SUMA 39
febrero 2002, pp. 99-102

El problema isoperimétrico y el Cálculo de Variaciones

Grupo Construir las Matemáticas*

TALLER DE PROBLEMAS

¿CUÁL ES EL CAMINO más corto entre dos puntos del plano? ¿Y del espacio?

¿Y sobre una superficie cualquiera?

¿Qué forma tiene el tobogán más rápido?

¿Cuál es la curva plana que encierra mayor área entre todas las que tienen una misma longitud?

Estos son algunos problemas de optimización que se consideran clásicos y supusieron, a finales del siglo XVII, la génesis de una nueva rama de las matemáticas: el Cálculo de Variaciones.

En esta ocasión haremos una breve revisión del problema de los isoperímetros desde la perspectiva de esta nueva teoría y se determinarán sus soluciones que son, respectivamente, las líneas geodésicas, la cicloide y, naturalmente, la circunferencia.

* Los componentes del Grupo Construir las Matemáticas son Rafael Pérez, Isabel Berenguer, Luis Berenguer, Belén Cobo, M.ª Dolores Daza, Francisco Fernández, Miguel Pasadas y Ana M.ª Payá.

Los problemas del Cálculo de Variaciones

El Cálculo de Variaciones tiene por objeto los problemas de extremos, es decir, máximos y mínimos, de naturaleza más complicada que los problemas de extremos ordinarios de los que se ocupa el cálculo diferencial. Estos últimos, como es sabido, permiten determinar valores de una o varias variables (geométricamente, coordenadas de ciertos puntos) para los cuales una función dada de estas variables alcanza el mayor o el menor valor.

Cuestiones geométricas como el camino más corto entre dos puntos, el problema de la *braquistócrona* (curva de descenso más rápido) o el problema isoperimétrico, resueltos en principio por Johan Bernouilli y Leonard Euler por métodos del cálculo diferencial ordinario, no pueden ser tratados de una manera rigurosa y completa más que por otras teorías más complejas.

El Cálculo de Variaciones consiste en la búsqueda de condiciones bajo las cuales tienen lugar los extremos de una cantidad, que puede ser una integral definida (el caso más frecuente), la solución de una ecuación diferencial, etc., dependiente de *funciones incógnita*, que se deben determinar.

Se hace, por tanto, jugar a las *funciones* el papel atribuido, en el cálculo diferencial, a las *variables*.

Otros problemas clásicos son: la superficie de revolución de área mínima, superficies minimales, sistemas de partículas en campos conservativos, osciladores armónicos, péndulos, trayectoria de propagación de la luz, cuerda y membrana vibrantes, flexión de vigas y placas, etc.

Breve revisión histórica

La historia del Cálculo de Variaciones se divide de forma natural en tres períodos.

El primero debe ser considerado como preparatorio y se puede fijar su origen en un intercambio epistolar entre Johan Bernouilli y G. W. Leibniz. El problema del sólido de revolución de menor resistencia, considerado por Isaac Newton en 1687, el problema de la braquistócrona, propuesto por Johan Bernouilli en 1696, y el *problema isoperimétrico*, propuesto por Jacob Bernouilli en 1697, fueron la base de las investigaciones que condujeron a la nueva teoría del Cálculo de Variaciones.

Los hermanos Jacob y Johan Bernouilli imaginaron, para estos dos últimos problemas, métodos de resolución que se redujeron a reemplazar un arco infinitésimamente pequeño de la curva buscada por una línea poligonal y a calcular esta última con la ayuda del cálculo diferencial ordinario. Leonard Euler generalizó el procedimiento empleado.

J. L. Lagrange inaugura el segundo período con la creación del «método de las variaciones». En principio, el objetivo de este método fue resolver problemas isoperimétricos con cosideraciones geométricas, pero pronto se extiende a importantes cuestiones de mecánica. Asimismo, con el fin de determinar condiciones suficientes para la determinación de soluciones, este método fue desarrollado por otros grandes matemáticos como A. M. Legendre, C. G. J. Jacobi o A. Chebychev.

El tercer período comienza con los trabajos de W. Weierstrass, quien, en su curso sobre el Cálculo de Variaciones, desarrollado en la Universidad de Berlin entre 1865 y 1890, no sólo mostró los errores existentes en la teoría desarrollada hasta entonces, sino que fijó las bases de la teoría actual. Una próximo entrega sobre el problema isoperimétrico estará dedicada a las aportaciones de Weierstrass a la determinación de la existencia de solución para el problema.

