SUMA 41
noviembre 2002, pp. 69-75

Experiencias sobre la aproximación intuitiva en Geometría. Una aproximación del número π en la ESO

Antonia Redondo Buitrago
M.ª José Haro Delicado

En este artículo se presentan algunas experiencias sobre la aproximación intuitiva en Geometría y sus implicaciones en el cálculo aproximado del número π en la ESO.
El proceso se gradúa en torno a cuatro actividades. En las dos primeras se aproxima experimentalmente el número π y se pretende descubrir el grado de madurez de los alumnos para enfrentarse, desde el punto de vista intuitivo, a los procesos geométricos de aproximación. En las dos últimas se hace una estimación de π; en un caso encontrando una sucesión de números irracionales convergente a ese número; y, en otro, a partir de una simplificación del método utilizado por Arquímedes, que permite además dar una demostración, diferente de la habitual, de las propiedades

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$$
$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\tan\alpha}{\alpha} = 1$$

ARTÍCULOS

UNA DE LAS GRANDES incoherencias didácticas en la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria, de la que difícilmente podemos escapar, es el tratamiento del fascinante número π. Por un lado, la introducción del concepto de número irracional se inicia en el cuarto curso de la ESO, posponiendo su estudio, más o menos riguroso, para el Bachillerato, pero, sin embargo, al alumno le hemos pedido en etapas anteriores que conozca y utilice el número irracional π, y, además, esperamos que se crea que tiene infinitas cifras decimales que nunca se repiten de forma periódica...

Este trabajo es el resultado de nuestra experiencia didáctica en la búsqueda y diseño de actividades sobre la aproximación del número π, que pudieran ser propuestas a alumnos de la ESO que no posean conocimiento alguno de Trigonometría. El proceso seguido se organiza en torno a cuatro actividades comentadas, dirigidas a un nivel de competencia curricular especificado en cada una de ellas, pero que podrían realizarse en cualquier etapa posterior. La última es la menos original, pues se basa, en esencia, en el método utilizado por Arquímedes para aproximar el número π, pero la incluimos porque en el Bachillerato constituiría un instrumento diferente para probar las propiedades

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$$
$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\tan\alpha}{\alpha} = 1$$

Como suele ocurrir en el campo de cualquier investigación nos encontramos con una dificultad no prevista: todo proceso de aproximación en Geometría implica un planteamiento «dinámico» e, inevitablemente, aparecen implicados componentes intuitivos sobre el concepto de límite. Sin embargo, este hecho, no sólo no representa un inconveniente, sino que se convierte en un recurso didáctico para la actividad 3. En ella subyacen ideas de Análisis Matemático (integral de Riemann, sucesiones convergentes) que, consideradas desde un punto de vista exclusivamente geométrico, nos permiten obtener una sucesión de números irracionales que converge a π.

La dificultad a la que nos referíamos queda patente si analizamos los resultados obtenidos en una prueba inicial sobre contenidos geométricos realizada a alumnos del tercer curso de la ESO. Se les propuso: «Formamos un cuadrado con 16 fichas cuadradas y lo deformamos para construir con las mismas fichas un rectángulo. ¿Qué pasa con el perímetro al pasar del cuadrado al rectángulo?». Aquellos alumnos a los que se les proporcionó el correspondiente material o se les permitió utilizar una representación gráfica (figura 1) no tuvieron dificultad en contestar que el perímetro aumenta, pero aquellos a los que se les pidió que contestaran por intuición, lo hicieron correctamente sólo en un 6,7 %, mientras que un 75 % afirmó que el perímetro era el mismo.

