

Unas propiedades elementales de las cónicas y el trapecio

Juan-Bosco Romero Márquez

EN ESTE TRABAJO se presentará una recopilación de resultados elementales ya conocidos sobre algunos temas de Álgebra y Geometría relacionados con las medias, el trapecio y las cónicas.

Además, en este artículo se dan dos nuevas «caracterizaciones» elementales de las cónicas, con centro o no. El primer resultado se enuncia como sigue:

Sea una cónica C (Figura 5) de focos F y F' y centro O . Para cada punto arbitrario P de la misma denotemos por t_p y n_p , las rectas tangente y normal en ese punto. Denotemos también por $d_1 = d(F, t_p)$, $d_2 = d(F', t_p)$, las distancias de los focos de la cónica a la tangente t_p .

Sea R el punto de intersección de la recta n_p con el eje real de la cónica. Entonces $d = d(P, R)$, la distancia entre los dos puntos indicados, es la media armónica de d_1 y d_2 .

El segundo resultado es válido para una cónica regular, y reza como sigue:

Sea C una cónica regular de foco F y directriz asociada D . Tomamos la cuerda focal AB que pasa por el foco F , determinada por los puntos A y B arbitrarios (Figura 6). Trazamos las proyecciones ortogonales I , F y J de los puntos A , F y B , respectivamente, sobre la directriz D . Sean X , Y y Z los puntos intersección de las diagonales de los trapecios $AIKF$, $BFKJ$, y AUB . Entonces se verifica que la distancia FK es la media armónica de las distancias AI y BJ .

¿Es la propiedad anterior una nueva caracterización de las cónicas a través del trapecio rectángulo, equivalente a cualquier otra caracterización de las mismas? Es decir, ¿es cierto el teorema recíproco? Esta cuestión la dejamos abierta para la investigación de carácter elemental en el aula.

Se darán también otros resultados ya conocidos sobre las cónicas, pero expuestos de la forma más elegante y breve posible. Dichos resultados, no utilizados frecuentemente, aparecen en los libros citados en la extensa bibliografía que se inserta al final.

En este artículo se presentan algunos resultados elementales que relacionan las cónicas regulares y las cónicas con centro con el trapecio.

La clave de esta relación consiste en que si dibujamos un segmento paralelo que pase por el punto en que se cortan las dos diagonales del trapecio, la longitud de ese segmento es la media armónica de las longitudes de las bases.

También se demostrarán otros resultados que están relacionados con la interpretación de la media vía el trapecio y su relación con ciertas propiedades de las cónicas regulares a través de sus cuerdas focales.

Conceptos y resultados previos

En algunas de las demostraciones que siguen se utilizarán coordenadas cartesianas, mientras que en otras se manejarán coordenadas polares. La utilización de unas u otras dependerá de la simetría y de la sencillez con la que se pueda probar el resultado.

Puede decirse que las cónicas o curvas de segundo grado están ligadas, en muchas de sus propiedades geométricas que las caracterizan, al trapecio rectángulo, como se verá en algunos de los resultados, cuyas demostraciones aparecen como ejemplos.

Como muchas de las propiedades de las cónicas se describen mediante haces de cuaternas armónicas, puede decirse que las cónicas son *curvas armónicas*. Ver Hadamard (1988), Eves (1969), Deltheil y Caire (1989) y Lebossé y Hèmerly (1997).

Se supone en todo lo que sigue que se conoce la geometría euclídea plana elemental, tanto desde el punto de vista métrico sintético, como afín, así como el manejo de coordenadas cartesianas y polares. También se puede utilizar el lenguaje de los números complejos.

El trapecio y las cónicas

En primer lugar se dará un resultado que permitirá en lo sucesivo utilizar el trapecio, en particular el trapecio isósceles o el rectángulo, para construir por medio de los infinitos segmentos paralelos a sus bases todas las medias de dos números reales positivos.

Veamos en la siguiente cuestión, planteada y resuelta por Möbius, cómo aparece la figura del trapecio. En cierto sentido y de una forma más general, tenemos que en el cálculo baricéntrico desarrollado por Möbius, ("Der barycentrische Calcul", (1827)) la figura del trapecio puede servir para obtener las medias ponderadas de dos segmentos a y b , a través del resultado elemental en el que aparece el trapecio (Fauvel, Flood y Wilson, 1993):

Dado un segmento de recta AB , dos rectas paralelas l y m que pasan por A y B respectivamente, y dos coeficientes a y b , (Figura 1):

a) Existen los puntos A' sobre l y B' sobre m tales que:

$$a AA' + b BB' = 0$$

b) Para el punto P , que resuelve a), tomado sobre AB de manera que:

$$AP/PB = a/b$$

existen a su vez, los puntos A'' sobre l y B'' sobre m , para los que se verifica que:

$$a AA'' + b BB'' = (a + b) PP''$$

La indicación para probar el apartado a) de este resultado, (Figura 1), consiste en ver que los triángulos PAA' y PBB' son semejantes. La demostración de b) se sigue de a), al elegir los puntos A'', B'' y P'' de modo que $A'A'' = B'B'' = PP''$, y después operar adecuadamente.

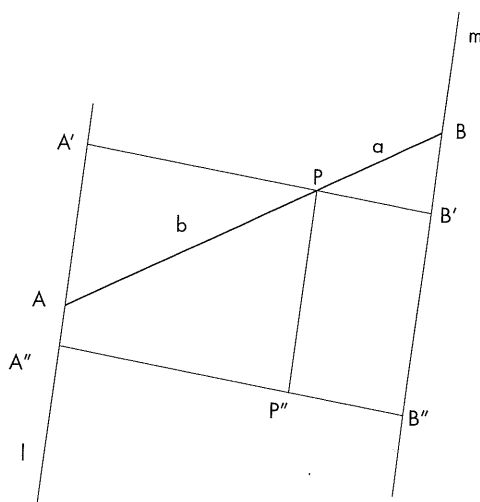


Figura 1

...se dará un resultado que permitirá en lo sucesivo utilizar el trapecio, en particular el trapecio isósceles o el rectángulo, para construir por medio de los infinitos segmentos paralelos a sus bases todas las medias de dos números reales positivos.