En un curso en la Universidad de París, en 1866, G. Darboux, utilizando el teorema de Gauss sobre las coordenadas curvilíneas, e independientemente de los estudios desarrollados por Weierstrass, desarrolló un nuevo método en el que determinaba condiciones suficientes para los problemas de extremos, referidos a las líneas geodésicas y a ciertas cuestiones de mecánica.

Por otra parte, antiguos alumnos de Weierstrass, como H. Hancock, E. Sérmelo, W. F. Osgood y, sobre todo, A. Knesser divulgan los descubrimientos de su maestro o, en otros casos, desarrollan sus indicaciones, preparando así los progresos más importantes realizados al principio del siglo XX. A Weierstrass se le debe, como se ha indicado, las primeras investigaciones sobre la existencia de soluciones para problemas del Cálculo de Variaciones, como aplicación de ciertos teoremas de soluciones de ecuaciones diferenciales, a partir de los cuales David Hilbert, en 1900, desarrolla una nueva perspectiva de esta teoría.

En nuestros días, parece haber nacido un cuarto período gracias a la influencia de las ideas del Cálculo Funcional y a la generalización de la noción de variación. Conviene señalar aquí el importante descubrimiento realizado por D. Hilbert, en 1904, sobre la relación existente entre el cálculo diferencial, la teoría de ecuaciones integrales y la de ecuaciones diferenciales, demostrando que las ecuaciones integrales lineales pueden ser aplicadas a la resolución del problemas del Cálculo de Variaciones. Por otra parte, D. Hilbert da un gran valor a la idea de considerar estos problemas como cuestiones del cálculo diferencial en una infinidad de variables, lo que, en efecto, generaliza los problemas diferenciales. Todo esto contribuirá, sin duda, a acelerar el progreso del Cálculo de Variaciones.

Condiciones necesarias y suficientes para la existencia de extremos

El problema más usual del cálculo de variaciones es hallar los extremos de una expresión integral dependiente de una función:

$$\mathrm{F}[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx \qquad (1)$$

o bien de varias funciones. Por ejemplo, para dos funciones sería del tipo:

$$\mathrm{F}[x, y] = \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, y, x', y')dt \qquad (2)$$

A este tipo de expresiones que varían según una o varias funciones y algunas de sus derivadas se les denomina *funcionales*.

Una condición necesaria para que un funcional del tipo (1) alcance un extremo (máximo o mínimo) en una cierta función y es que se verifique la siguiente ecuación diferencial:

$$F_y(x, y, y') = \frac{d}{dx}(F_{y'}(x, y, y'))$$

A esta condición se le conoce como *ecuación de Euler-Legendre*. Asimismo, en el caso de funcionales del tipo (2), una condición necesaria para que el funcional F alcance un extremo en el par de funciones (x, y) es que se verifique el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de Euler-Lagrange:

$$F_x(t, x, y, x', y') = \frac{d}{dt}(F_{x'}(t, x, y, x', y'))$$
$$F_y(t, x, y, x', y') = \frac{d}{dt}(F_{y'}(t, x, y, x', y'))$$

A lo largo del desarrollo histórico del Cálculo de Variaciones se han determinado diferentes condiciones suficientes para que un funcional alcance un máximo o un mínimo en una solución de la ecuación o ecuaciones de Euler-Lagrange (llamadas extremales). Las más conocidas son la condición de Jacobi-Legendre o aquéllas que se deducen para funcionales de tipo convexo.

El problema isoperimétrico

Se trata de:

> Hallar, de entre todas las curvas cerradas y simples de perímetro L, la que encierra una región de mayor área.

Desde el punto de vista del cálculo de variaciones se trata de un problema de extremos condicionados para el que Lagrange desarrolló su conocido método de los multiplicadores. En concreto, el problema se puede formular de la siguiente forma:

> Hallar una curva paramétrica ($x(t)$, $y(t)$) $t \in [0, 1]$cerrada –es decir, tal que $x(0) = x(1)$ e $y(0) = y(1)$– y simple tal que sea mínimo el funcional de área de la región interior que determina:
>
> $$A[x, y] = \int_0^1 (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt$$
>
> entre todas aquellas cuya longitud es L , es decir,
>
> $$\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = L$$