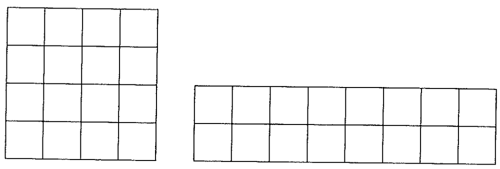


Figura 1

También se les propuso: «Une los extremos de un hilo y forma sobre la mesa un cuadrado. Ahora defórmalo para construir un rectángulo. ¿Cómo son las áreas del cuadrado y del rectángulo?». Intuitivamente, la mayoría contestó que el área no cambia y en este caso la utilización de un modelo geométrico (hilo, cadena, cordón de las zapatillas...) no mejoró los resultados. La justificación posiblemente está en que el concepto de «límite» no se había adquirido todavía en esos alumnos, y no recurrieron a su utilización como estrategia de manera espontánea. Cuando el profesor llevó en el modelo la deformación «al límite» (figura 2) un alto porcentaje de los alumnos afirmó que el área cambia y algunos de ellos que disminuye.

Estas dos situaciones ponen de manifiesto que antes de intentar abordar con nuestros alumnos una aproximación del número π hay mucho trabajo por hacer. En un primer paso deberían descubrir por ellos mismos que es posible que las cifras decimales de π no se repitan. Este objetivo se pretende alcanzar en la actividad 1. Ésta solo presenta la dificultad de utilizar hábilmente un hilo para medir el perímetro de un circulo y su diámetro (es más fácil si se utiliza un cilindro) y únicamente se requiere que el alumno conozca el sistema decimal y la proporcionalidad de segmentos.

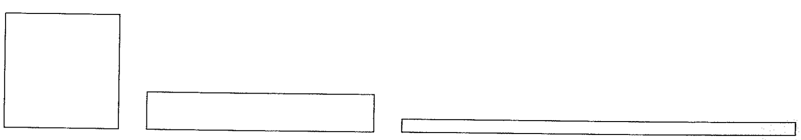


Figura 2

...todo proceso de aproximación en Geometría implica un planteamiento «dinámico» e, inevitablemente, aparecen implicados componentes intuitivos sobre el concepto de límite.

Actividad 1

- *Nivel de aplicación:* Primer y segundo Ciclo de la ESO
- *Objetivos:* Obtener experimentalmente algunas cifras decimales del número π.
- *Conocimientos previos:* Concepto de círculo, circunferencia y diámetro. Sistema decimal. Proporcionalidad entre segmentos.
- *Materiales:* Cilindro, hilo, tijeras y material de dibujo (regla).

Vamos a ver cuántas veces está contenido el diámetro de un círculo en la longitud de la circunferencia. Con el hilo corta dos trozos que midan exactamente lo mismo que el diámetro y la circunferencia de la base del cilindro. Sobre la primera recta en la que está representado el cero, toma como unidad el trozo de hilo que representa el diámetro y señala los puntos que corresponden a los números 1, 2, 3, 4, 5. Ahora ajusta uno de los extremos del otro hilo al 0 y señala el punto P_1 que queda determinado hacia la derecha por el otro extremo del hilo. Como ves, la longitud de la circunferencia contiene al diámetro mas de tres veces, pero menos de cuatro, es decir, el número de veces es un número decimal. Para saber cuál es la cifra de las décimas traza una recta que pase por el 3 de la primera recta y el 3,0 de la segunda. Traza otra recta que una el 4 con el 4,0. Estas dos rectas se cortan en un punto que llamaremos Q_1. Si trazas una recta que una el punto Q_1 con el punto P_1, cortará a la segunda recta en un punto P_2 que como ves está entre 3,1 y 3,2. Esto quiere decir que la primera cifra decimal es 1. Si repites la operación con las otras rectas irás obteniendo las demás cifras decimales (figura 3).

