudiantes que aprobaron el examen final, se destaca claramente el buen rendimiento en el ejercicio de geometría, que tiene un fuerte predominio de habilidades de tipo conceptual como identificar, de tipo traductoras como modelar, de tipo heurísticas como resolver y también buscar información intermedia para responder a una consigna. Las habilidades de tipo operativas, como calcular y algoritmizar, se hallan también presentes pero en una complejidad menor a la de otros problemas.

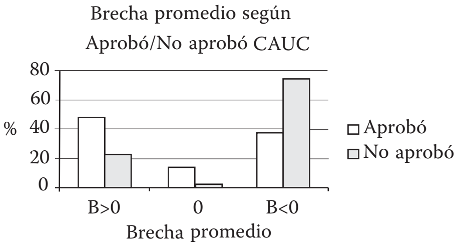
Estas habilidades son exigidas en mayor complejidad en los ejercicios 1 y 2. En estas situaciones es similar la cantidad de estudiantes que obtiene puntajes altos, tanto sea bajo contenidos relacionados con ecuaciones lineales como con cuadráticas. Sin embargo, la cantidad de puntajes bajos cuando estas habilidades se requieren en ecuaciones cuadráticas es muy superior a cuando se necesitan para ecuaciones lineales.

En los ejercicios 4 y 5, de contenidos relacionados con funciones, aparecen habilidades como interpretar, modelar, graficar y calcular. Los resultados en estos casos se distribuyen casi uniformemente en las tres categorías de rendimiento.

Resultados sobre brechas
A continuación mostramos los datos referidos a las brechas individuales en función de si el alumno aprobó o no el curso. Los valores positivos de la brecha promedio indican que efectivamente se logró aprendizaje de habilidades complejas, mientras que los valores negativos o nulos de la brecha promedio pueden indicar la falta de desarrollo de las habilidades más complejas, respecto de las evaluadas en el diagnóstico, que fueron requeridas hacia el final del curso (esta correspondencia se detalló en la página 4).

Cabe resaltar que tanto en alumnos que aprobaron o no el curso puede encontrarse brecha positiva, negativa o nula. Por esta razón es que el interés es conocer la brecha según los resultados del curso.

Brecha promedio	Aprobó		No aprobó	
	Cant	%	Cant	%
B>0	106	48	48	23
0	32	14	5	2
B<0	83	38	157	75
Total	221	100	210	100



Se observa que casi la mitad de los estudiantes que aprobaron el curso (48%) han tenido brecha positiva, mientras que es notable que el 38% de los mismos han tenido brecha negativa. Asimismo se encuentra que un 23% de los estudiantes no aprobó el curso pese a que obtuvo brecha positiva.

Conclusiones

Las primeras conclusiones que nos interesa comunicar aquí tienen que ver con el uso que se le ha dado al diagnóstico en el curso. El diagnóstico permitió, además de tener información inicial para medir la brecha en los aprendizajes, poder describir el estado inicial de conocimiento de los alumnos del CAUC 2004 respecto de los contenidos y habilidades matemáticas seleccionados. Esta información fue aprovechada por el docente en su curso para: a) informar a los alumnos del estado de sus conocimientos y b) presentar qué tipo de conocimiento y habilidades se exigirían en el curso.

Estos dos usos que el docente dio al diagnóstico respetan la línea de trabajo que fuera llevada a cabo en el CAUC 2001 y cuyos resultados pueden verse en Figliola et al (2001). A partir de los ejercicios del diagnóstico el docente ha podido a) presentar los distintos contenidos que se incluyen en el curso (aritmética, álgebra, geometría, funciones) y b) presentar distintos objetivos en términos de habilidades que se esperan del alumno. Este examen ofrece la posibilidad de hacer esta presentación en dos niveles. En el nivel inicial —presente en el diagnóstico— de las habilidades requeridas que involucran percepción, experimentación, observación de gráficos, alguna manipulación aritmética y algebraica simple, principalmente. El docente pudo anticipar un segundo nivel en el que el alumno deberá manifestar haber aprendido habilidades con nivel de complejidad mayor al término del curso: habilidad para resolver ecuaciones de distinto tipo analítica y gráficamente, operar con números y reconocer qué tipo de números manipula, reconocer funciones para graficarlas sin hacer tabla de valores, operar algebraicamente para simplificar expresiones y así poder obtener información sobre su comportamiento (asíntotas, ceros, etc.), interpretar procesos descritos coloquialmente, simbolizarlos y operar para resolver preguntas, justificar, etc.

Los resultados del examen diagnóstico han revelado que los estudiantes carecen de habilidades básicas al comienzo del curso por lo menos en alguno de los aspectos evaluados. De todos modos, la mayoría de los estudiantes que comienza el curso con este tipo de carencias, aprueba el curso.

Por otra parte, los resultados del examen final parecerían indicar que una dificultad central son las habilidades de tipo operatoria, encontrándose el mejor rendimiento en el ejercicio en el que la misma no tiene un papel central, incluso cuando el ejercicio requiere de varias habilidades complejas (identificar, modelar, resolver, etc.). Esta operatoria es más costosa aún cuando se trata de ecuaciones cuadráticas.

Por último, respecto del análisis de brechas, hemos mencionado que casi la mitad de los estudiantes que aprobaron el curso (48%) han tenido brecha positiva y el 38% de los mismos han tenido brecha negativa. Esto sugiere que este último grupo de estudiantes tuvo un muy buen desempeño cuando se trató de habilidades de baja complejidad y que en las competencias de mayor nivel tuvo un buen desempeño, ya que logró aprobar el curso, aunque no demostró tener sobre éstas un dominio tan amplio como el que manifestó en las evaluadas en el diagnóstico.

