SUMA 39

febrero 2002, pp. 69-76

El problema del dado con partidas no jugadas

Jesús Basulto Santos
José Antonio Camúñez Ruiz

El problema de los puntos, –que ya habían abordado autores, como Pacioli, Tartaglia y Cardano–, es un problema de decisión bajo incertidumbre, que motivó la correspondencia entre Pascal y Fermat en 1654. Ahora bien, en la primera carta que escribe Pascal a Fermat, introduce un nuevo problema sobre dados, también de decisión bajo incertidumbre, «el problema de las partidas no jugadas», que ha motivado el presente trabajo. Aunque más sencillo que el problema de los puntos, ambos tienen cosas en común. Fermat aportará soluciones a estos problemas basadas en la enumeración de todos los posibles resultados, lo que Pascal denomina «el método combinatorio». Al tratar de evitar las enumeraciones de todos los resultados, Pascal descubrirá lo que llamó «método universal»: la esperanza matemática. Igualmente, y a requerimientos de Pascal, Fermat, descubrirá lo que llamamos el modelo de Pascal o modelo geométrico. En el presente trabajo aplicamos estos nuevos métodos al problema de las partidas no jugadas, lo que permitirá apreciar el trabajo que desarrollaron ambos matemáticos.

ARTÍCULOS

DURANTE EL VERANO DE 1654 se produce la famosa correspondencia entre Pascal y Fermat. Esta correspondencia ha dado lugar a una literatura posterior más o menos fundamentada, que sitúa el origen del cálculo de probabilidades en el contenido de dichas cartas.

El primer contacto entre ambos autores (que nunca llegaron a conocerse personalmente) se cree que fue una carta que Pascal dirigió a Fermat. Decimos «se cree» porque esta carta está perdida, pero, por los contenidos de las cartas posteriores, hay indicios de que existió. En ella se supone que Pascal planteaba ciertos problemas sobre juegos, problemas que ya existían en el ambiente y que de alguna forma ya habían sido estudiados y resueltos, aunque a veces con soluciones erróneas, por los matemáticos italianos del Renacimiento (Pacioli, Tartaglia, Cardano, Peverone, Forestani) en el siglo XVI (ver Coumet, 1965). Parece ser que, en dicha carta, Pascal también proponía sus propias soluciones a esos problemas, rogándole a Fermat algún juicio sobre ellas.

Entre esos problemas había uno que conoceremos a partir de ahora como el *problema del dado con partidas no jugadas*, núcleo de la carta escrita por Fermat que F. N. David (1962) sitúa como respuesta a la anterior (la carta, aunque se conserva, no tiene fecha). Una traducción al castellano de esta carta puede encontrarse en De Mora Charles (1989).

Este problema tiene estrecha relación con el conocido históricamente como el *problema de los puntos* o *problema de las partidas* o *regla de los repartos*, que constituye el núcleo fundamental de la correspondencia entre Pascal y Fermat. La solución que propone Fermat al problema del dado con partidas no jugadas es la misma que utilizará, al final de la correspondencia entre Pascal y Fermat (la carta del 25 de septiembre de 1654), para resolver el problema de los puntos, tanto para dos jugadores como para tres o más.

Ambos problemas, el del dado con partidas no jugadas y el de los puntos, tienen en común el hecho de tratarse de problemas de decisión bajo incertidumbre. Las decisiones son las diferentes proporciones del total apostado que deben darse a cada uno de ellos, en el caso del problema del dado con partidas no jugadas, o los repartos que debemos hacer entre dos o más jugadores, en el caso del problema de los puntos. La incertidumbre entra al no jugarse una o más partidas en el primer caso o al interrumpirse el juego en el problema de los puntos. En ambas situaciones, tanto al no jugar como al interrumpirse, los jugadores no son ganadores ni perdedores, es decir, desconocen cuál sería el resultado final del juego.

A partir de aquí, el trabajo consiste en lo siguiente: en el siguiente epígrafe introducimos, usando la carta de Fermat a Pascal, el problema del dado con partidas no jugadas y lo comparamos con el problema de los puntos; en la sección titulada *la solución de Fermat al problema de los dados,* queda recogida ésta; y en la siguiente sección proponemos una explicación de la solución de Fermat y resolvemos el problema por el método universal de Pascal. Finalizamos el trabajo con un ejemplo ilustrativo del problema del dado con partidas no jugadas.

Planteamiento del problema

En la carta de Fermat a Pascal comentada anteriormente, Fermat recoge el planteamiento del problema del dado con partidas no jugadas que Pascal propuso en su carta perdida. Siguiendo las palabras de Fermat:

> Pero Vd me propone en el último ejemplo de su carta (utilizo sus propios términos) que si intento encontrar el seis en ocho partidas y si ya he jugado tres veces sin encontrarlo, si mi jugador (el jugador contrario) me propone que no juegue mi cuarta y quiere desinteresarme de ello porque podría obtenerlo (el seis), me pertenece 125/1296 de la suma total de nuestras apuestas.

