SUMA 43
junio 2003, pp. 113-114

Isoperímetros: El problema de los isoperímetros veinticuatro siglos después

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

TODO TIENE UN FINAL, incluso una etapa de progreso y buen hacer como este último periodo de nuestra querida SUMA. Emilio y Julio han cumplido de sobra y pasan el testigo. Sirvan estas líneas introductorias a nuestra también última entrega isoperimétrica para mostrarles nuestro reconocimiento. Sobresaliente cum laude por unanimidad, amigos.

> Si $\alpha(t)$ es una curva plana, parametrizada por el arco, regular en $[0, L]$, cerrada y simple entonces $-\alpha([0, L])$ tiene exactamente dos componentes conexas (divide al plano en dos partes, el interior a la curva y su exterior, tales que $\alpha([0, L])$ es su frontera común).

Este enunciado corresponde al teorema de la curva de Jordan, curva con la que se establece el problema con el que hemos mantenido esta sección de problemas: De todas las curvas de Jordan de longitud *L*, ¿cuál determina un interior con mayor área?; si existe, ¿cuál es su forma? En los números anteriores ya se ha presentado la solución y, sobre todo, posibles introducciones en la enseñanza de las Matemáticas. Para Secundaria y Bachillerato, presentábamos clases de Geometría, de Álgebra o de Análisis. Para la universitaria, motivaciones para el Cálculo de Variaciones y para poner de manifiesto la dificultad de solución para el problema de existencia de solución, y caben destacar dos de ellas, una debida a A. Hurwitz (1902), elegante y corta que utiliza ideas de la teoría de series de Fourier (Chern, 1967) y otra de E. Schmidt, la más sencilla de las conocidas, que utiliza la fórmula de Green para el área de un recinto plano (do Carmo, 1976).

El problema isoperimétrico se materializa en la desigualdad isoperimétrica: *si tenemos una curva de Jordan, de longitud* L *y área acotada por ella* A, *entonces* $L^2 - 4\pi A > 0$ *(la igualdad se da si y sólo si la curva es una circunferencia)*. También nos ocupamos de ella, analizando la forma óptima de las latas de bebidas que nos resultan habituales. En esta última

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolors Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

colaboración queremos añadir otra aplicación de esta famosa desigualdad: *¿puede deducirse la forma de un tambor a partir de su sonido?* Si se tiene un dominio regular D de $\mathbb{R}^2$, cuya frontera está formada por curvas de Jordan, puede verse como una membrana vibrante sujeta por su frontera, es decir, ¡un tambor! Es lógico pensar que se pueden diseñar infinitos tambores atendiendo a la forma de su membrana. Las vibraciones de D son funciones de $F(u, v)$: $D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que

$$\Delta F + \frac{\partial^2 F}{dt^2} = 0 \quad y \quad F\big|\partial D \times \mathbb{R}$$

El problema de Stone-Weierstrass permite separar las variables y estudiar vibraciones de la forma

$$F(u, v) = f(u)\, g(v),$$

siendo f: $D \to \mathbb{R}$ y g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y se obtiene

$$(\Delta f)/f = -g''/g = \lambda$$

donde λ es una constante íntimamente relacionada con las vibraciones, puesto que $g'' + \lambda g = 0$. ¿Cuál es conjunto de valores de λ para los cuales existe f, no nula, tal que

$$\Delta f = \lambda f \quad y \quad f\big|\partial D = 0?$$

Este conjunto es el *espectro de D,* entonces, nuestro problema puede formularse así: *¿queda un dominio caracterizado por su espectro?* O también, *si dos espectros coinciden, ¿los dominios asociados son iguales?* Lo que nos lleva a decir que si dos membranas vibrantes, D_1 y D_2, tienen las mismas frecuencias de vibración, ¡los dos tambores tienen igual sonido! El problema planteado al comienzo es el recíproco: si dos tambores emiten el mismo sonido, ¿tendrán la misma forma? En suma, ¿puede oírse la forma de un tambor?

El problema isoperimétrico resuelve el problema para tambores circulares: se puede oír la forma de un tambor circular; esto es, se puede distinguir por el sonido si un tambor es o no circular. Es decir, el espectro de un dominio determina su área A y la longitud de su borde L y sabemos que el dominio es circular si y sólo si $L^2 = 4\pi A$.

Como hemos tratado el problema isoperimétrico en tres dimensiones podemos preguntarnos acerca de la existencia de una desigualdad isoperimétrica sobre una superficie regular cualquiera (por ejemplo, sobre una esfera). En este caso la respuesta es negativa (a quien le interese este aspecto puede ver Osermann, 1975).

En el recorrido que hemos hecho de la mano del problema isoperimétrico, y también pensando en tres dimensiones, pasamos por la formulación correspondiente a panales de abejas y vimos que la celdilla de Fejes Tóth mejoraba a la construida por las abejas (aunque prácticamente no era interesante su realización). El siguiente enunciado sobre el problema isoperimétrico para panales es todavía un problema a la espera de solución:

> Dados dos números cualesquiera, *V* y *A,* hallar un panal de anchura *A* (distancia entre los dos planos paralelos que limitan el panal) cuyas celdillas tengan superficies de área mínima y encierren un volumen *V.*

Decididamente, la solución no es la aportada por las abejas ya que, al menos, la dicha de Fejes Tóth mejora la de aquellas. Esta formulación nos lleva considerar *superficies minimales.* Esto nos conduce a un grupo de investigación al que interesa el problema isoperimétrico en sus formulaciones actuales y de reconocido prestigio internacional. Se trata de grupos del Departamento de Geometría de la Universidad de Granada. Primero, M. Barros –del que hemos resumido en las notas anteriores parte de uno de sus artículos divulgativos que publicó sobre el tema (Barros, 1984)– y, después, A. Ros son los responsables de introducir la línea de investigación y dirigir los correspondientes grupos que viene aportando resultados del mayor interés. En la web <www.ugr.es/~ritore/preprints/int.pdf> hay información al respecto.

Fin (por nuestra parte).

Bibliografía

BARROS, M. (1984): «Algunas propiedades globales de curvas planas. Aplicaciones», *Epsilon*, n.° 2, 27-40.

CHERN, S. S. (1967): «Curves and surfaces in Euclidean spaces», *Studies in global Geometry and Análisis,* The Mathematical Association of America, 16-56.

CARMO, M. P. do (1976): *Geometría diferencial de curvas y superficies,* Alianza Universidad Textos.

OSERMANN, R. (1975): «Isoperimetric and related inequalities», *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics,* n.° 27, 207-215