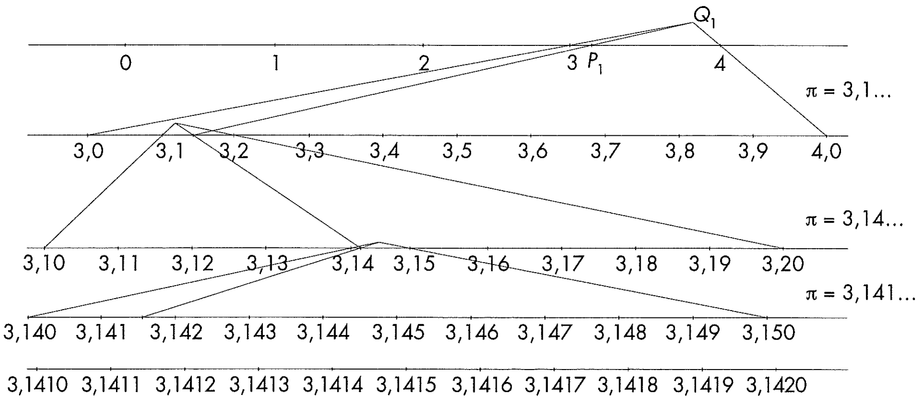


Figura 3

Es cierto que no se van a poder hallar gráficamente las infinitas cifras decimales de π, pero, después de un número razonable de iteraciones, el alumno se ve obligado a plantearse la posible necesidad de un «paso al límite», y está en condiciones de admitir que pueda ser cierto que las cifras decimales de ese número no se repiten. Por tanto, hemos cambiado, a partir de una experiencia, un «acto de fe» por una «intuición razonable». Una intuición que se fundamenta en el mundo que nos rodea, como queda maravillosamente reflejado en un fragmento de la película, *Smila, misterio en la nieve,* de Bille August, en el que la protagonista describe la fascinación que siente por los números de la siguiente forma:

> [...] para mí el sistema numérico es como la vida misma, primero están los números naturales, los que son enteros y positivos, son los números de un niño pequeño, pero la conciencia humana se amplía y el niño descubre el deseo, ¿sabe cuál es la expresión matemática del deseo?, los números negativos, la formalización de la sensación de que te falta algo. Entonces el niño descubre los espacios intermedios entre las piedras, entre las personas, entre los números y aparecen las fracciones, eso es como una locura, porque nunca se llega al final, nunca se detienen allí, hay números que no podemos ni empezar a comprender, las matemáticas son un paisaje inmenso y abierto, te diriges hacia el horizonte, que siempre retrocede [...]

La actividad 2 es fundamental, puesto que evidencia que el «paso al límite» no es en modo alguno evidente y con ella el alumno se cuestionará lo que su intuición le sugiere a primera vista, preparándole para adquirir más adelante los conceptos de curva rectificable y región medible.

...evidencia que el «paso al límite» no es en modo alguno evidente y con ella el alumno se cuestionará lo que su intuición le sugiere a primera vista, preparándole para adquirir más adelante los conceptos de curva rectificable y región medible.

Actividad 2

- *Nivel de aplicación:* Segundo ciclo de la ESO.
- *Objetivos:* Trabajar sobre la intuición en los procesos de aproximación geométrica.
- *Conocimientos previos:* Teorema de Pitágoras, triángulo equilátero, área de un triángulo.
- *Materiales:* Calculadora y material de dibujo.

El segmento AB mide 1 cm. Señalamos un punto Q de manera que ABQ sea un triángulo equilátero. Llamamos p_1 a la poligonal $[A, Q, B]$ y S_1 a la superficie del triángulo limitada por p_1 y el segmento AB (figura 4).

Dividimos ahora el segmento AB en dos partes iguales, construimos dos triángulos equiláteros de base cada una de esas partes y llamamos p_2 a la poligonal $[A, Q_{11}, M_1, Q_{12}, B]$ y S_2 a la superficie de la región limitada por p_2 y AB (figura 5).

Continuamos dividiendo el segmento AB en tres partes iguales y obtenemos la poligonal $p_3 = [A, Q_{21}, M_1, Q_{22}, M_2, Q_{23}, B]$ y el área S_3 de la región limitada por p_3 y AB (figura 6).