Las medias: sus propiedades y representaciones geométricas vía el trapecio

Sean a y b números reales positivos y dado otro número real r , llamamos *media r-ésima* al número real definido como sigue:

$$m_r = m_r(a, b) = r \sqrt{\frac{a^r + b^r}{2}}$$

Las propiedades más importantes son las siguientes:

- i) $m_r \geq 0$
- ii) $m_r(a, b) = m_r(b, a)$ (simétrica)
- iii) $m_r(ta, tb) = t m_r(a, b)$ (homogénea)
- iv) m_r es una función creciente y continuamente diferenciable de la variable real r que transforma biyectivamente el intervalo abierto (a, b) en (a, b) . Esto es:

$$r < s \text{ implica que } m_r < m_s$$

Mas aún, tenemos:

$$a < m_r < b$$

Para más detalles ver Beckenbach y Bellman (1961), Bullen y otros (1988), Nelsen (1993) y Mitrinovic (1989).

Una consecuencia del resultado anterior, obtenida aplicando el teorema de los valores intermedios, dice lo siguiente:

Si c es un número real tal que $a < c < b$, existe un único r tal que $m_r = m_r(a, b) = c$.

Veamos un caso particular, pero importante e interesante, con respuesta afirmativa para las medias armónica, geométrica, aritmética y cuadrática.

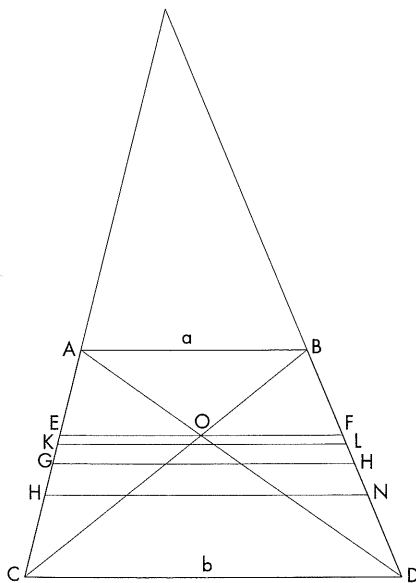
En primer lugar vamos a probar que todas las medias de dos números reales positivos —las longitudes de sus bases— se pueden interpretar geoméricamente mediante un segmento apropiado paralelo a ellas.

Teorema 1

Sea $ABCD$ un trapecio con bases $a = AB$ y $b = CD$. Sea O el punto de intersección de sus diagonales. Se cumple que:

- a) La media aritmética de a y b está representada por el segmento GH paralela media a las bases del trapecio.
- b) La media geométrica está representada por el segmento KL paralelo a las bases y situado de tal manera que los trapecios $ABLK$ y $KLDC$ sean semejantes.
- c) La media armónica está representada por el segmento EF paralelo a las bases que pasa por el punto O .
- d) La media cuadrática está representada por el segmento de recta MN paralelo a las bases que divide al trapecio $ABCD$ en dos trapecios de la misma área.

A lo largo de la demostración se hará referencia a la figura 2:



... vamos a probar que todas las medias de dos números reales positivos —las longitudes de sus bases— se pueden interpretar geoméricamente mediante un segmento apropiado paralelo a ellas.

a) Se traza la paralela media a las bases del trapecio GH . Una diagonal del trapecio la dividirá en dos segmentos, uno de longitud $a/2$, y el otro de longitud $b/2$. Y de aquí $GH = (a + b)/2$.

b) Si los trapecios $ABLK$ y $KLDC$ son semejantes, entonces:

$$\frac{AB}{KL} = \frac{KL}{CD} \Rightarrow KL^2 = AB \cdot CD \Rightarrow KL = \sqrt{a \cdot b}$$

c) Probemos primero que $EO = OF$. Todos los pares de triángulos que se compararán son semejantes ya que están en la posición de Thales: tienen un ángulo común en un vértice, y en ese vértice, los lados del mayor son las prolongaciones del otro, y un lado paralelo.

En efecto:

$$\Delta OAE \approx \Delta OCD \Rightarrow \frac{EO}{CD} = \frac{OA}{OD} \quad [1]$$

$$\Delta OBF \approx \Delta OCA \Rightarrow \frac{OF}{CA} = \frac{OB}{OA} \quad [2]$$

Dividiendo [1] y [2] miembro a miembro se obtiene:

$$\frac{EO}{OF} = \frac{OA \cdot BC}{OB \cdot AD} \quad [3]$$

Por otra parte, se tiene que:

$$\Delta OAB \approx \Delta OCD \Rightarrow \frac{OA}{OB} = \frac{OD}{OC} = \frac{OA + OD}{OB + OC} = \frac{AD}{BC} \quad [4]$$

Ahora, sustituyendo [4] en [3], llegamos a que: $EO = OF$.

Vamos a probar ahora el resultado. En efecto:

$$\Delta AEO \approx \Delta OCD \Rightarrow \frac{EO}{CD} = \frac{AE}{AC} = \frac{AC - EC}{AC} = 1 - \frac{EC}{AC} \quad [5]$$

$$\Delta CEO \approx \Delta OAB \Rightarrow \frac{EC}{AC} = \frac{EO}{AB} \quad [6]$$

De [5] y [6] tenemos:

$$\frac{EO}{CD} = 1 - \frac{EC}{AC} = 1 - \frac{EO}{AB} \Rightarrow EO \cdot \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} \right) = 1$$

y por lo tanto:

$$EO = \frac{AB \cdot CD}{AB + CD} = \frac{a \cdot b}{a + b} = \frac{1}{2} b$$

de donde $EF = 2 EO = b$.

Probemos ahora el recíproco de este teorema para el caso del trapecio rectángulo utilizando las coordenadas cartesianas:

Sea $ABCD$ un trapecio. Supongamos que EH es un segmento paralelo a las bases AB y CD , y que su longitud es la media armónica de las longitudes de las bases. Entonces las diagonales del trapecio AD y BC se cortan en el punto medio de EH .

