SUMA 41
noviembre 2002, pp. 11-18

La demostración y los sistemas de cálculo simbólico

Lorenzo Javier Martín García
Juan Antonio Velasco Mate

ARTÍCULOS

La pregunta general a la que pretendemos responder es: ¿cómo pueden incorporarse los sistemas de cálculo simbólico (SCS) a la realización de demostraciones, en particular, y a la enseñanza de las matemáticas, en general? La metodología seguida, para encontrar respuestas adecuadas, no es otra que el desarrollo detallado de situaciones concretas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas, utilizando el sistema de cálculo simbólico Maple 7, y reflexionando sin apasionamiento sobre los resultados obtenidos. Adicionalmente, y de forma solapada, planea otra cuestión no menos importante: ¿hasta qué punto pueden aceptarse como auténticas demostraciones los resultados obtenidos con este tipo de herramientas?

LA IRRUPCIÓN en el mercado de potentes sistemas de cálculo simbólico (SCS), capaces de realizar eficientemente complicados cálculos simbólicos, está influyendo poco a poco en la manera de presentar los contenidos matemáticos a los alumnos, y está cambiando la jerarquía de prioridades en la consecución de objetivos docentes, ya que la utilización de estas herramientas permite dedicar menos tiempo al cálculo manual o gráfico, y más tiempo a la comprensión de conceptos abstractos.

Sin lugar a dudas, la parte más apropiada para este cambio es la relacionada con la repetición de ejercicios y habilidades, ya que además de resolver los ejercicios «clásicos», pueden plantearse nuevos problemas cuyos datos no estén cuidadosamente «preparados» para que las operaciones intermedias se manipulen satisfactoriamente sin grandes esfuerzos adicionales. Esta peculiaridad lleva aparejada la posibilidad de resolver más ejercicios y más significativos. Por otra parte, el aprovechamiento de las utilidades gráficas permite profundizar más en la interpretación de los resultados y en la búsqueda de conexiones entre los objetos matemáticos y los objetos de la vida cotidiana.

Si a estas razones añadimos que la renovación de los planes de estudios de las carreras técnicas españolas (ingenierías superiores, ingenierías técnicas, informática, etc.), ha reducido considerablemente los créditos de las asignaturas de matemáticas sin reducir proporcionalmente los objetivos que hay que alcanzar, parece razonable que los Departamentos de Matemáticas (generalmente se añade el calificativo «aplicadas») de las conocidas como universidades politécnicas, hayan sido los primeros en incorporar decididamente los SCS a su trabajo cotidiano en la doble versión de ayuda al profesor en la transmisión de los contenidos y de ayuda al alumno en la materialización de técnicas de estudio tanto personal como colectivo. Pero, aunque en la enseñanza universitaria las condiciones para la utilización de estos SCS puedan parecer más propicias que en la enseñanza secundaria, nunca ha sido buena política desaprovechar las ventajas que aportan los avances tecnológicos. De hecho, ya se han realizado experiencias concretas encaminadas a facilitar la comprensión de conceptos como el de derivada en 1.° de Bachillerato (Martín y Velasco, 1999) o el de integral de Riemann en 2.° de Bachillerato (Martín y Velasco, 2001).

Sin embargo, hay más aspectos en los que la incidencia de estas herramientas de cálculo es importante. La pregunta general a la que pretendemos responder es: ¿cómo pueden incorporarse los sistemas de cálculo simbólico (SCS) a la realización de demostraciones, en particular, y a la enseñanza de las matemáticas, en general?

La metodología seguida para encontrar respuestas adecuadas no es otra que el desarrollo detallado de situaciones concretas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas utilizando el SCS Maple 7, y reflexionando sin apasionamiento sobre los resultados obtenidos. Como suele suceder habitualmente con las preguntas que no tienen una respuesta taxativa, aparecen casos en los que la utilidad de los SCS está fuera de toda duda, junto a otros en donde caben todo tipo de interpretaciones. En cualquier caso, las experiencias negativas, entendiendo por tales aquellas que no aconsejan el uso de estas utilidades informáticas, también son útiles para fijar el verdadero lugar que deben desempeñar los SCS en los diferentes niveles educativos.

Adicionalmente, y de forma solapada, planea otra cuestión no menos importante: ¿hasta qué punto pueden aceptarse como auténticas demostraciones los resultados obtenidos con este tipo de herramientas?

¿cómo pueden incorporarse los sistemas de cálculo simbólico (SCS) a la realización de demostraciones, en particular, y a la enseñanza de las matemáticas, en general?

¿hasta qué punto pueden aceptarse como auténticas demostraciones los resultados obtenidos con este tipo de herramientas?