El 23% que no logró aprobar el curso y que obtuvo brecha positiva parece indicar un grupo de estudiantes que, independientemente de cómo haya empezado el curso, está evidenciando avances en los aprendizajes aunque todavía no le son suficientes para mostrar dominios mínimos en las habilidades complejas requeridas. Teniendo en cuenta que la población de alumnos que no aprobó el CAUC está conformada por 180 recursantes y 30 inscriptos nuevos, el alto porcentaje (75%) de estudiantes que no aprobaron el curso y tienen brecha negativa sugiere que un gran número de estos estudiantes comenzaron el curso con cierto grado de conocimiento sobre competencias poco exigentes. El resultado podría atribuirse, y no tenemos forma de constatarlo con estos elementos, a: falta de estudio, supuesta confianza por un resultado aceptable en el diagnóstico, estudiantes con dificultades de aprendizaje, tiempos del curso insuficientes, ritmo acelerado de cursada, etc. ■

Agradecimientos: Queremos agradecer a Alejandra Figliola, Hugo Negrín, Romina Cardo, Mariel Rosenblatt, Corina Averbuj, Patricia Barreiro, Ana Sonsino, Andrés Sartarelli y Valeria Borsani, profesores del CAUC 2004, que han corregido los exámenes con los criterios estipulados y han volcado las notas en las grillas minuciosa y dedicadamente. Asimismo queremos agradecer a la Secretaría Académica de la UNGS que financió el procesamiento de la información y a Renato Tarditti quien gentilmente nos ha facilitado la información que le requiriéramos.

NOTAS

1 Existen más requisitos sobre éste y los otros puntos que consideramos no son relevantes al trabajo.

2 "Mathematics is a living subject which seeks to understand patterns that permeate both the world around us and the mind within us. Although the language of mathematics is based on rules that must be learned, it is important for motivation that students move beyond rules to be able to express things in the language of mathematics. This transformation suggests changes both in curricular content and instructional style. It involves renewed effort to focus on:

Seeking solutions, not just memorising procedures

Exploring patterns, not just memorising formulas

Formulating conjectures, not just doing exercises.

As teaching begins to reflect these emphases, students will have opportunities to study mathematics as an exploratory, dynamic, evolving discipline rather than as a rigid, absolute, closed body of laws to be memorised. They will be encouraged to see mathematics as a science, not as a canon, and to recognise that mathematics is really about patterns and not merely about numbers. (National Research Council, 1989, p. 84)."

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arango González, Ballester Pedroso (1995): *Cómo consolidar los conocimientos matemáticos en los alumnos*, Promet, Proposiciones Metodológicas, Ed. Academia, La Habana, Cuba.

Camilloni, A, Celman, S., Litwin, E. y Palou, C. (1998): *La evaluación de los aprendizajes en el debate didáctico contemporáneo*, Buenos Aires, Piados.

Courant, R., Robbins, H. (1996): *What is Mathematics?,* Oxford Univ. Press.

Delgado Rubí; (1997): "Las habilidades matemáticas", *Seminario taller de Didáctica de la Matemática UTN Regional,* Haedo, Argentina.

Almeida, M., Aragón, A., Falsetti, M., Formica, A., Kulesz, L., Martínez, M., Rodríguez, M. (2001): *Guía de Matemática para el Curso de Aprestamiento Universitario, Módulo I*, Álgebra y Geometría, ISBN: 987-9300-32-7. Serie Educación, Material Didáctico n.º 6-I, Impreso en UNGS (2ª edición).

Falsetti, Figliola, Kulesz, Rodríguez (2000): *Guía de Matemática para el Curso de Aprestamiento Universitario, Módulo II: Modelización*, Universidad Nacional de General Sarmiento, Colección Universidad y Educación, Material Didáctico n.º 6.2.

Falsetti, Kulesz, Rodríguez (2000): *Guía de Matemática para el Curso de Aprestamiento Universitario, Módulo III: Funciones Elementales*, Serie Educación, Material Didáctico n.º 6-III, Impreso en UNGS.

Figliola, et al. (2001): *El examen diagnóstico como herramienta para un curso intensivo de Matemática. Enseñar y aprender en la Universidad*, Ed. Al Margen y UNGS, pp. 403-417.

Gil Pérez, D.; de Guzmán Ozámiz, M. (1993): *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Tendencias e innovaciones*, Iber Cima, Edit. Popular, España.

Godino, J. (1998): "Un modelo semiótico para el análisis de la actividad y la instrucción matemática", Comunicación presentada al VIII Congreso Internacional de la Asociación española de semiótica, Granada.

Parra, C. Saiz, I., (comp) (1995): *Didáctica de las Matemáticas. Aportes y reflexiones*, Edit. Paidós, Argentina.

Polya G., (1954): *Mathematics and plausible reasoning, Vol I y II*, Princeton Univ. Press.

Reglamento del CAU, UNGS, página web www.ungs.edu.ar

Schoenfeld, A. (1992): *Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in Mathematics in D. Grouws (De.),* Handbook for research on mathematics teaching and learning, New York, MacMillan.

Talizina, N. (1985): Conferencias sobre Los fundamentos de la enseñanza superior, Dpto. de Estudios para el perfeccionamiento de la Educación Superior, Universidad de La Habana, Cuba.