En este caso, mediante el método de los multiplicadores de Lagrange, se trata de hallar una curva paramétrica cerrada y simple que verifica el sistema de ecuaciones:

$$y' - \frac{d}{dt}\lambda \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0$$
$$-x' - \frac{d}{dt}\lambda \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = 0$$
$$\int_0^1 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = L$$

una de cuyas soluciones, para un cierto valor del multiplicador λ, es:

$$x(t) = \frac{L}{2\pi} sen 2\pi t \qquad y(t) = \frac{L}{2\pi}\cos 2\pi t \qquad t \in [0,1]$$

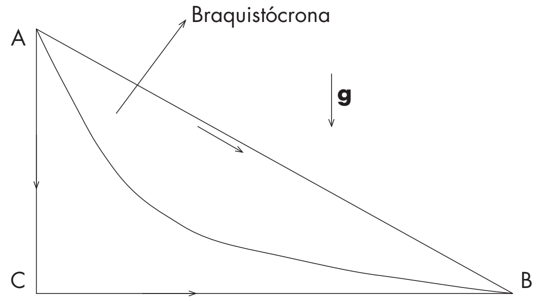
es decir, la circunferencia de radio $L/2\pi$.

El problema de la braquistócrona

Este problema, propuesto por Johan Bernouilli en 1696, ha sido relevante en el desarrollo del cálculo de variaciones y puede ser considerado como el inicio de esta teoría.

Se trata del siguiente problema:

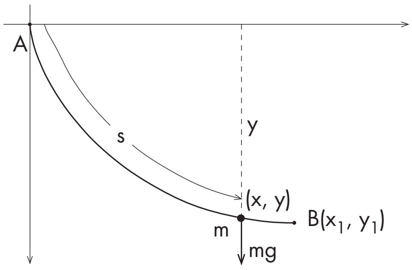
> Dados dos puntos A y B del campo gravitatorio terrestre, el primero a mayor altura que el segundo, se trata de encontrar la curva que posea la propiedad de que un punto material se deslice de A a B en el menor tiempo posible, llamada *braquistócrona*.



En otros términos, podemos decir que se trata de encontrar el tobogán más rápido.

En principio, observamos que la solución no es la recta ya que, aunque la recta determina la menor distancia entre dos puntos, otras curvas de mayor pendiente en sus inicios producirán mayor velocidad y compensarán con ello el hecho de que el camino se alargue.

Analíticamente, fijamos el origen en A (0, 0), y suponemos que B(x_1, y_1) y que el sentido positivo en el eje de ordenadas es hacia abajo. Representamos la curva como la gráfica de la función $y = y(x)$, con $x \in [0, 1]$, que cumple que $y(0) = 0$ e $y(x_1) = y_1$.



Aplicando el principio de la conservación de la energía, y teniendo en cuenta que el vector velocidad es la derivada del vector de posición en cada instante, se deduce que:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{2gy(x)}$$

Por último, como x es función monótona de t, podemos expresar t en función de x, $t = t(x)$, de donde, fácilmente, se obtiene la siguiente expresión para el tiempo de deslizamiento de una partícula para ir de A a B:

$$t[y] = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x)}}\, dx$$

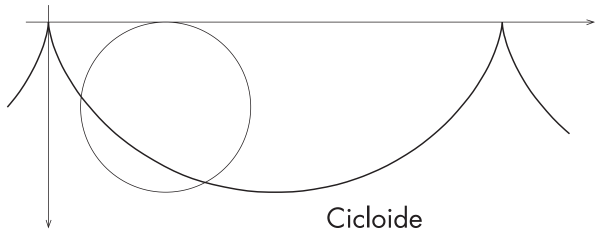
Se trata, por tanto, de un funcional de tipo (1) cuya ecuación de Euler-Lagrange asociada es la ecuación diferencial:

$$\sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} - y' \frac{y'}{\sqrt{2gy(1 + y'^2)}} = cte.$$

Considerando una solución en forma paramétrica adecuada se obtiene que las extremales del funcional de tiempo son de la forma:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \frac{C}{2}(2t - sen 2t) + D \\ y(t) &= \frac{C}{2}(1 - \cos 2t) \end{aligned}\right\} \quad C, D \in \mathbb{R}$$

Se trata de una familia de cicloides de la que las condiciones $y(0) = 0$, $y(x_1) = y_1$ determinarán la única solución del problema.



Luego,

¡un tobogán debe ser un arco de cicloide!