Demostraciones y sistemas de cálculo simbólico

En general, la esencia de una demostración radica en el desarrollo de una estrategia que combine la aplicación cuidadosa y oportuna de propiedades más o menos complicadas, y el manejo operacional adecuado de los resultados intermedios. Es evidente que la parte más creativa corresponde a la elección de la estrategia a seguir, de tal modo que una manera de medir la elegancia de una demostración no es según la cantidad de cálculos que se deban realizar sino según la cantidad de cálculos que ha evitado la estrategia diseñada. Frente a las situaciones en las que la fuerza bruta y el cálculo tedioso son la única manera de romper la barrera que nos impide alcanzar el objetivo final, se sitúan las «ideas felices» que aclaran el horizonte con un simple razonamiento demoledor. No se debe ocultar que, habitualmente, tras una idea genial se encuentran muchas horas previas de trabajo y de estudio.

Los sistemas de cálculo simbólico de propósito general pueden ser muy útiles y autosuficientes en la realización de operaciones y cálculos, pero no se les puede exigir la responsabilidad del diseño de estrategias acertadas de resolución de problemas genéricos ni, menos aún, se debe pretender que generen demostraciones precisas de teoremas como el de la función implícita. Los SCS no son demostradores automáticos de teoremas, sino potentes calculadoras con algunos conocimientos de matemáticas.

En el mejor de los casos, introducir los datos adecuadamente puede ser suficiente para que se resuelva el ejercicio planteado, pero esto no libera al usuario de la comprensión del problema ni del conocimiento mínimo de interacción con el programa. A fin de cuentas y para facilitar el uso a aquellos que no están avezados en la metodología de la programación, los sistemas de cálculo simbólico se colocan en un nivel superior al que ocupan los conocidos lenguajes de programación de alto nivel. De hecho, sus instrucciones son programas realizados mediante esos lenguajes. Por otra parte, de todos es conocido que sin un buen programa, un lenguaje de programación no es capaz de obtener, por sí mismo, ni buenos ni malos resultados.

Sin embargo, los resultados intermedios siempre van a proporcionar un mayor conocimiento de las dificultades que hay que superar y, en este sentido, los sistemas de cálculo simbólico se perfilan como una poderosa herramienta que puede servir para establecer nuevas estrategias o para modificar las inicialmente escogidas.

Demostraciones mediante cálculos

Muchas propiedades matemáticas se demuestran realizando operaciones que expresen el mismo resultado de formas diferentes. Esto permite añadir nuevas interpretaciones al resultado inicial, extender su aplicación a otros casos análogos o simplificar algunos cálculos posteriores. Quien conoce la mecánica de las operaciones, y no se equivoca en su ejecución, puede realizar la correspondiente demostración sin grandes problemas, y en un periodo razonable de tiempo. La mayor parte de las propiedades de los determinantes, puede encuadrarse en este tipo de demostraciones mediante cálculos.

Determinantes de matrices

Para comprobar que el determinante de una matriz cuadrada M puede calcularse sumando los productos de cada elemento de la primera fila de M y su adjunto –menor acompañado de signo– correspondiente, basta realizar los cálculos y simplificar los resultados hasta llegar a la conclusión de que los dos términos de la igualdad coinciden.

Es seguro que un SCS no sería el primero en establecer esta propiedad; con certeza, no sería capaz de interpretar que un diferente agrupamiento de los términos conduce a otra expresión equivalente. Sin embargo sí puede emplear su potencia de cálculo para verificar la mencionada igualdad para matrices cuadradas de «prácticamente» cualquier orden.

En concreto, dada la matriz cuadrada de orden 4[1]:

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

el valor, completamente desarrollado, de su determinante vale[2]:

$$\begin{aligned} |M| = {} & a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} + a_{11}a_{32}a_{43}a_{24} - a_{11}a_{32}a_{23}a_{44} \\ & + a_{11}a_{42}a_{23}a_{34} - a_{11}a_{42}a_{33}a_{24} - a_{21}a_{12}a_{33}a_{44} + a_{21}a_{12}a_{34}a_{43} \\ & - a_{21}a_{32}a_{43}a_{14} + a_{21}a_{32}a_{13}a_{44} - a_{21}a_{42}a_{13}a_{34} + a_{21}a_{42}a_{33}a_{14} \\ & + a_{31}a_{12}a_{23}a_{44} - a_{31}a_{12}a_{43}a_{24} + a_{31}a_{22}a_{43}a_{14} - a_{31}a_{22}a_{13}a_{44} \\ & + a_{31}a_{42}a_{13}a_{24} - a_{31}a_{42}a_{23}a_{14} - a_{41}a_{12}a_{23}a_{34} + a_{41}a_{12}a_{33}a_{24} \\ & - a_{41}a_{22}a_{33}a_{14} + a_{41}a_{22}a_{13}a_{34} - a_{41}a_{32}a_{13}a_{24} + a_{41}a_{32}a_{23}a_{14} \end{aligned}$$