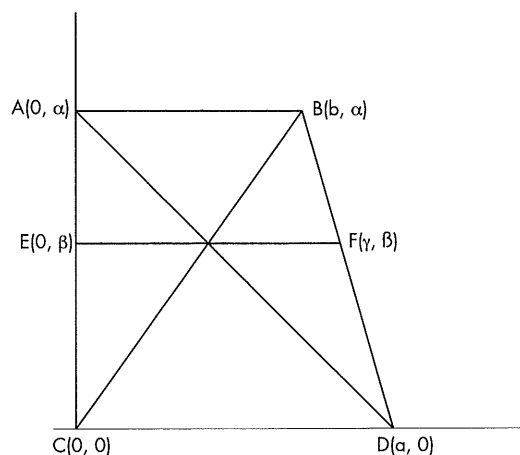


Figura 3

Vamos a hacer la demostración para el caso del trapecio rectángulo, dejando como ejercicio el caso general.

En efecto, elegimos sin pérdida de generalidad un sistema de referencia cartesiano de tal manera que todos los puntos que intervienen tengan coordenadas positivas. Así, tenemos que las coordenadas de los vértices del trapecio son, $A(0, \alpha)$, $B(b, \alpha)$, $C(0, 0)$, $D(a, 0)$, $E(0, \beta)$ y $F(\gamma, \beta)$, con $AB = b$, $CD = a$, y $EH = \gamma = \frac{2ab}{a+b}$ [7]

Ahora bien, como los puntos B , F y D están en la misma recta se obtiene, al sustituir [7], con a distinto de b , que:

$$\beta = \frac{\alpha}{b-a}(\gamma - a) = \frac{a\alpha}{b-a} \left(\frac{2b}{a+b} - 1 \right) = \frac{a\alpha}{a+b}$$

Por otra parte las ecuaciones de las rectas determinadas por las diagonales del trapecio vienen dadas por:

$$r_{BC}: y = \frac{\alpha}{b}x; \quad r_{AD}: y = -\frac{\alpha}{a}(x-a)$$

Resolviendo el sistema lineal anterior tenemos que el punto O de la intersección de las diagonales del trapecio es:

$$O \left(\frac{ab}{a+b}, \frac{a\alpha}{a+b} \right) \in r_{EF} \text{ cuya ecuación es: } \beta = \frac{a}{a+b}\alpha$$

Es obvio que O es el punto medio del segmento EH , ya que dicho punto medio viene dado por:

$$\frac{E+F}{2} = \frac{(0, \beta) + (\gamma, \beta)}{2} = \left(\frac{\gamma}{2}, \beta \right) = \left(\frac{ab}{a+b}, \frac{a\alpha}{a+b} \right) = O$$

que era lo que se quería demostrar.

El lector puede tratar de demostrar que:

En las mismas condiciones del trapecio anterior, si denotamos por X, Z, Y los puntos de intersección de las diagonales de cada uno de los trapecios siguientes: $ABEF$, $ABCD$, $EFCD$, entonces dichos puntos X, Z, Y están en una recta.

Este resultado no es otra cosa que una formulación del *Teorema de Pappus*.

Si I es el punto de intersección de los lados del trapecio y O es el punto donde se cortan sus diagonales, entonces la recta IO es mediana de los triángulos IAB e ICD .

Es decir, el segmento que pasa por I y O divide a los lados AB y CD en su punto medio. Esto es, los segmentos IQ e IP son medianas de los triángulos IAB e ICD , respectivamente (Figura 2).

d) Sea $r = MN$, llamamos x e y , a las alturas de los trapecios con igual área en que se divide el trapecio $ABCD$, de manera que $x + y$ es su altura. Entonces, al indicar que las áreas de los trapecios así construidos son la mitad del área del trapecio dado, tenemos que:

$$\frac{r+a}{2}x = \frac{a+b}{4}(x+y); \quad \frac{r+b}{2}y = \frac{a+b}{4}(x+y);$$

Las ecuaciones anteriores se pueden tratar como un sistema lineal en las incógnitas x e y . Este sistema tendrá solución única precisamente cuando:

Vamos a profundizar todavía más sobre la media armónica, interpretada como la longitud de un segmento paralelo a las bases de un trapecio y que pasa por el punto de intersección de las diagonales del mismo, con el objeto de ligar a esta figura con muchas de las propiedades intrínsecas de las cónicas regulares.

$$r^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

de aquí que r sea la media cuadrática de a y b .

El siguiente resultado se obtiene por cálculo algebraico directo o por el método geométrico basado en el teorema anterior.

Desigualdad entre las medias armónica, geométrica, aritmética y cuadrática:

Si $0 < a < b$, entonces se verifica que:

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} < b$$

Vamos a profundizar todavía más sobre la media armónica, interpretada como la longitud de un segmento paralelo a las bases de un trapecio y que pasa por el punto de intersección de las diagonales del mismo, con el objeto de ligar a esta figura con muchas de las propiedades intrínsecas de las cónicas regulares.

Teorema 2

Dado el trapecio rectángulo $ABCD$, de bases $AD = a$ y $CB = b$, siendo CD el lado perpendicular a las bases. Sea el segmento $EF = c$ media armónica de a y b y sean los puntos M , y N , respectivamente, las proyecciones ortogonales de F sobre AD y CB . Entonces, para números reales convenientes d , e y f , las siguientes propiedades son equivalentes:

- i) Si $p = AF$ y $q = FB$, entonces:
 $m_{-1}(p, q) = d m_{-1}(a, b)$;
- ii) Si $x = AM$ e $y = NB$, entonces:
 $m_{-1}(x, y) = e m_{-1}(a, b)$;
- iii) Si $u = FM$ y $v = FN$, entonces:
 $m_{-1}(u, v) = f m_{-1}(a, b)$.

