SUMA 43
junio 2003, pp. 39-42

La particularización como estrategia de descubrimiento de nuevos resultados: un ejemplo en geometría

Marcelino J. Ibañes Jalón

La finalidad de este artículo es presentar la demostración matemática como medio de *descubrimiento* cuando se aplica adecuadamente la *estrategia de particularización*. Consta de tres partes: en la primera se exponen algunos de los resultados obtenidos en Ibañes (2001), en la segunda se deducen nuevos resultados por particularización a partir del análisis de una demostración, y en la tercera se establece la conexión entre ambas familias de teoremas.

ARTÍCULOS

ENTRE LAS FUNCIONES de la demostración matemática –De Villiers (1993)–, destaca la de facilitar el descubrimiento de nuevos resultados. El propio De Villiers (1995) muestra un ejemplo de demostración en geometría que sirve para obtener otro teorema. Ibañes (2001) se sirve de esta idea y, empleando distintas estrategias de descubrimiento –expuestas en Polya (1996)–, obtiene sistemáticamente, a partir de un teorema, una familia de numerosos nuevos resultados. En este artículo nos centramos en una de esas estrategias de descubrimiento, la particularización, para obtener una segunda familia de teoremas, emparentados a su vez con los de la primera.

Primera familia de teoremas

En este apartado resumimos los resultados obtenidos en Ibañes (2001), con el fin de facilitar al lector la conexión de ese trabajo con el que se presenta ahora. Los teoremas expuestos en aquel son casos particulares del teorema de Varignon:

Teorema 1.1

En un *cuadrilátero,* al unir consecutivamente los puntos medios de los lados, se obtiene un *paralelogramo* (figura 1).

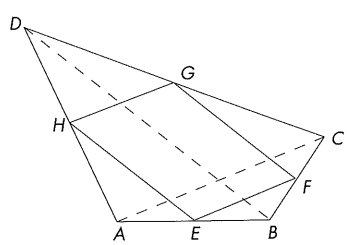

Figura 1

El punto de partida es el siguiente resultado para un rectángulo:

Teorema 1.2

En un *rectángulo* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales), al unir consecutivamente los puntos medios de los lados, se obtiene un *rombo* (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares) (figura 2).

Un análisis de la demostración, en combinación con las estrategias de descubrimiento *generalización, particularización, dualidad* y *conjunción,* nos permite obtener muchos otros resultados, poniendo así de manifiesto la finalidad de *descubrimiento* de las demostraciones matemáticas. A continuación, se exponen los que más nos interesan tener ahora en cuenta.

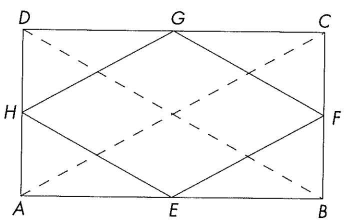

Figura 2

Por *generalización* del teorema 1.2 se obtiene este otro:

Teorema 1.3

En un *cuadrilátero equidiagonal* (cuadriláteros con diagonales iguales), al unir consecutivamente los puntos medios de los lados, se obtiene un *rombo* (una clase de cuadriláteros con diagonales perpendiculares) (figura 3).

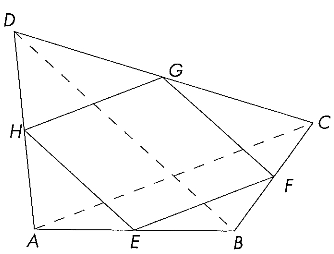

Figura 3

Aplicando la *dualidad* se tiene el siguiente:

Teorema 1.4

En un *cuadrilátero ortodiagonal* (cuadriláteros con diagonales perpendiculares), al unir consecutivamente los puntos medios de los lados, se obtiene un *rectángulo* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales) (figura 4).

Y, mediante la *conjunción* de los dos últimos, se deduce una nueva proposición:

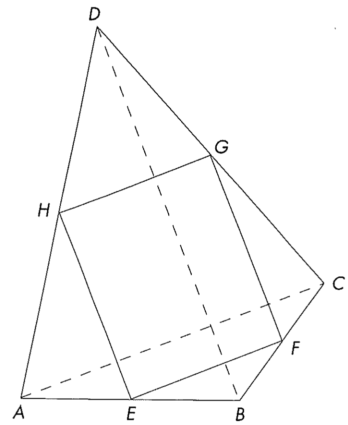

Figura 4

Teorema 1.5

En un *cuadrilátero equiortodiagonal* (cuadriláteros con diagonales iguales y perpendiculares), al unir los puntos medios de los lados, se obtiene un *cuadrado* (una clase de cuadriláteros con diagonales iguales y perpendiculares) (figura 5).