y la suma de los productos de los elementos de la primera fila por su menor acompañado del signo correspondiente es[3]:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{4} (-1)^{(1+j)} M_{1j} \left|\mathrm{Menor}(M,1,j)\right| = \\ & a_{11}(a_{22}a_{33}a_{44} - a_{22}a_{34}a_{43} + a_{32}a_{43}a_{24} - a_{32}a_{23}a_{44} + a_{42}a_{23}a_{34} - a_{42}a_{33}a_{24}) \\ & -a_{12}(a_{21}a_{33}a_{44} - a_{21}a_{34}a_{43} + a_{31}a_{43}a_{24} - a_{31}a_{23}a_{44} + a_{41}a_{23}a_{34} - a_{41}a_{33}a_{24}) \\ & +a_{13}(-a_{31}a_{22}a_{44} - a_{21}a_{42}a_{34} + a_{41}a_{22}a_{34} + a_{21}a_{32}a_{44} - a_{41}a_{32}a_{24} + a_{31}a_{42}a_{24}) \\ & -a_{14}(a_{21}a_{32}a_{43} - a_{21}a_{42}a_{33} + a_{31}a_{42}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{43} + a_{41}a_{22}a_{33} - a_{41}a_{32}a_{23}) \end{aligned}$$

Para comprobar que ambos resultados coinciden pueden tomarse varios caminos: restar y simplificar para llegar al valor 0[4]; sacar factor común en el valor del determinante a los elementos de la primera fila y observar que la expresión resultante coincide con la de la suma; desarrollar los términos del sumatorio aplicando la propiedad distributiva y llegar hasta la expresión del determinante, etc. En concreto, la fórmula demostrada es:

$$|M| = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{(1+j)} M_{1j} \left|\mathrm{Menor}(M,1,j)\right|$$

Evidentemente, si en vez de emplear los elementos de la primera fila, se emplean los de cualquier otra, se obtienen fórmulas equivalentes. Y si se utilizan columnas en lugar de filas, el resultado es el mismo.

Con el esquema propuesto, Maple 7 es capaz de demostrar estas igualdades para matrices cuadradas de dimensión n, con la única limitación de la capacidad de la máquina con la que se trabaje. Estos cálculos deben entenderse como verdaderas demostraciones porque serían los mismos cálculos que realizaría el «demostrador» humano, si eligiera este camino. Sin embargo, en sentido estricto, no se puede admitir como una demostración genérica independiente de la matriz cuadrada considerada, porque el «rompe-demostraciones» siempre puede escoger una dimensión lo suficientemente grande para que no haya máquina capaz de almacenar tanto dato. Verdaderamente, se habría demostrado que para dimensiones matriciales entre 1 y el límite de la máquina, la igualdad se verifica. Por eso, la abstracción teórica resulta necesaria hasta completar la habitual frase: *para cualquier dimensión* n...

Por otra parte, la información obtenida al realizar las operaciones puede resultar esencial en la elaboración de una demostración genérica. Por ejemplo, es muy sencillo comprobar[5] que:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41}+b_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

1 El comando de Maple 7 utilizado para construir la matriz M es >M:=Matrix(4, (i,j)->a[i,j]);.

2 Una vez cargado el *package* LinearAlgebra con el comando >with(LinearAlgebra);, la asignación del valor del determinante de la matriz M al nombre *DM* se realiza mediante >DM:=Determinant(M);.

3 Para calcular esta suma y asignarla a la expresión *SM*, se puede invocar >SM:=add((-1)^(1+j)*M[1,j]*Determinant(Minor(M,1,j)), j=1..4);.

4 La respuesta de Maple 7 a >simplify(DM-SM);, es 0.

5 Maple 7 es capaz de hacer esta comprobación pidiéndole que calcule los determinantes y simplifique.

y observar que la esencia de la demostración radica en la aplicación de la propiedad distributiva, que es válida para cualquier dimensión en la que nos movamos.

Operadores vectoriales

Los operadores vectoriales como la divergencia, el rotacional, el gradiente o el laplaciano, de gran utilidad en física e ingenierías, verifican entre ellos propiedades con importantes interpretaciones pero cuya comprobación es meramente operacional. Un ejemplo de estas propiedades es la comprobación de que la divergencia del rotacional de un campo vectorial, *F*, dos veces diferenciable con continuidad en el espacio tridimensional es siempre cero:

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$

donde únicamente se necesita comprobar que el campo considerado cumple las condiciones de diferenciabilidad, conocer el funcionamiento de los operadores involucrados y simplificar para llegar al resultado final[6].

Otro ejemplo en la misma línea es la comprobación de que el producto escalar[7] habitual en $\mathbb{R}^3$ es lineal en cada una de sus componentes: basta operar y agrupar términos para llegar a la igualdad de los elementos.

Como los operadores divergencia y rotacional ya están incorporados a Maple 7, así como el producto escalar habitual de $\mathbb{R}^3$, el SCS comprueba inmediatamente estas propiedades haciendo uso de su potencia de cálculo simbólico. Claramente, los resultados proporcionados pueden entenderse como demostraciones porque los cálculos y simplificaciones efectuados no varían un ápice de los que manualmente se hubieran realizado empleando lápiz y papel.