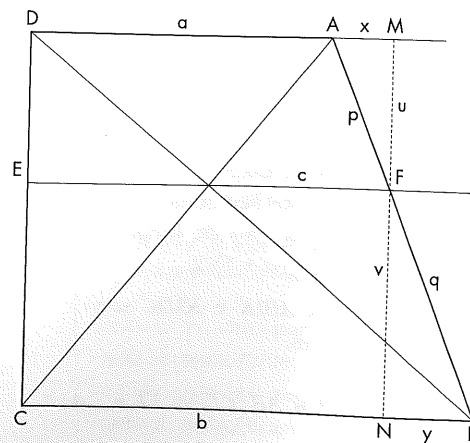


Figura 4

Los siguientes pasos son sólo un esquema de la demostración (Figura 4):

1) Como:

$$\begin{aligned} x &= EF - AD = c - a = \frac{2ab}{a+b} - a = \\ &= \frac{ab - a^2}{a+b} = \frac{a(b-a)}{a+b}; \\ y &= BC - EF = b - c = b - \frac{2ab}{a+b} = \\ &= \frac{b^2 - ab}{a+b} = \frac{b(b-a)}{a+b} \end{aligned}$$

Por cociente entre ambas expresiones obtenemos:

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

2) En las construcciones realizadas en la figura 4 tenemos que los triángulos AFM y BFN son rectángulos y semejantes, ya que tienen un ángulo opuesto por el vértice igual. Y de aquí, por el teorema de Thales, podemos escribir:

$$\frac{p}{q} = \frac{x}{y} = \frac{u}{v} = \frac{a}{b} \quad [8]$$

3) Si desdoblamos las igualdades anteriores como sigue, y se definen los números d , e y f de la forma siguiente:

$$d = \frac{a}{p} = \frac{b}{q}; e = \frac{a}{x} = \frac{b}{y}; f = \frac{a}{u} = \frac{b}{v};$$

tenemos después de breves cálculos que son reversibles y, usando de nuevo la igualdad [8], para el recíproco, que se verifican i) y ii).

Además, por las definiciones dadas:

$$rd = ze = wf = c$$

Esta última relación nos define a su vez, los números r , z y w , medias armónicas de las cantidades indicadas en i), ii) y iii), respectivamente.

Los siguientes enunciados pueden probarse como sencillos problemas:

Salvo la media aritmética, la media armónica es la única media de a y b que verifica esta propiedad.

Las siguientes afirmaciones sobre una paralela a las bases de un trapecio son equivalentes:

- 1) el punto donde se cortan las diagonales, divide a esta paralela en dos partes iguales;
- 2) la longitud de ese segmento es la media armónica de las longitudes de las bases.

Resultados

En esta sección se demostrarán los resultados citados en la introducción, ya conocidos sobre las cónicas.

Sea C una cónica con centro O y de focos F y F' y sean t_p y n_p las rectas tangente y normal, respectivamente, de un punto P arbitrario de la cónica C . Si R es el punto donde la normal n_p corta al eje real de la cónica, entonces la distancia entre P y R es la media armónica de las distancias de focos a la tangente t_p .

La demostración la haremos en el caso de la elipse. Para la hipérbola se seguirá un proceso similar (Figura 5).

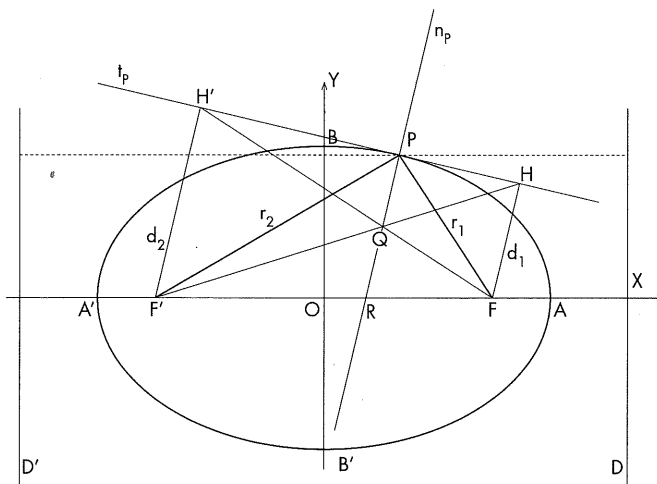


Figura 5

Tomamos como sistema de coordenadas cartesiano el formado por los ejes de simetría de la cónica. De esta forma las coordenadas de los focos son $F'(-c, 0)$, y $F(c, 0)$, y el centro de la cónica está en el origen de coordenadas. También, podemos suponer por simetría, para manejar las distancias entre punto y recta sin los valores absolutos, que el punto $P(r, s)$ de la cónica pertenece al primer cuadrante, es decir, $r > 0$ y $s > 0$.

Denotemos por E la elipse de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{con } a^2 = b^2 + c^2$$

Sean t_p y n_p las rectas tangente y normal en $P(r, s)$ cuyas ecuaciones son respectivamente:

$$t_p: \frac{xr}{a^2} + \frac{ys}{b^2} = 1; \quad n_p: y - s = \frac{a^2 s}{b^2 r} (x - r)$$

Si R el punto de intersección de la normal n_p con el eje real de la cónica, de su ecuación se tiene:

$$R\left(\frac{c^2 r}{a^2}, 0\right)$$

Denotemos ahora por $d = d(P, R)$ la distancia de P a R , por $d_1 = d(F, t_p)$ la distancia del foco F a la tangente t_p , y por $d_2 = d(F', t_p)$ la distancia del foco F' a la tangente t_p . Sean $r_1 = d(P, F)$ y $r_2 = d(P, F')$ los radio-vectores de P , un punto arbitrario de la cónica.

Calculemos, ahora, d , d_1 y d_2 :

$$d = d(P, R) = \sqrt{\left(\frac{c^2 r}{a^2} - r\right)^2 + s^2} = \frac{\sqrt{r^2 b^4 + s^2 a^4}}{a^2} = \frac{K}{a^2}$$

$$d_1 = d(F, t_p) = b^2 \frac{a^2 - cr}{K}$$

$$d_2 = d(F', t_p) = b^2 \frac{a^2 + cr}{K}$$

$$(\text{donde } K = \sqrt{r^2 b^4 + s^2 a^4})$$

Esto es válido para la elipse y la hipérbola. Teniendo en cuenta que $P(r, s)$ es un punto de una cónica con centro, al sustituir el punto en la ecuación analítica de cada una de ellas, después de operar y simplificar obtenemos para ambas cónicas:

$$K^2 = b^4 r^2 + a^4 s^2 = b^4 r^2 + a^2 a^2 s^2 = b^2 (rc - a^2)(rc + a^2) = a^2 b^2 r_1 r_2 > 0$$

donde $r_1 = d(P, F)$ y $r_2 = d(P, F')$ son los radios-vectores del punto P . Una vez más efectuando los cálculos por separado que son necesarios llegamos a:

$$2d_1 d_2 = 2b^2; \quad d_1 + d_2 = 2 \frac{a^2 b^2}{K}$$

luego:

$$\frac{2d_1 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{2b^2}{2 \frac{a^2 b^2}{K}} = \frac{K}{a^2} = d$$

con lo que el teorema queda demostrado.