Imagina que vas dividiendo en 4, 5, 6... partes el segmento y vas obteniendo las correspondientes poligonales p_4, p_5, p_6... y áreas S_4, S_5, S_6,...

a) Si repites el proceso infinitas veces, ¿qué pasará con la sucesión de poligonales? ¿Y con la sucesión de áreas? (Contesta intuitivamente).

b) Comprueba algebraicamente lo que sucede completando la tabla 1 y compara si se obtiene lo que habías previsto en a). Intenta dar una explicación de lo que sucede.

Cuando se propuso esta actividad a un grupo de alumnos de 3.° de ESO, el 90 % contestó en el primer apartado intuitivamente que la poligonal se convierte en el segmento *AB* y sólo un 10 % dijo que al final tendríamos un segmento pero con «puntitos por encima», «triangulitos muy pequeños»... Todos admitían que al final las áreas eran prácticamente cero.

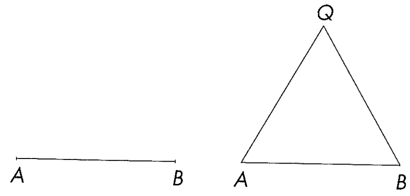


Figura 4

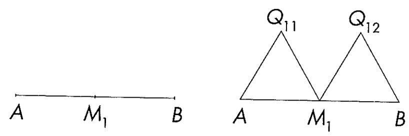


Figura 5

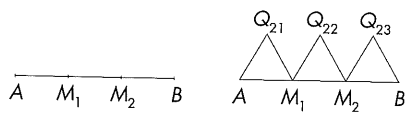


Figura 6

...cuando queremos aproximar el área de una región (por supuesto medible), podemos hacerlo a través de regiones limitadas por cualquier poligonal...

Está claro que los alumnos que contestaron que al final se obtiene el segmento *AB* han ido más lejos de lo permitido, es decir, su intuición les ha llevado a hacer una aproximación incorrecta de la longitud del segmento. El resto, bien por prudencia o por no saber como realizar ese «paso al límite», se quedaron un paso atrás y eso les impidió contestar de forma errónea.

Una vez realizada la actividad, el profesor puede hacer ver a los alumnos que en los procesos de aproximación en geometría, por decirlo de alguna manera, debemos tener mucho cuidado al aproximar un arco (por supuesto rectificable) por una poligonal, pues sólo tenemos garantías de que la aproximación sea fiable si todos los vértices de la poligonal están en la línea (figura 7b), por el contrario en el caso de una poligonal como la de la figura 7a, al final se obtendrían puntos «muy próximos» a la línea pero no estarían sobre la línea.

Sin embargo, cuando queremos aproximar el área de una región (por supuesto medible), podemos hacerlo a través de regiones limitadas por cualquier poligonal (figuras 8 y 9).

En la actividad 3, damos una estimación del número π, utilizando la aproxima-

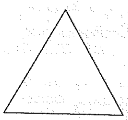
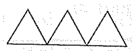
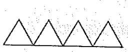
Región	*Núm. de divisiones*	*Lado del triángulo*	*Longitud de* p_n	*Área del triángulo*	S_n
	1	1	2	$\sqrt{3}/4$	$\sqrt{3}/4$
	2	1/2	$4 \cdot 1/2 = 2$	$\sqrt{3}/16$	$\sqrt{3}/8$
	3	1/3	$6 \cdot 1/3 = 2$	$\sqrt{3}/36$	$\sqrt{3}/12$
	4	1/4	$8 \cdot 1/4 = 2$	$2\sqrt{3}/64$	$\sqrt{3}/16$
...	...	...	...	...	...

Tabla 1

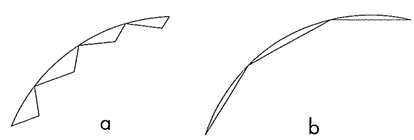


Figura 7

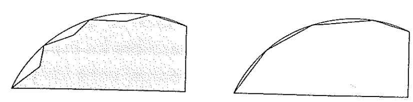


Figura 8

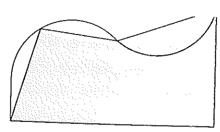


Figura 9

ción del área de un sector circular por una sucesión de áreas de rectángulos inscritos, que nos permite obtener una nueva fórmula para el número π. La novedad reside en que la altura de los rectángulos se calcula aplicando el Teorema de Pitágoras.