Fórmulas trigonométricas

Las fórmulas que transforman productos de senos y cosenos en sumas y diferencias de estas funciones se encuentran en la misma situación que las propiedades anteriores: un simple comando permite pasar de una expresión a otra[8].

Sin embargo, a la inversa, partiendo de la suma o diferencia de funciones trigonométricas es muy difícil llegar al producto equivalente. En particular, aun conocida la igualdad, no puede aplicarse en los procesos habituales de simplificación a no ser que expresamente se especifique. Maple 7 se encuentra en la situación –ni infrecuente, ni paradójica– de ser capaz de alcanzar un resultado pero incapaz de aplicarlo convenientemente.

Por otra parte, las fórmulas que, conocidas las razones trigonométricas de un ángulo, permiten calcular las del ángulo mitad no están disponibles en forma simbólica. En consecuencia, tampoco pueden aplicarse si alguna vez resulta necesario.

Un mecanismo que permite reutilizar las fórmulas o identidades ya establecidas –ya sea por el SCS o por cualquier otro medio– es la creación de una tabla que las recoja para su posterior consulta y aplicación. En definitiva, hay que almacenar el conocimiento generado ya que esto no se realiza automáticamente y, además, hay que enseñar a Maple las cosas que no sabe.

Consideraremos que IgualdadesTrigonométricas es una tabla[9] donde se almacenan igualdades ya comprobadas y que involucran funciones trigonométricas. Allí estarán recogidas, entre otras, las conocidas fórmulas de transformación de sumas en productos y las de las razones del ángulo mitad en función del ángulo dado. Para aplicarlas hay que consultar la tabla convenientemente[10].

Convergencia de series

De forma clásica –debido a que el cálculo de la suma de una serie suele ser tarea complicada–, para el estudio de las series numéricas o funcionales se establecen, en primer lugar, resultados teóricos que permiten asegurar si una serie es convergente o no sin necesidad de proceder al cálculo de su valor; posteriormente –una vez comprobada la convergencia–, se puede intentar calcular dicho valor, utilizando diversas técnicas que no siempre producen buenos resultados. La potencia de cálculo que desarrollan los sistemas de cálculo simbólico, permite invertir en muchos casos este proceso. Así, si se puede calcular directamente la suma de una serie, tiene poco sentido estudiar teóricamente su convergencia, de la misma manera que si teóricamente se llega a la conclusión de que la serie no es convergente, tampoco tiene mucho sentido intentar calcular su valor.

Utilizando un simple comando[11] de Maple 7, se puede saber que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

lo que disipa todo tipo de dudas sobre la convergencia de esa serie.

Lo mismo sucede con esta otra un poco más complicada:

6 Maple 7 dispone en el *package* linalg de los comandos curl y diverge que calculan, respectivamente, el rotacional y la divergencia de un campo vectorial tridimensional *F(x, y, z)*. El resultado de ejecutar la línea >diverge(curl(F(x,y,z),[x,y,z]), [x,y,z]);, es cero

7 El comando DotProduct del *package* LinearAlgebra calcula el producto escalar de dos vectores y el comando is responde true cuando es capaz de verificar la relación sobre la que se le pregunta. La combinación >is(lambda*DotProduct(<x,y,z>, <u,v,w>)=DotProduct(Multiply (lambda, <x,y,z>), <u,v,w>));, produce como salida true.

8 La respuesta a >combine (2*sin((A+B)/2)*sin((A-B)/2));, es, como cabría esperar: -cos(A)+sin(B).

9 >IgualdadesTrigonométricas:= compiletable([sin(B)-cos(A)= 2*sin((A+B)/2)*sin((A-B)/2)]);, genera la tabla IgualdadesTrigonométricas que, en este caso, sólo tendría una entrada, pero que puede ser ampliada y consultada con posterioridad.

10 Una vez introducida la correspondiente igualdad, la ejecución de la línea >tablelook (sin(x+h)-sin(x), IgualdadesTrigonométricas);, proporciona 2*cos(x+h/2) *sin(h/2).

11 >sum(1/n^2, n=1..infinity);.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{(\ln 10)^n}=$$

$$=-\frac{\operatorname{sen}1\cdot(\ln 2+\ln 5)}{2\cos 1\cdot\ln 2+2\cos 1\cdot\ln 5-(\ln 2)^2-2\ln 2\cdot\ln 5-(\ln 5)^2-1}$$

o en formato numérico[12]:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n}{(\ln 10)^n}=0,5080502959$$

Después de estos resultados, parece fuera de sitio buscar un criterio de convergencia que corrobore la bondad de los cálculos.

Sin embargo, cualquier respuesta de Maple 7 tiene que ser convenientemente interpretada para no incurrir en errores. Si únicamente observamos la solución que se nos ofrece, tal vez caigamos en la tentación de afirmar que la serie de números reales

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}$$

es convergente para cualquier valor real de α, ya que la invocación > Sum(alpha^n/ /n, n=1..infinity)=sum(alpha^n/n, n=1..infinity);, proporciona la respuesta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}=-\ln(1-\alpha)$$

Está claro que una inspección no muy profunda junto con un conocimiento mínimo del comportamiento del logaritmo neperiano, pone de manifiesto que este resultado no siempre es un número real. En particular, si suponemos que $|\alpha|\geq 1$, no se puede hablar de convergencia porque el término general de la serie no tiende a cero. Sólo hay convergencia cuando $|\alpha|<1$. En consecuencia, el resultado anterior es cierto si se cumplen algunas restricciones.