Podemos dar, una vez más, una nueva interpretación geométrica del *latus rectum* de una cónica, utilizando este teorema como sigue: Para los pares de los vértices, A, A' y B, B' de la cónica se tiene que:

$d = d(O, B) = d(O, B') = d(O, t_B) = d_1 = d_2 = b$, por lo que el resultado es obvio.

Sin embargo, para los puntos A y A' la recta normal en ellos coincide con el eje real de la cónica y, por lo tanto, hay infinitos puntos de corte; el cálculo de d en esos puntos se obtiene por el paso al límite como sigue:

Si el punto X tiende al punto A , la abscisa x tiende a la abscisa a , por tanto $d = b^2/a = p$, (parámetro focal de la cónica, que es por definición, la mitad del *latus rectum* o longitud de la cuerda focal determinada por un foco).

Se deja al lector la demostración del siguiente resultado. Para ello puede usarse el segundo de los teoremas que daremos a continuación y luego plantear, resolver y discutir el problema correspondiente de lugares geométricos:

El punto de corte de las diagonales del trapecio $F'H'FH$ formado por los focos de la cónica y las proyecciones ortogonales respectivas de éstos sobre la tangente t_p , es el punto medio del segmento PR . El lugar geométrico de estos puntos medios es una cónica con centro.

Vamos a ver dos nuevas caracterizaciones de todas las cónicas regulares a través de la media armónica, y que se pro-

barán utilizando las coordenadas polares, ya que en estos dos casos es el método de demostración más simple y directo.

Si A y B son dos puntos cualesquiera de una sección cónica que determinan la cuerda AB que pasa por el foco de la cónica, la expresión:

$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF}$$

es constante.

Tomamos coordenadas polares para expresar la ecuación de la cónica, donde el foco F coincide con el polo y el eje polar se toma como el eje principal que contiene a ese foco (Figura 6).

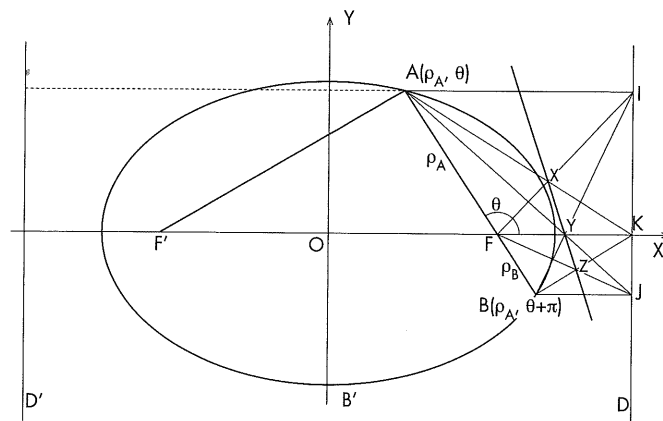


Figura 6

Con estas hipótesis la ecuación polar de todas las cónicas regulares —elipse, hipérbola y parábola—, es común y viene dada, para un punto $P(\rho, \theta)$ arbitrario de la cónica, por la expresión:

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

donde p es el parámetro focal o distancia del foco F a su directriz correspondiente D , y e es la excentricidad de la cónica.

Sea AB una cuerda arbitraria que pasa por el foco F . Las coordenadas polares de sus extremos son $A(\rho_A, \theta)$ y $B(\rho_B, \theta + \pi)$. Tenemos que:

$$\rho_A = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

$$\rho_B = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \pi)} = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$

Y de aquí obtenemos:

$$\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} = \frac{1}{\rho_A} + \frac{1}{\rho_B} = \frac{1 + e \cos \theta + 1 - e \cos \theta}{p} = \frac{2}{p}$$

De la expresión anterior deducimos que es constante —la media armónica— y, por lo tanto, no depende la cuerda elegida. Obsérvese que una vez más tenemos una nueva interpretación del parámetro p de una cónica a través de las cuerdas focales como la media armónica de los segmentos AF y FB .

Sea C una cónica regular con foco F y directriz D , y sea AB una cuerda focal determinada por los dos puntos arbitrarios A y B . Denotemos por I, K, J los puntos que se obtienen por proyección ortogonal de los puntos A, F y B , respectivamente, sobre D . Entonces la longitud del segmento FK es la media armónica de las longitudes de los segmentos AI y BJ .

Se procederá como anteriormente, pero lo haremos, por ejemplo, para el caso de la elipse (Figura 6).

Si $A(\rho_A, \theta)$ y $B(\rho_B, \theta + \pi)$ son las coordenadas de los extremos de la cuerda focal tenemos, por el resultado anterior, que:

$$FK = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la expresión del parámetro p de una cónica, podemos escribir las siguientes fórmulas:

$$BI = NK = FK - FN = \frac{b^2}{c} - \rho_A \cos \theta = \frac{b^2}{c} - \frac{pa \cos \theta}{a + \cos \theta} = \frac{ab^2}{c(a + c \cos \theta)}$$

$$AJ = MK = \frac{b^2}{c} + \rho_B \cos \theta = \frac{b^2}{c} + \frac{pa \cos \theta}{a - \cos \theta} = \frac{ab^2}{c(a - c \cos \theta)}$$

De todas las relaciones anteriores tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{BI} + \frac{1}{AJ} &= \\ &= \frac{c(a + c \cos \theta)}{ab^2} + \frac{c(a - c \cos \theta)}{ab^2} = \\ &= \frac{2ac}{b^2} = \frac{2}{FK} \end{aligned}$$

lo que demuestra el resultado. Esto es, una vez más FK es la media armónica de BI y AJ .