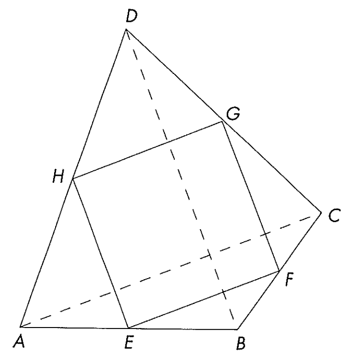

Figura 5

Segunda familia de teoremas

En este apartado nos centramos en una estrategia concreta, la de *particularización*, con el fin obtener nuevos resultados, iniciando el proceso en el análisis de una demostración, que es –como en el caso anterior– la fuente de descubrimiento. El punto de partida es el siguiente teorema que presenta cierta analogía con el de Varignon:

Teorema 2.1

En un *cuadrilátero,* al unir alternativamente los puntos medios de los lados y

En este apartado nos centramos en una estrategia concreta, la de particularización, con el fin obtener nuevos resultados, iniciando el proceso en el análisis de una demostración, que es –como en el caso anterior– la fuente de descubrimiento.

los de las diagonales, se obtiene un *paralelogramo* (figura 6).

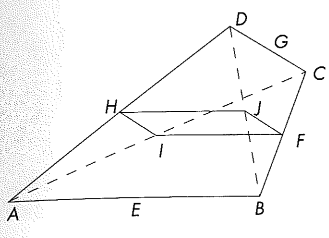

Figura 6

Demostración

Hay dos cuadriláteros que se obtienen al unir alternativamente los puntos medios de los lados y los de las diagonales de un cuadrilátero dado *ABCD:* el *EIGJ* y el *IFJH* (figura 6). Razonaremos sobre este último. Considerando el triángulo *ABC,* se deduce que $IF \parallel AB$ y $|IF| = 1/2|AB|$; y, del triángulo *ABD,* se infiere que $HJ \parallel AB$ y $|HJ| = 1/2|AB|$. Por lo tanto, $IF \parallel HJ$ y $|IF| = |HJ|$. De la misma manera, del triángulo *ACD* se obtiene que $IH \parallel CD$ y $|IH| = 1/2|CD|$; y, del triángulo *BCD,* se deduce que $FJ \parallel CD$ y $|FJ| = 1/2|CD|$. En consecuencia, $IH \parallel FJ$ y $|IH| = |FJ|$. De todo ello, resulta que *IFJH* es un paralelogramo.

Estrategia de particularización

Obsérvese que la causa de que *IFJH* sea un paralelogramo es que *IF* y HJ son paralelos a *AB* y que *IH* y *FJ* son paralelos a *CD.* Por lo tanto, para buscar *particularizaciones* interesantes debemos considerar relaciones significativas entre *AB* y *CD.*

La primera, consiste en suponer que $AB \parallel CD$, con lo que el paralelogramo *IFJH* degenera en un segmento, por lo que puede enunciarse el siguiente teorema:

Teorema 2.2

En un *cuadrilátero con dos lados paralelos,* al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un segmento (figura 7).

La segunda relación significativa es $|AB| = |CD|$ que implica que *IFJH* es un

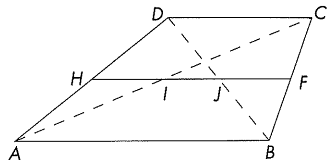

Figura 7

rombo, obteniéndose el teorema que se enuncia a continuación:

Teorema 2.3

En un *cuadrilátero con dos lados opuestos iguales,* al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un rombo (figura 8).

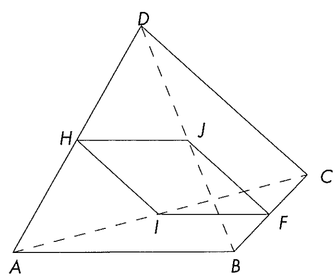

Figura 8

Una tercera relación es $AB \perp CD$, lo que conduce a que *IFJH* sea un rectángulo, quedando probado el siguiente teorema:

Teorema 2.4

En un *cuadrilátero con dos lados opuestos perpendiculares,* al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un *rectángulo* (figura 9).