La razón por la que Maple 7 responde de esta manera, es porque el desarrollo en serie de potencias de la función compleja de variable compleja

$$f(z)=\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

en un disco centrado en el punto $z_0=0$, y de radio la unidad es precisamente.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$$

12 >evalf(sum(sin(n)/ln(10)^n, n=1..infinity));.

13 La respuesta de Maple a >iscont(sin(x), x=-infinity..infinity);, es true. Como su propio nombre indica, el comando iscont dice, en algunos casos, si una función es continua o no.

14 Tanto >is(limit(sin(x+h), h=0, left) = limit(sin(x+h), h=0, right));, como >is(limit(sin(x) =sin(x));, proporcionan la respuesta true.

15 La respuesta proporcionada por Maple a las líneas >asume(x, RealRange(-infinity, infinity)); >is (-abs(x) <= sin(x) and sin(x)<= abs(x)); >is (-1<=cos(x) and cos(x)<= 1);, es true, de donde puede deducirse que se cumple $|\operatorname{sen} x|\leq|x|$ y $|\cos x|\leq 1$.

como no se tiene ninguna información sobre α se opta por proporcionar la salida anterior aunque no sea satisfactoria en general.

Continuidad de las funciones trigonométricas

A veces, los datos que manejan los sistemas de cálculo simbólico pueden impedir el proceso de demostración debido a que la evidencia del resultado es tan persistente que resulta difícil bucear en la o las razones que conducen a las aseveraciones emitidas. Por ejemplo, si buscamos una demostración de la continuidad de la función $f(x)=\operatorname{sen} x$ nos encontramos con verdaderas dificultades porque Maple 7 sabe que la función es continua y no hay manera de sacarle de su obsesión[13].

Es evidente que, aunque la respuesta sea correcta y proporcione información veraz, no se puede entender como una demostración en sentido estricto. Tal vez se nos puede ocurrir que la coincidencia de los límites laterales con el valor de la función en cada punto sería una prueba irrefutable, pero Maple 7 sigue respondiendo lacónicamente que sí se verifican las igualdades[14].

Pero surge la duda de si el procedimiento empleado para calcular los límites laterales ha sido precisamente que la función es continua, con lo cual, verdaderamente, se caería en un círculo vicioso del que habría que salir para que la demostración fuera válida. Para eludir este escollo, nos vemos «obligados» a intentar una demostración clásica de la continuidad de la función $f(x)=\operatorname{sen} x$, ya que, sabiendo que se trata de una función continua, también queremos saber por qué lo es.

Para realizar la demostración habitual se empleará la definición de continuidad: *la función real de variable real $f(x)$, es continua en el punto x_0 si, y solamente si,* $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ \delta>0$, *tal que si* $|x-x_0|<\delta$, entonces $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

A lo largo del proceso de prueba se necesitarán propiedades que Maple 7 conoce, pero no aplica directamente salvo que el usuario así lo indique. Por ejemplo, alguna de las fórmulas previamente almacenadas en la tabla IgualdadesTrigonométricas. También se utilizarán las desigualdades $|\operatorname{sen} x|\leq|x|$ y $|\cos x|\leq 1$, válidas para cualquier valor real de x. La demostración de estas últimas es inmediata[15].

El primer paso consiste en la conversión, mediante consulta a la tabla de fórmulas trigonométricas, de la diferencia de senos en un producto coseno/seno.

> Paso1:=abs(sin(x)-sin(x[0])) = tablelook(abs(sin(x)-sin(x[0])), IgualdadesTrigonométricas);

$$\text{Paso1}:=|\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x_0|=2\left|\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x_0\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x_0\right)\right|$$

Observando que

$$\left|\cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right| \le 1$$

se obtiene la desigualdad:

```
> Paso2:=rhs(Paso1)<=subs(cos(x/2+x[0]/2)=1,rhs(Paso1));
```

$$\mathrm{Paso2} := 2\left|\cos\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x_0\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x_0\right)\right| \le 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x_0\right)\right|$$

Aplicando que

$$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x_0\right)\right| \le |x-x_0|$$

se llega a

```
> Paso3:=rhs(Paso2)<=subs(abs(sin(x/2-x[0]/2))=abs(x-x[0])
/2,rhs(Paso2));
```

$$\mathrm{Paso3} := 2\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x_0\right)\right| \le |x-x_0|$$

Consecuentemente, si fijado un valor de $\varepsilon > 0$, se toma $\delta = \varepsilon$, se verifica la definición de continuidad para cualquier valor real x_0. Por tanto, la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es continua en cualquier punto de la recta real, como ya sabíamos.