Un problema interesante que dejamos como ejercicio es el siguiente:

Dada una cónica regular C , y una cualquiera de sus cuerdas focales, entonces el punto de intersección de las dos diagonales del trapecio limitado por la cuerda, las proyecciones de sus extremos sobre la directriz asociada al foco y la propia directriz es siempre un punto situado en el eje mayor y que equidista del foco y de su directriz asociada (Figura 7).

En la figura 8 se da un ejemplo de un haz de cónicas, correspondiente a la ecuación:

$$2y^2 + kx^2 - 8x = 0$$

donde k es un número real arbitrario.

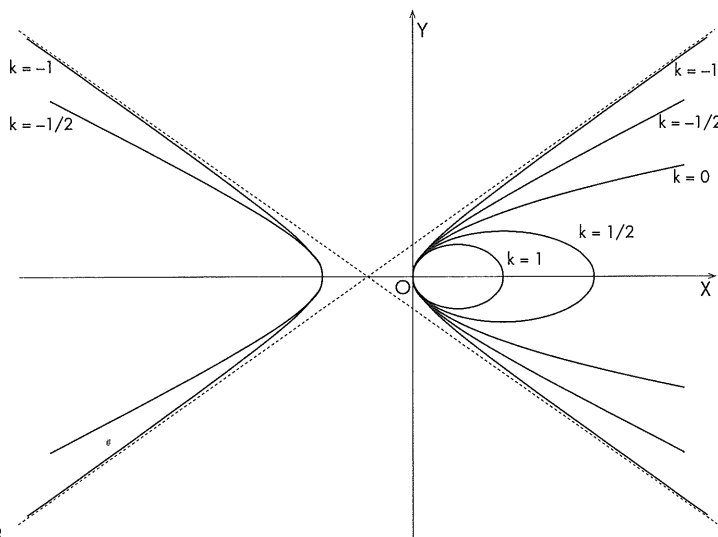


Figura 8

Del estudio de este haz de cónicas se obtiene lo siguiente:

- Si $k = 0$, se tiene la parábola $2y^2 = 8x$.
- Si k es no nulo, se tiene que:
 - si $k > 0$ una elipse;
 - si $k < 0$ una hipérbola.
- Si $k > 0$ $y \rightarrow 0$, las elipses se alargan y se aproximan a una parábola.
- Si $k < 0$ $y \rightarrow 0$ las hipérbolas de la derecha se aproximan a la parábola, y las ramas de la izquierda se alejan hasta el infinito.

Ecuación común de las tres cónicas

Hay distintas ecuaciones comunes de las tres cónicas. En este apartado expondremos algunas y nos referiremos también a la versión de las cónicas según Apolonio.

Se puede demostrar que elipse, hipérbola y parábola se pueden representar por una única ecuación, tomando para ello como origen de coordenadas el vértice de la curva, como eje de abscisas el que pasa por ese punto dirigido hacia el sentido de la concavidad de la curva, y el de ordenadas la recta tangente en el vértice. De aquí, por un paso al límite adecuado, se probará a su vez que la parábola es el caso límite común de la elipse y de la hipérbola (Quinet, 1996).

Se procede de la manera que sigue:

1. Se toma la ecuación canónica de una cónica con centro.
2. Se hace una traslación de ejes llevando el origen al punto $A(a, 0)$. Llamando X e Y a las coordenadas con relación a los nuevos ejes AX y AY , tendremos:

...nos referiremos también a la versión de las cónicas según Apolonio.

$$\begin{aligned}x &= X - a, & Y &= y \text{ (elipse),} \\x &= X + a, & Y &= y \text{ (hipérbola),} \\x &= X, & Y &= y \text{ (parábola).}\end{aligned}$$

3. Operando se llega a la ecuación común para las tres cónicas:

$$Y^2 = 2pX + rX^2$$

donde $p = b^2/a$ (parámetro de la cónica) y $r = \pm b^2/a^2$ y donde si $r > 0$ es hipérbola, si $r = 0$ es parábola y si $r < 0$ (elipse) y recíprocamente. (Para el caso de la parábola, $y^2 = 2px$, mediante la transformación identidad, $x = X, y = Y$ se transforma en la parábola $Y^2 = 2pX$).

4. Utilizando esta ecuación común es fácil ver que si en una elipse o en una hipérbola uno de los vértices permanece fijo y el otro se aleja hasta el infinito, se obtiene una parábola:

$$Y^2 = 2pX$$

En efecto, hallemos a partir de la ecuación común las abscisas de los dos vértices anulando Y :

$$2pX + rX^2 = X(2p + rX) = 0$$

de donde $X = 0$ (primer vértice, origen), $X = -2p/r$ (segundo vértice).

Para que el segundo vértice tienda hacia el infinito es necesario que, siendo p y r variables, r tienda a cero (con p no nulo). En este caso, la ecuación de la cónica se reduce a $Y^2 = 2pX$, que es una parábola.

De forma similar se puede ver, tanto para la elipse como para la hipérbola, que si el eje mayor aumenta indefinidamente permaneciendo fijos uno de sus focos y el vértice próximo a éste, ambas cónicas en el límite tienden hacia una parábola.

Para ello se procede como antes, llegando para la elipse, por ejemplo, a la ecuación:

$$y^2 = \left(p - \frac{p^2}{4a}\right) \cdot \left(2x - \frac{x^2}{a}\right) \quad (\text{elipse})$$

$$y^2 = \left(\frac{p^2}{4a} - p\right) \cdot \left(\frac{x^2}{a} - 2x\right) \quad (\text{hipérbola})$$

$$\text{donde } b^2 = \pm \left(pa - \frac{p^2}{4}\right)$$

para la elipse e hipérbola, respectivamente.

Vemos, por lo tanto, que si el foco F' se aleja indefinidamente, a tiende a infinito, resultando en ambos casos que:

$$y^2 = 2px$$

que es la ecuación de una parábola.

