SUMA 43
junio 2003, pp. 91-93

Pitágoras desde el círculo

Miquel Albertí Palmer

LAS VISUALIZACIONES del teorema de Pitágoras se basan en una comprobación del resultado haciendo encajar las piezas de un pequeño rompecabezas que se obtienen de partir en pedazos un cuadrado. Por ejemplo así:

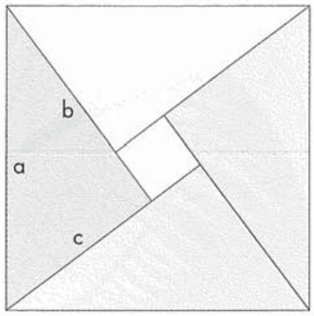

Figura 1

¿Por qué no se muestra nunca una visualización del teorema que tenga que ver con el círculo? ¿Es que no la hay?

Encuadrando

Podemos hacer el primer intento de encontrarla pensando en la figura 1. En ella se ven dos cuadrados, uno dentro de otro, de manera que el espacio que media entre ellos es una corona cuadrada. Si cambiamos ambos cuadrados por círculos obtendremos una corona circular. Copiando el proceder anterior se trataría ahora de partir esta corona en cuatro partes iguales y deducir el teorema a partir de sus áreas. Evidentemente puede hacerse esto de innumerables formas, pero la más sencilla y parecida al caso del cuadrado consistirá en trazar desde cuatro puntos equidistantes de la circunferencia exterior sendos segmentos a cuatro puntos también equidistantes de la circunferencia inte-

Cualquier prueba del teorema de Pitágoras se asocia siempre a un cuadrado. ¿No habrá alguna forma de ver el teorema a partir del círculo? Pues sí.

MISCELÁNEA

rior. Así la corona quedaría dividida en cuatro partes idénticas, pero si nos fijamos bien en la corona cuadrada nos daremos cuenta de que los segmentos que unen los cuadrados son tangentes a sus lados. Hagámoslo igual:

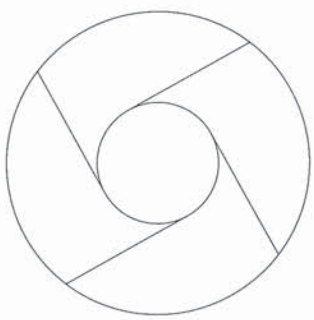

Figura 2

Dichos segmentos tangentes a la circunferencia interior tienen una relación especial con las circunferencias que forman la corona. Para verla señalemos también los radios de cada circunferencia:

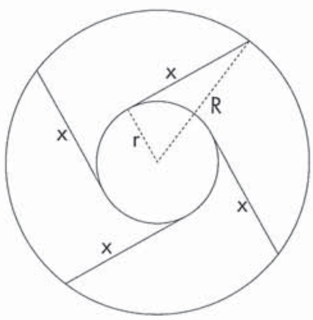

Figura 3

El triángulo rRx que aparece es rectángulo: r y x son perpendiculares puesto que x es tangente a la circunferencia pequeña. El área del círculo mayor es $A = \pi R^2$, y la del pequeño $a = \pi r^2$. Por tanto, el área de la corona será:

$$C = A - a = \pi(R^2 - r^2) = \pi x^2$$

Esta última igualdad se obtiene aplicando el teorema de Pitágoras. Pero lo que yo quiero es precisamente lo contrario, ver el teorema en lugar de aplicarlo. Esto quiere decir que debería ser capaz de «ver» en el diseño de la figura 3 que el área de la corona circular es πx^2. Si lo consigo podré razonar así:

- El área de la corona es πx^2.
- Las áreas de los círculos son πR^2 y πr^2 respectivamente.
- Puesto que $C = A - a$, será: $\pi x^2 = \pi R^2 - \pi r^2$.
- Luego tenemos el teorema: ¡¡ $R^2 = x^2 + r^2$!!

Circulando

¿Y puede verse esto? ¡Veámoslo!

El cuadrado es estático, el círculo no. Mirando una circunferencia no podemos decir si se está quieta o gira alrededor de su centro. De hecho, una circunferencia se dibuja mediante un giro, movimiento que constituye su esencia. Por eso quizá no vayamos mal encaminados si enfocamos la búsqueda de una visualización circular del teorema de Pitágoras en este sentido.

Con este objetivo trazo ahora en la corona tres segmentos *x*, *y*, *z* que unan ambas circunferencias, pero que formen diferentes ángulos con la interior (*x*, tangente; *y*, perpendicular; *z*, ni lo uno ni lo otro) y la hago girar alrededor del centro común *P*:

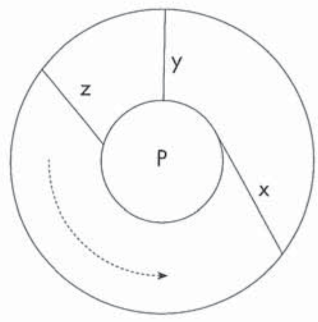

Figura 4

Al girar, *x*, *y*, *z* barren un área. Pero así como *z* e *y* la barren tanto por el hecho de girar como por el de trasladarse, en cambio *x* sólo barre área en razón de su giro ya que es tangente a la circunferencia interior. ¿Qué sucede al pintar con un pincel? Cuanto mayor es el ángulo que forma el pincel con el desplazamiento más grueso se pinta:

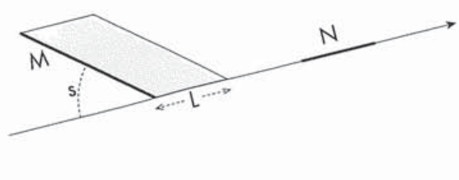

Figura 5

Una vez se ha trasladado una distancia L, el pincel o segmento M barre un área $A = L{\cdot}M{\cdot}\sin s$, el área del paralelogramo de ángulo s y lados M y L. En cambio, N barre un área nula como el ángulo que forma con la trayectoria. Si ésta no es rectilínea un pincel tangente a ella sólo pintará por el hecho de girar, no por trasladarse. Lo mismo le sucede a x, que gira como si todo el círculo interior fuera el centro ingente de su giro. ¿Y qué área describe un segmento al girar alrededor de un punto? ¡La del círculo que lo tiene por radio!:

Miquel Albertí
IES Pau Vila
Sabadell (Barcelona).
Federació d'Entitats
per l'Ensenyament de les
Matemàtiques a Catalunya

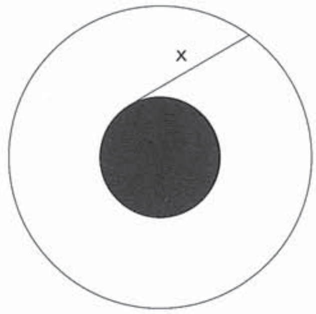

Figura 6

¡Lo veo! El área de la corona es $C = \pi x^2$ y de ahí se deduce el teorema de Pitágoras.