Actividad 3

- *Nivel de aplicación:* Segundo ciclo de la ESO.
- *Objetivos:* Aproximar el número π por defecto.
- *Conocimientos previos:* Teorema de Pitágoras, área de un rectángulo, área del círculo.
- Materiales: Calculadora, material de dibujo y ordenador (programa Derive).

En el sector circular *AOB* el ángulo α es de 90° y los radios *OA* y *OB* miden 1 cm. Señalamos el punto medio Q_{21} de *OB* y construimos el rectángulo inscrito de base OQ_{21} (figura 10).

Evidentemente el área S_2 del rectángulo $P_{20}P_{21}Q_{21}O$ es una aproximación muy mala del área del sector, pero podemos mejorar la situación si dividimos el segmento *OB* en tres partes iguales e inscribimos dos rectángulos (figura 11).

Si divides el segmento *OB* en 4, 5, 6... partes y repites el proceso obtendrás sucesivas regiones formadas respectivamente por 3, 4, 5... rectángulos inscritos, de áreas que llamaremos S_3, S_4, S_5...

a) Completa la tabla 2 y comprueba que la sucesión S_1, S_2, S_3..., de áreas es estrictamente creciente. Encuentra una fórmula general para el área de la región cuando el número de divisiones es *n*.

b) Si repites el proceso infinitas veces, ¿en qué se convierte la región? ¿A qué tiende la sucesión de áreas obtenidas?

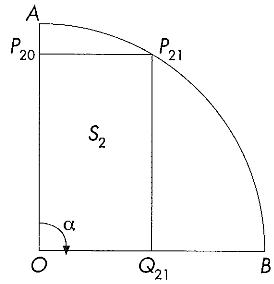


Figura 10

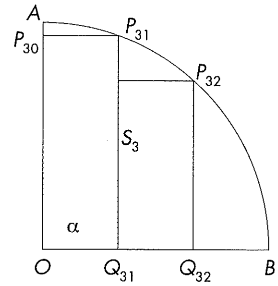


Figura 11

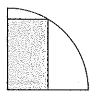
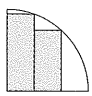
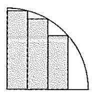
Región	*Núm. de divisiones*	*Área de la región*
	2	$S_2 = \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 0,433012...$
	3	$S_3 = \frac{1}{3}\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} + \frac{1}{3}\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2} = 0,562721...$
	4	$S_4 = \frac{1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{2}{4}\right)^2} + \frac{1}{4}\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 0,623927...$
...	...	... ...

Tabla 2

En general, si el número de divisiones es *n* se tiene

$$S_n = \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{3}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$$

y con una sencilla manipulación algebraica obtenemos

$$S_n = \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1^2} + \sqrt{n^2-2^2} + \cdots + \sqrt{n^2-(n-1)^2}\right)$$

La convergencia es muy lenta y los alumnos no pueden prever experimentalmente a que número tiende la sucesión S_n, pero este es el momento de utilizar lo que sabemos. Como el área del sector es la cuarta parte del área de un círculo de radio 1 cm, se tiene que

$$\frac{\pi}{4} \approx \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1^2} + \sqrt{n^2-2^2} + \cdots + \sqrt{n^2-(n-1)^2}\right)$$

y, por tanto,

$$\pi \approx \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right)$$

Como ya hemos dicho, la convergencia es muy lenta y para obtener valores satisfactorios de la aproximación de π necesitamos adelantarnos mucho en la sucesión, pero esto no es un problema si disponemos de un programa de ordenador. Los siguientes cálculos se han realizado con el programa Derive y un poco de paciencia.