Las cónicas según Apolonio

Sea AB el eje de la sección cónica, con vértice en A . Desde cualquier punto de la cónica bajamos la perpendicular PQ

que Apolonio llama una ordenada. Levantamos el segmento AR perpendicular a AB y tal que la longitud de AR es igual al *latus recto* de la cónica (El *latus recto* es la longitud de la cuerda que es perpendicular al eje y pasa a través del foco. Apolonio da una definición diferente pero equivalente). Trazamos antes, sobre AR (o prolongado), el segmento AS de tal manera que:

$$AQ \cdot AS = (PQ)^2 \quad [9]$$

Apolonio prueba que:

- $AS < AR$ para una elipse;
- $AS = AR$ para una parábola,
- $AS > AR$ para una hipérbola.

Si denotamos el *latus recto* AR por $4p$, y ponemos $x = AQ, y = PQ$, entonces [9] se convierte $AS = y^2/x$, y los tres casos anteriores se escriben como:

$$y^2 < 4px \text{ para la elipse}$$

$$y^2 = 4px \text{ para la parábola,}$$

$$y^2 > 4px \text{ para la hipérbola.}$$

En efecto, la elipse e hipérbola tienen como ecuaciones:

$$y^2 = 4px - \frac{4px^2}{d}$$

$$y^2 = 4px + \frac{4px^2}{d}$$

respectivamente, donde d es el diámetro. La parábola se obtiene como caso límite de ambas cónicas cuando hacemos $d \rightarrow \infty$ (Salmon, 1929; Field y Gary, 1987; Boyer, 1956; Katz, 1998; Kline, 1992; Schaff, 1973; Collette, 1985; Quinet, 1996; Heath, 1981).

Para finalizar este trabajo proponemos varios problemas que dejamos al lector:

- 1) Demostrar que una elipse y una hipérbola que tienen los mismos focos se cortan ortogonalmente.
- 2) a) Hallar las curvas cuyas normales pasan por un punto fijo.
b) ¿Cuál es la curva cuya subnormal (longitud del segmento determinado por los puntos P y N , que son las proyecciones perpendiculares del punto M , de la curva $y = f(x)$) es constante?
- 3) Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas focales de una cónica.

*...se puede ver,
tanto para
la elipse como
para la hipérbola,
que si el eje mayor
aumenta
indefinidamente
permaneciendo
fijos uno de
sus focos
y el vértice
próximo a éste,
ambas cónicas
en el límite
tienden hacia
una parábola.*

- 4) Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los radios vectores de una cónica.
- 5) Si P_1FP_2 y Q_1FQ_2 son dos cuerdas focales perpendiculares de una cónica, demostrar que:

$$\frac{1}{P_1F \cdot FP_2} + \frac{1}{Q_1F \cdot FQ_2}$$

es constante.

- 6) En (Berger, 1987) encontramos algunos problemas interesantes y la generalización del problema 5:

a) Sea C una cónica central, M un punto de C y, sean P, Q los puntos donde la normal a C en M intersecta con los ejes de C . Probar que el cociente MP/MQ permanece constante, y calcularlo. Probar el recíproco. Deducir el valor de radio de curvatura en los vértices de C .

b) Sean M y N puntos sobre una elipse C con centro O , y admitamos que el ángulo formado por las semirectas OM, ON es un ángulo recto. Demostrar que:

$$\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2}$$

es una constante. ¿Cuál es la envolvente de las rectas MN ?

c) Sea A un punto interior de una elipse C con centro O , sea D una recta que pasa por A y que corta a C en los puntos M, N y sea P un punto de C tal que OP es paralelo a D . Demostrar que el cociente:

$$\frac{AM \cdot AN}{OP^2}$$

es constante.

d) Sean D, D' dos rectas ortogonales (en un espacio euclideo), que contienen a A y cortan a C en M, N y M', N' , respectivamente. Demostrar que:

$$\frac{1}{AM \cdot AN} + \frac{1}{AM' \cdot AN'}$$

es constante. ¿Cuál es la envolvente de las rectas MN ?

Conclusiones, comentarios y observaciones

La primera y principal conclusión de este artículo, con relación a los resultados propuestos, está en Eves (1969), cuando da una justificación de la utilización de los métodos de coordenadas:

[...] Hay pocas experiencias académicas que puedan emocionar más al estudiante de matemáticas elementales universitarias que su iniciación en este método nuevo y poderoso de atacar los problemas geométricos.

La segunda conclusión de este trabajo se debe a la observación final de G. Szego en sus distintos libros:

No deberíamos olvidar que la solución de cualquier problema digno de consideración, muy raras veces nos resulta fácil y poco trabajosa; es más bien el resultado de un esfuerzo intelectual de días, semanas o meses. ¿Por qué un joven iba a estar dispuesto a hacer un esfuerzo supremo? La explicación es probablemente la preferencia instintiva por ciertos valores, es decir, la actitud que valora el esfuerzo intelectual y el éxito espiritual más que la ventaja material... Puede que el medio más eficaz consista en transmitir a los jóvenes la belleza del trabajo intelectual y la sensación de satisfacción después de un esfuerzo mental grande y con éxito...

Otra conclusión que se deduce de esta experiencia es la de llegar a alcanzar la sensibilidad del alma matemática, del que se embarca en la aventura del descubrimiento matemático y en el arte para hacerlo, queda resumido en las maravillosas, hermosas y bellas palabras de Proclo:

Así es, pues, la matemática te recuerda la forma invisible del alma; da vida a sus propios descubrimientos; despierta la mente y purifica el intelecto; arroja luz sobre nuestras ideas intrínsecas y anula el olvido y la ignorancia que nos corresponde por nacimiento.

Finalmente, en Gillén (1999) se encuentran las siguientes reflexiones:

La poesía es, sencillamente, la forma más bella, impresionante y efectiva de decir las cosas...

...Sin embargo, así como las ecuaciones representan el discernimiento de verdades eternas y universales, su expresión escrita es estrictamente humana y provinciana. Por eso es por lo que se parecen a los poemas, intentos maravillosamente ingeniosos de hacer comprensibles a los seres finitos las realidades infinitas... Y su legado consiste en cinco de los mejores poemas que jamás ha inspirado la imaginación humana...