También resulta interesante comprobar e interpretar gráficamente el resultado alcanzado. En la figura 1, aparece la representación gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ cerca del punto $x_0 = 1$ pudiéndose observar fácilmente que cuando $\varepsilon = 10^{-1}$ y $\delta = \varepsilon$, la diferencia de las imágenes de la función en el punto x_0 y en puntos que no se alejan de él más que δ, esto es $|f(x_0 + h) - f(x_0)|$, se mantiene dentro de una banda de anchura 2ε.

Conviene resaltar que no se trata de una mera ilustración esquemática, sino que, tanto la función[16] $f(x) = \operatorname{sen} x$,

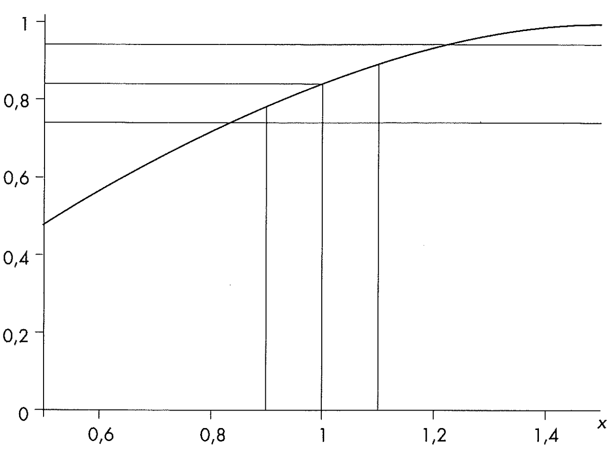


Figura 1. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$, es continua en $x = 1$

La rapidez de los sistemas de cálculo simbólico en el manejo de objetos matemáticos facilita la búsqueda de posibles contraejemplos.

16 El comando >plot(sin(x), x= 0.5..1.5);, genera la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$.

17 Maple 7 es capaz de manejar este tipo de funciones como si se tratara de funciones definidas por una única expresión. El comando que construye esta función es >f:=x->piecewise (x<0, x^2, x^3);.

18 Basta escribir >isdifferentiable(f(x), x, 2, 'la');. En la variable la se almacenan la clase de diferenciabilidad y los puntos donde pueden presentarse problemas.

como las líneas representadas son todo lo fidedignas que las capacidades gráficas de Maple 7 permiten. Así pues, si tenemos reparos para afirmar que la curva mostrada corresponde exactamente con la función seno en el intervalo escogido, podemos consolarnos con que tal vez nuestros sentidos no sabrían diferenciar la buena de la aproximada.

Demostraciones mediante contraejemplos

Una estrategia habitual, en la realización de demostraciones, es la utilización de casos conocidos cuya existencia sea incompatible con la tesis a demostrar; la localización de contraejemplos permite asegurar que la tesis propuesta no se cumple en general. La rapidez de los sistemas de cálculo simbólico en el manejo de objetos matemáticos facilita la búsqueda de posibles contraejemplos. En el siguiente ejemplo, se utiliza el «conocimiento» matemático de Maple 7 para corroborar la existencia de funciones diferenciables con continuidad que no son de clase dos.

La función definida a trozos[17]

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \ge 0 \end{cases}$$

es diferenciable con continuidad, pero su derivada segunda no existe en toda la recta real, con lo cual, puede afirmarse que la existencia y continuidad de la primera derivada no asegura ni la existencia ni la continuidad de la segunda.

A la pregunta directa. ¿es la función $f(x)$ dos veces diferenciable con continuidad respecto a la variable x?, Maple 7 responde false[18] y, además, proporciona la clase máxima de diferenciabilidad donde se encuadra $f(x)$, y el o los puntos donde falla la diferenciabilidad. En este caso, asegura que es de clase uno y que en el punto $x = 0$ no existe la derivada segunda.

Para verificar la certeza de estas afirmaciones, se puede calcular la primera derivada[19] de $f(x)$, comprobar que es continua[20], calcular la expresión general de la segunda derivada[21] y particularizar en el punto $x = 0$[22].

Las utilidades gráficas también permiten generar imágenes[23] como la figura 2, donde se puede observar, de manera visual, el comportamiento de la función $f(x)$ y de sus dos primeras derivadas.

19 >df:=D(f);, proporciona la función derivada de la función *f*(*x*). La expresión de la derivada, tomando *x* como variable, se obtiene con >df(x);, y el valor de la derivada en un punto concreto (por ejemplo, *x* = 4), con >df(4);.

20 >iscont(df(x), x=-infinity..infinity); proporciona como salida true.