$n = 10$	$\pi \approx 2{,}90451\ldots$
$n = 100$	$\pi \approx 3{,}12041\ldots$
$n = 1000$	$\pi \approx 3{,}13955\ldots$
$n = 10.000$	$\pi \approx 3{,}14139\ldots$
$n = 100.000$	$\pi \approx 3{,}14158\ldots$
$n = 200.000$	$\pi \approx 3{,}14159\ldots$

La convergencia es más rápida si en lugar de aproximar por rectángulos utilizamos trapecios y un triángulo (figura 12).

En este caso se cumple

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}\right)\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}\right)\frac{1}{n}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-\left(\frac{n-2}{n}\right)^2}+\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}\right)\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$$

y de esta forma

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1^2}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right)\right]$$

Los valores que se obtienen con esta fórmula son

$n = 10$	$\pi \approx 3{,}10451\ldots$
$n = 100$	$\pi \approx 3{,}14041\ldots$
$n = 1000$	$\pi \approx 3{,}14155\ldots$
$n = 10000$	$\pi \approx 3{,}14159\ldots$

La actividad 3 se puede completar proponiendo que se razone de forma análoga aproximando la longitud del arco AB, por la de la poligonal formada por el segmento $AP_{n,0}$ el borde superior de los rectángulos y el segmento $Q_{n,n-1}B$. Los alumnos están ya en condiciones de prever que esa aproximación no es la apropiada. En efecto, en este caso la poligonal siempre mide 2 cm y sólo podemos afirmar que $\pi/2 < 2$ y, por tanto, $\pi < 4$ (figura 13).

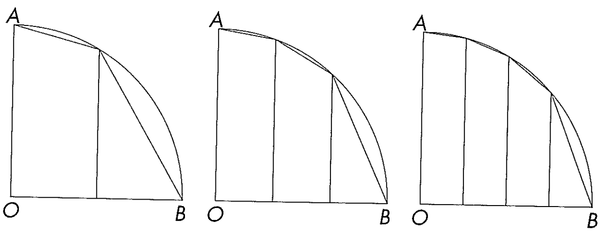


Figura 12

...es una variante simplificada del tradicional método seguido por Arquímedes.

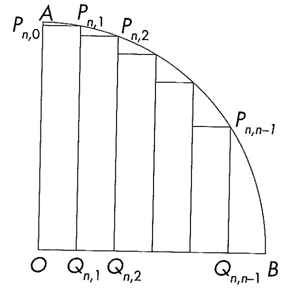


Figura 13

Los alumnos de la opción B de 4.º de ESO poseen suficientes conocimientos de trigonometría para realizar la siguiente actividad, que es una variante simplificada del tradicional método seguido por Arquímedes.

Actividad 4

- *Nivel de aplicación:* 4.º curso de ESO, opción B.
- *Objetivos:* Dar una aproximación por defecto del número π.
- Conocimientos previos: Seno de un ángulo agudo, perímetro de un polígono, longitud de la circunferencia.
- Materiales: Calculadora, material de dibujo.

En la circunferencia de centro O y radio $R = 1$ cm. Inscribimos un triángulo equilátero, un cuadrado, un pentágono regular... (figura 14)

Los perímetros van aumentando al aumentar el número de lados y se pueden considerar una aproximación de la longitud de la circunferencia, más satisfactoria al ir aumentando el número de lados.

a) Teniendo en cuenta que todo polígono regular de n lados $A_1A_2\ldots A_n$ se puede considerar formado por n triángulos isósceles iguales al OA_1A_2, comprueba que el valor del perímetro p_n se puede expresar con la fórmula

$$p_n = 2n\cdot\text{sen}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$$

b) Si hacemos crecer indefinidamente el número de lados n del polígono inscrito ¿Qué pasará con la sucesión p_n formada por los sucesivos perímetros? ¿A qué número tiende la sucesión $p_n/2$?