En definitiva, el pentagrama de oro que forma la partitura de la sinfonía musical de una buena educación matemática está determinado por la proporción áurea que tiene como lado el alumno, y como diagonal al profesor y que, se escribe, con las siguientes notas sublimes: Imaginación -Intuición, Creación, Resolución, Construcción y Discusión. Todo esto constituye, en esencia, el arte matemático.

*...el pentagrama
de oro
que forma
la partitura
de la sinfonía
musical
de una buena
educación
matemática
está determinado
por la proporción
áurea
que tiene
como lado
el alumno,
y como diagonal
al profesor...*

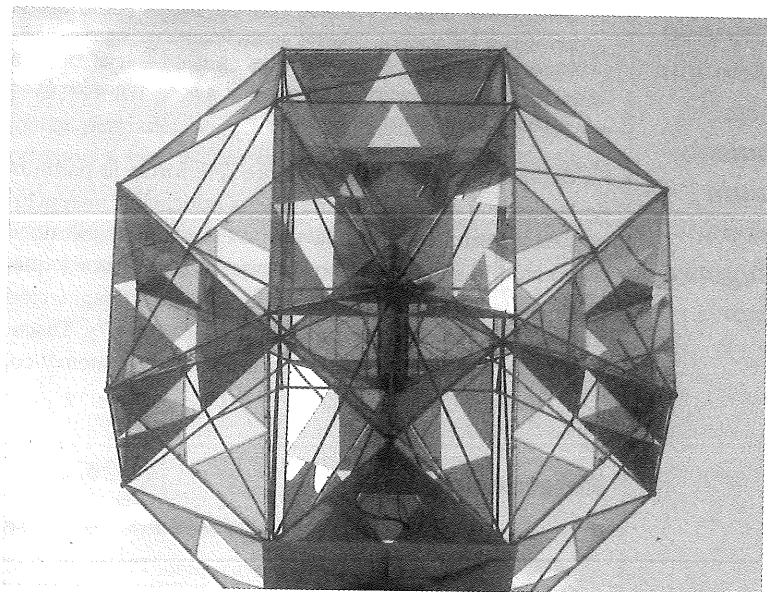
Referencias

- BECKENBACH, E. y R. BELLMAN (1961): *An Introduction to Inequalities*, MAA, Washington.
- BOYER. C.B. (1956): *History of Analytic Geometry*, The Scholarrs Bookshelf, Princenton, New Jersey.
- BULLEN, P.S., D.S. MITRINOVIC y P.M. VASIC (1988): *Means and Their Inequalities*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- CAGNAC, G., E. RAMIS y J. COMMEAU (1965): *Géométrie*, Masson, París.
- COLLETTE, J. P. (1985): *Historia de las Matemáticas*, Vols. I y II, Siglo XXI de España Editores, Madrid.
- COMMISSAIRE, H. y G. CAGNAC (1989): *Cours de Mathématiques specials*, Ed. Jacques Gabay, Paris.

- DELTHEIL, R. y D. CAIRE (1989): *Géométrie et Complements*, Editions J. Gabay, Paris.
- DORFMAN, A.G. (1994): *Óptica de las secciones cónicas*, Mir, Moscu.
- EFIMOV, N.V. (1984): *Elements de Géométrie Analytique*, Mir, Moscu.
- EVES, H. (1989): *Estudio de las Geometrias*, Vol. I y II, Uteha, Mexico.
- FAUVEL, J., R. FLOOD y R. WILSON, R. (eds.) (1993): *Mobius his band*, Oxford University Press, Oxford.
- FIELD, J.V. y J. GARY (1987): *The Geometrical work of Girard Desargues*, Springer-Verlag, New York.
- GUILLEN, F. (1999): *Cinco ecuaciones que cambiaron el mundo*, Debate, Barcelona.
- HADAMARD, J. (1988): *Lecons de Géométrie élémentaire*, Tomos I y II, Editions J. Gabay, Paris.
- HEATH, TH. (1981): *A History of Greek Mathematics*, Vols. I y II, Dover, New York.
- KATZ, V.J. (1998): *A History of Mathematics, An Introduction*, Addison -Wesley, Readings Massachusetts.
- KLINE, M. (1992): *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, Vol. 1, 2 y 3, AU, Alianza Editorial, Madrid.
- LEBESGUE, H. (1989): *Les coniques*, Ed. Jacques Gabay, Paris.
- LEBOSSÉ, C. y C. HEMERY (1997): *Géométrie*, Ed. J. Gabay, Paris.
- LYUBIC, YU I. y L.A. SHOR (1978): *Metodo cinemático en problemas geométricos*, Mir, Moscu.

Juan-Bosco Romero
 Departamento de Álgebra,
 Geometría y Topología
 Universidad de Valladolid.
 Sociedad «Puig Adam»
 de Profesores de Matemáticas

- MITRINOVIC, D.S., J.E. PECARIC y V. VOLO-
 NEC (1989): *Recent Advances in Geome-
 try Inequalities*, Kluwer Academic Press,
 Dordrecht.
- NELSEN, R.G. (1993): *Proofs without Words,
 Exercises in visual Thinking*, MAA,
 Washington.
- POGEROLOV, A. (1987): *Geometry*, Mir, Moscu.
- PUIG-ADAM, P. (1967): *Geometría Métrica*,
 Tomo I y II, Madrid.
- QUINET, J. (1996): *Curso elemental de mate-
 máticas superiores, T.6: Geometría analí-
 tica y aplicaciones diversas*, Paraninfo,
 Madrid.
- ROUCHE, E. y C. COMBEROUSSE (1997):
Traite de Géométrie, Ed. J. Gabay, Paris.
- SALMON, G. (1929): *A Treatise on Conics
 Sections*, Logmans, Green and Co, Inc.,
 New York.
- SCHAFF, W.L. (1973): *A bibliography of recre-
 ational Mathematics*, Vols. 1, 2, 3 y 4.
 NTCM, Reston.
- WOOTON, W., E.F. BECEKENBACH y F.J.
 FLEMING (1976): *Geometría Analítica
 Moderna*, Pub. Cultural, México.
- YATES, R.C. (1977): *Curves and their propier-
 ties*, NCTM, Reston.



Expo 92. Sevilla
 (Fotos: Pilar Moreno)