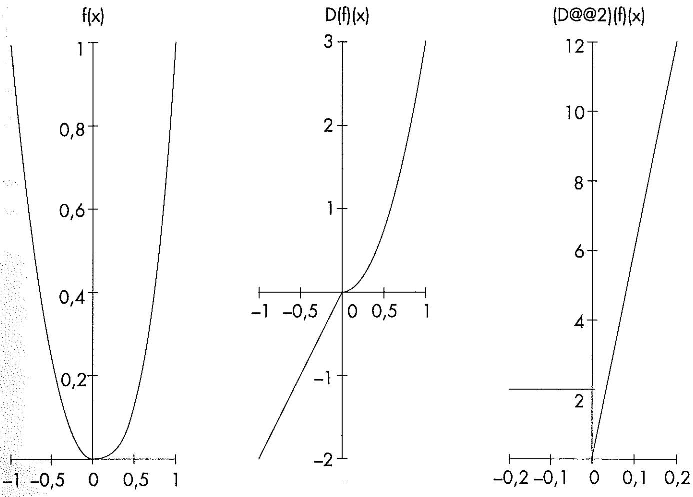


Figura 2. La función *f*(*x*) y sus dos primeras derivadas

Casos patológicos

Todos los resultados que proporcionen los programas informáticos en general, y los sistemas de cálculo dimbólico en particular, tienen que ser tamizados por el sentido común, o por el conocimiento de los mecanismos que desarrollan los comandos o las instrucciones a los que se recurre. De no ser así, puede llegarse a situaciones comprometidas y contradictorias.

A simple vista, y sin necesidad de realizar grandes cálculos, nadie con un conocimiento mínimo de matrices y determinantes dudaría en responder que el rango de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

21 >ddf:=(D@@2)(f);, proporciona la segunda derivada de la función *f*(*x*). En general, si se sustituye 2 por cualquier otro entero *n*, se obtiene la derivada *n*-ésima.

22 La respuesta a >ddf(0);, es undefined.

23 >plots[display](matrix(1,3,[plot(f,-1..1, title=`f(x)`), plot(D(f),-1..1, title=`D(f)(x)`), plot((D@@2)(f), -2..2, title=`(D@@2)(f)(x)`)]));, genera una imagen con tres gráficas.

24 >A:=<<0,1>|<a,0>>;, asigna a *A* la matriz deseada.

25 Con >with(LinearAlgebra);, se incorporan al núcleo los comandos de LinearAlgebra, entre ellos Determinant y Rank.

26 >Rank(A);, debería proporcionar el rango de la matriz *A*.

27 >Determinant(A);, origina como salida −*a*.

28 La respuesta a >is(-a<>0);, no es ni true ni false sino FAIL, que debe entenderse como que Maple 7 no puede inclinarse ni por una ni por otra.

depende del valor del parámetro a porque cuando $a = 0$, el determinante de la matriz A se anula y cuando $a \neq 0$, vale exactamente $-a$. En definitiva, el rango de A es dos siempre y cuando a sea distinto de cero; en este caso, el rango es uno. Sin embargo, tras introducir convenientemente la matriz[24], cargar los comandos necesarios[25], y preguntar por el rango[26] de A, la respuesta de Maple 7 es que el rango de A vale exactamente dos, sin diferenciar entre los valores de a.

No puede admitirse como correcto que el rango de A sea dos para cualquier valor de a. Sin embargo, Maple 7 sí calcula perfectamente el determinante[27] de A, ya que la respuesta proporcionada es $-a$, y no es capaz de afirmar que $-a$ sea siempre distinto de cero[28].

La explicación a este comportamiento un tanto errático (sabe cuánto vale el determinante de una matriz, sabe cuándo se anula y que de hecho alguna vez lo hace, pero no deduce que esto origina diversas situaciones), puede deberse a que verdaderamente se infiere que el rango es máximo porque el determinante no se anula ya que el símbolo a y el símbolo 0 no son lo mismo, al menos desde el punto de vista tipográfico. Nosotros somos capaces de realizar la abstracción de suponer que el símbolo a no representa a la letra a sino a cualquier valor numérico, tendremos que preguntarnos si lo que para nosotros es tan habitual puede serlo también para una máquina.

Conclusiones

A la vista de los ejemplos presentados, se puede afirmar que los sistemas de cálculo simbólico llevan incorporada una gran cantidad de resultados matemáticos que pueden ser utilizados para la obtención de otros más complejos, mediante manipulación simbólica. Como es razonable, no disponen de todos los resultados posibles, pero existen medios para añadir aquellos que falten.

Para los sistemas de cálculo simbólico las propiedades y relaciones inicialmente conocidas, no llevan aparejada su demostración. Más que propiedades que haya que establecer se trata de axiomas con los que trabajar.

En general, los pasos que hay que seguir para la resolución de un problema o la realización de una demostración, tienen que ser indicados por el usuario, no de forma programada sino decidiendo –en cada momento y en función de los resultados intermedios– el camino más conveniente para seguir. Es muy importante la capacidad del usuario para interpretar correctamente las respuestas del sistema de cálculo simbólico, de tal modo que, alguien que no tenga unos fundamentos matemáticos suficientemente sólidos, puede verse «engañado» si acepta sin reflexión todas las contestaciones que se ofrecen.