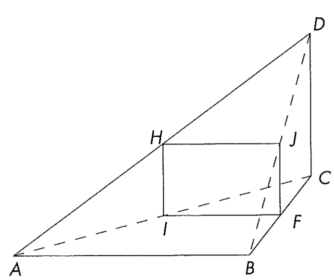

Figura 9

En cuarto lugar, la conjunción de las relaciones $|AB| = |CD|$ y $AB \perp CD$, produce la consecuencia de que *IFJH* sea un cuadrado, desprendiéndose el teorema que sigue:

Teorema 2.5

En un *cuadrilátero con dos lados opuestos perpendiculares e iguales*, al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un *cuadrado* (figura 10).

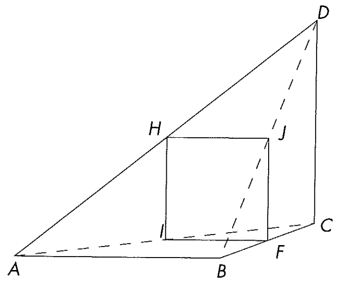

Figura 10

Y, en quinto y último lugar, si en el segundo caso ($|AB| = |CD|$), suponemos además que estos lados forman un ángulo de 60°, entonces obtenemos este último teorema de la familia:

Teorema 2.6

En un *cuadrilátero con dos lados opuestos iguales formando un ángulo de 60°*, al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un *rombo constituido por dos triángulos equiláteros* (figura 11).

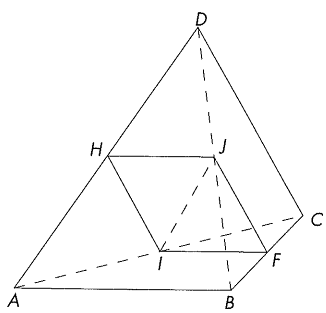

Figura 11

Observación

Los teoremas expuestos en este artículo son ciertos para toda clase de cuadriláteros, aunque en las figuras se hayan representado convexos. Como muestra, en la figura 12, exponemos las correspondientes al teorema 2.1 para cuadriláteros no convexos y no simples.

Dualidad de ambas familias

Finalmente, debe destacarse una interesante relación entre los teoremas de las dos familias estudiadas. Si consideramos como *duales* los términos: *diagonales* y *par de lados opuestos*, los teoremas de ambas familias resultan duales, por lo que pueden obtenerse los de una familia siempre que los de la otra ya hayan sido establecidos. A continuación, se vuelven a enunciar los teoremas afectados resaltando esta dualidad.

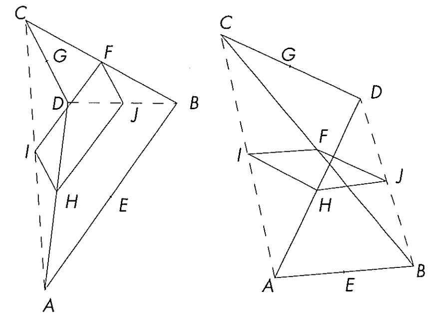

Figura 12

Primera familia	*Segunda familia*
Teorema 1.3. En un cuadrilátero con *diagonales iguales*, al unir consecutivamente los puntos medios de los lados, se obtiene un *rombo*.	***Teorema 2.3.*** En un cuadrilátero con *dos lados opuestos iguales*, al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un *rombo*.
Teorema 1.4. En un cuadrilátero con *diagonales perpendiculares*, al unir consecutivamente los puntos medios de los lados, se obtiene un *rectángulo*.	***Teorema 2.4.*** En un cuadrilátero con *dos lados opuestos perpendiculares*, al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un *rectángulo*.
Teorema 1.5. En un cuadrilátero con *diagonales iguales y perpendiculares*, al unir los puntos medios de los lados, se obtiene un *cuadrado*.	***Teorema 2.5.*** En un cuadrilátero con *dos lados opuestos iguales y perpendiculares*, al unir alternativamente los puntos medios de los otros dos lados y los de las diagonales, se obtiene un *cuadrado*.

Marcelino J. Ibañes
Instituto Vega del Prado
Valladolid

Referencias bibliográficas

IBAÑES, M. (2001): «Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento», *Suma*, n.° 37, 95-98.

POLYA, G. (1966): *Matemáticas y razonamiento plausible*, Tecnos, Madrid.

VILLIERS, M. de (1993): «El papel y la función de la demostración en matemáticas», *Épsilon*, n.° 26, 15-30.

VILLIERS, M. de (1995): «An alternative introduction to proof in dynamic geometry», *Micromath Spring*, n.° 11(1), 14-19.