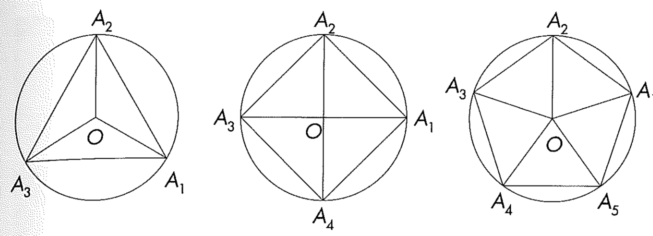


Figura 14

En esta actividad es imprescindible que se calculen las razones trigonométricas del ángulo, expresando éste en grados sexagesimales (si se hiciera en radianes caeríamos en un circulo vicioso al tener que utilizar el valor de π). Considerando que el triángulo OQA_1 es rectángulo, que el segmento OA_1 mide 1 cm, y que QA_1 es la mitad del lado l del polígono se obtiene (figura 15)

$$\operatorname{sen}\left(\frac{360°}{2n}\right) = \frac{l}{2}$$

$$l = 2\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$$

$$p_n = 2n\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$$

Al hacer tender $n \to \infty$ el perímetro del polígono p_n tiende a la longitud de la circunferencia, que en este caso es 2π, y, de esta forma, en la columna de la derecha de la tabla 3 obtendremos una sucesión creciente que tiende al número π.

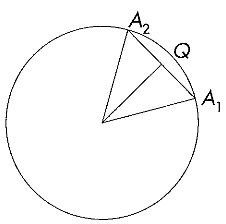


Figura 15

Antonia Redondo
IES Diego de Siloé.
Albacete.
Sociedad Castellano-Manchega de Profesores de Matemáticas.
M.ª José Haro
IES Al-Basit.
Albacete.

Núm. de lados n	Ángulo $= \frac{180°}{n}$	$\operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$	$\frac{P_n}{2} = n\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\right)$
10	18°	0,309016...	3,09016...
100	1,8°	0,0314107...	3,14107...
1000	0,18°	0,00314158...	3,14158...
10.000	0,018°	0,000314159...	3,14159...

Tabla 3

Si el ángulo $180°/n$ se expresa en radianes, obtenemos

$$\pi = \lim_{n\to\infty} n\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{180°}{n}\cdot\frac{\pi}{180°}\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

y, en realidad, lo que hemos probado es que

$$1 = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty} n\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}$$

Esto proporciona un procedimiento diferente del habitual para la demostración en el Bachillerato del resultado

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha} = 1$$

puesto que basta con hacer en la igualdad obtenida, sucesivamente, los cambios de variable $n = 1/m$ y $m\pi = \alpha$ y entonces

$$1 = \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}} = \lim_{m\to 0}\frac{\operatorname{sen} m\pi}{m\pi} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$$

Si en la actividad anterior se utilizan polígonos circunscritos, obtendríamos una sucesión decreciente que proporciona aproximaciones por exceso de π, pues el perímetro del polígono es

$$P_n = 2n\tan\left(\frac{180°}{n}\right)$$

y se deduciría de ahí, análogamente al caso anterior, que

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\tan\alpha}{\alpha} = 1$$

Bibliografía

FERNÁNDEZ, M. y otros (1991): *Circulando por el círculo*, Síntesis, Madrid.

GARCÍA, J. y C. BERTRÁN (1988): *Geometría y experiencias*, Alhambra, Madrid

GARDNER, M. (1982): *Nuevos pasatiempos matemáticos*, Alianza Editorial, Madrid.

GUEDJ, D. (2000): *El teorema del loro*, Anagrama, Barcelona.

NEWMAN, J.R. (1980): *SIGMA: El mundo de las matemáticas*, Grijalbo, Barcelona.

PERALTA, J. (1995): *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*, Huerga y Fierro, Madrid.

Páginas web

<http://webs.adam.es/rllorens/pidoc.htm>

<http://www.escape.com/~paulg53/math/pi/archimedes/index.html>

<http://www.geocities.com/CapeCanaveral/Lab/3550/pi.htm>

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Pi_through_the_ages.html>

<http://www.mcs.csuhayward.edu/~malek/Mathlinks/pi.html>

<http://www.joyofpi.com/pifacts.htm>