En definitiva, el papel de los sistemas de cálculo simbólico en el proceso de demostración se reduce al de una herramienta de cálculo rápida y eficaz que, además de proporcionar resultados concretos, también sirve para informar sobre el cumplimiento de propiedades intermedias que puedan ser de utilidad en el proceso global. Esto tiene una aplicación inmediata en todas aquellas demostraciones que están basadas en el cálculo, pero resulta insuficiente en otras donde hay que encadenar razonamientos abstractos.

Bibliografía

AMILLO, J., F. BALLESTEROS, R. GUADALUPE y L. MARTÍN (1996): *Cálculo: Teoría, Problemas y Sistemas de Computación Matemática*, Mc-Graw Hill, Madrid.

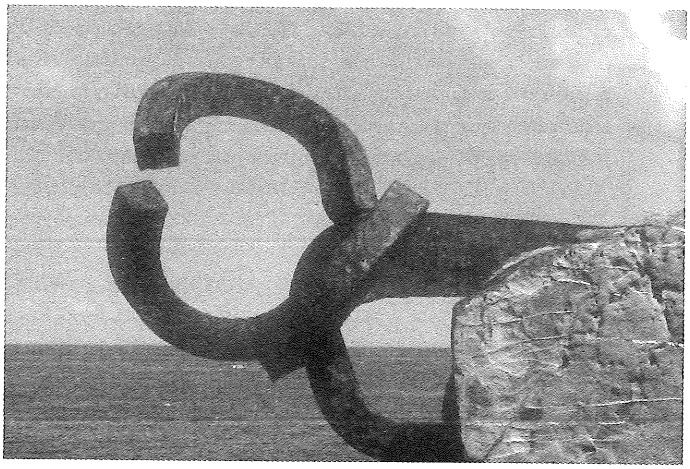
BALLESTEROS, F. y L. MARTÍN (2001): «Los Sistemas de Cálculo Simbólico como recurso docente en el Cálculo Integral», *Los educadores ante el reto de las tecnologías de la información y la comunicación. Actas del Congreso Internacional de Informática Educativa 2001*, Universidad Nacional de Educación a Distancia, Madrid.

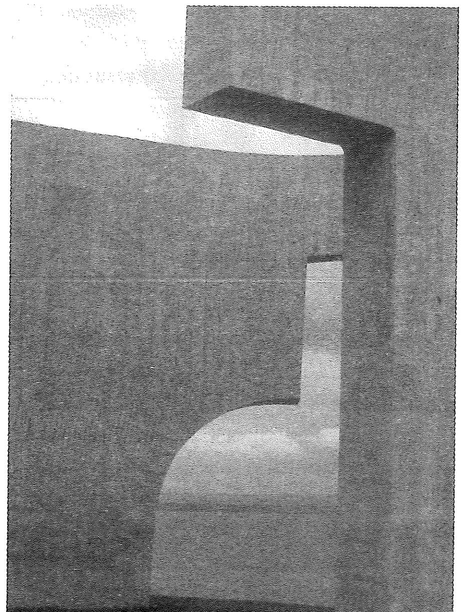
MARTÍN, L. y J.A. VELASCO (1999): «Los Sistemas de Computación Matemática como recurso didáctico de apoyo para la presentación del concepto de derivada», *IX Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, Matemáticas de ENCIGA, Lugo.

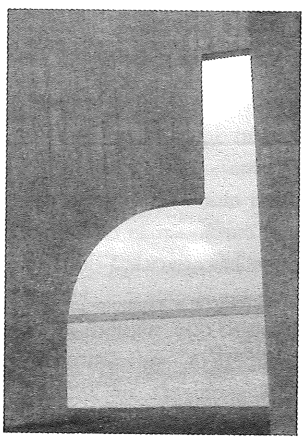
MARTÍN, L. y J.A. VELASCO (2000): «Sesiones prácticas de matemáticas con herramienta informática: Integración impropia», VI *Seminario Castellano-Leonés de Educación Matemática*, Sociedad Castellano-Leonesa de Profesores de Matemáticas, Burgos.

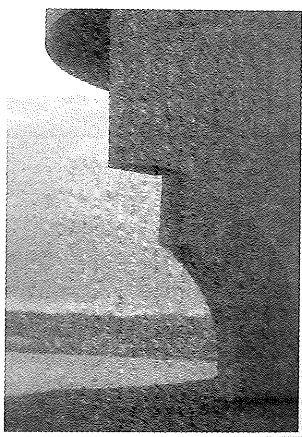
MARTÍN, L. y J.A. VELASCO (2001): «Sumas de Riemann con Sistemas de Cálculo Simbólico», *Suma*, n.° 38, 47-52.

Lorenzo Javier Martín
Escuela Técnica Superior
de Ingenieros
de Telecomunicación.
Universidad Politécnica
de Madrid.
Juan Antonio Velasco
IES Ángel del Alcázar.
Segovia.
Sociedad Castellano-Leonesa
de Profesores de Matemáticas









Homenaje a Eduardo Chillida

(Fotos: Pilar Moreno)