En el planteamiento de Pascal, (descrito aquí por Fermat) parece que se acepta que el jugador *ya ha jugado* tres partidas y no ha ganado y decide dejar de jugar en la cuarta. El planteamiento de Fermat cambia, y es en dicho «cambio» donde radica el «error» de Pascal en la proporción anterior. Así Fermat propone el problema de la siguiente forma:

> Si intento hacer un punto (determinado) con un solo dado, en ocho partidas; si convenimos cuando el dinero ya está en juego, que yo no jugaré la primera partida… Que si todavía después de eso con venimos en que yo no jugaré la segunda partida… Y si después de eso convenimos en que no jugaré la tercera partida… Y si después de eso todavía convenimos en que no jugaré la cuarta partida…

Nosotros interpretamos el problema planteado por ambos matemáticos de la siguiente forma:

Pascal

Fermat

Uno de los jugadores, el jugador B, apuesta una cierta cantidad a que el otro, el jugador A, no logrará en ocho lanzamientos (partidas) de un dado perfecto sacar un seis. El jugador A apuesta una cantidad frente a la de B, y afirma que logrará sacar un seis en las ocho partidas. El jugador B puede estar interesado en disminuir el número de partidas que puede hacer el jugador A, así, por ejemplo, el jugador A puede convencerse de no jugar la segunda partida, habiendo no sacado en la anterior un seis. Ahora bien, el jugador B debe compensar al A por no jugar éste la segunda partida. Surge ahora el siguiente problema: ¿cuál debe ser la proporción del total apostado que debe llevarse el jugador A como compensación? En el planteamiento de Pascal, éste considera que el jugador A ha jugado ya las tres primera partidas sin éxito y decide no jugar la cuarta partida. El problema surge igualmente cuando el jugador A se convenza de no jugar las cuatro primera partidas, como en el planteamiento de Fermat.

Antes de hacer comparaciones con el otro problema, el de los puntos o repartos, vamos a recordar, por medio de un ejemplo, en qué consiste el mismo. Dos jugadores, A y B, juegan a cara y cruz con una moneda perfecta, ganando A un punto si en la partida (lanzamiento) sale cara, y en el otro caso, si sale cruz, el punto lo ganaría B. Ambos jugadores hacen sus apuestas y deciden que el primero que logre r éxitos (r puntos) se llevará el total apostado. El problema surge cuando ambos jugadores deciden de común acuerdo interrumpir el juego cuando al jugador A le faltan a partidas (le faltan a puntos para completar los r), $a < r$, y al otro jugador b partidas, $b < r$, y deben repartirse el total apostado.

Comparando ambos problemas, vemos que en el del dado el número de partidas es conocido (8 en nuestro caso), mientras que en el de los puntos, el número de partidas es aleatorio, aunque se sepa el número máximo de partidas que se jugaría. También, en el problema del dado se puede no jugar las cuatro primeras partidas pero retomar el juego con la quinta, mientras que en el problema de los puntos, el juego se interrumpe a partir de un número de partidas jugadas. Ambos problemas son ejemplos de toma de decisiones bajo incertidumbre, donde las decisiones son las distintas proporciones que debe retirar el jugador A, como en el caso del dado con partidas no jugadas, o los diferentes repartos del total apostado entre los jugadores, como en el problema de los puntos. La incertidumbre surge ya sea porque el jugador decide no jugar alguna partida, caso del problema del dado, o interrumpir el juego, caso del problema de los puntos. El no jugar ciertas partidas conduce a que no tengamos un ganador o un perdedor, es decir, desconocemos el resultado de estas partidas y así, las decisiones deben tomarse bajo incertidumbre.

Veamos a continuación cómo resolvió Fermat el problema que aquí nos ocupa.

La solución de Fermat al problema del dado

En la carta de Fermat a Pascal, Fermat resuelve el problema del dado con partidas no jugadas de la siguiente forma:

> …si intento hacer un punto (determinado) con un solo dado, en ocho tiradas; si convenimos cuando el dinero ya está en juego, que yo no jugaré la primera partida es necesario, según mi principio, que extraiga del juego 1/6 del total para desinteresarme (del mismo), en razón de dicha primera partida.

Y añade

> si todavía después de eso convenimos en que no jugaré la segunda tirada, para mi indemnidad deberé retirar una sexta parte del resto, que es 5/36 del total.

Y sigue:

> y si después de eso convenimos en que no jugaré la tercera tirada, para mi indemnidad deberé retirar la sexta parte del resto, que es 25/216 del total.

Y termina:

> y si después de eso, todavía convenimos en que no jugaré la cuarta tirada, deberé retirar un sexto del resto, que es 125/1296 del total y convengo con vos que ese es el valor de la cuarta tirada.

Este error de Pascal, así como otros que surgirán en la correspondencia entre ambos autores, han conducido a muchos investigadores a disminuir la importancia de Pascal en su contribución al cálculo de probabilidades frente a Fermat.

Fermat continúa su carta con un punto en el que comenta y rechaza la solución que daba Pascal a una determinada situación de este problema. Leemos:

> Usted me propone en el último ejemplo de su carta que si intento encontrar el 6 en ocho tiradas y si ya he jugado tres veces sin encontrarlo, si mi jugador me propone que no juegue mi cuarta tirada y quiere desinteresarme de ello porque podría obtenerlo (el seis), me pertenecerá 125/1296 de la suma total de nuestras apuestas.
>
> Lo cual, sin embargo, no es cierto según mi principio. Pues en este caso, al no haber obtenido nada en las tres primeras tiradas el que tiene el dado en su poder, y siguiendo en juego la suma total, el que tiene el dado y conviene en no jugar su cuarta tirada, debe tomar para su indemnidad 1/6 del total.

Para Fermat, entonces, las tres primeras partidas jugadas por el jugador A sin éxito, es decir, sin haber obtenido el seis, no contribuyen a la valoración de las partidas no jugadas. La independencia de los sucesivos lanzamientos del dado, que en el caso de un juego más general describiría la hipótesis de que los jugadores no aprenden con la experiencia y, por lo tanto, sus habilidades no cambian, hace que las partidas ya jugadas no contribuyan al cálculo o valoración de las que están por jugarse.

Vemos pues que Fermat corrige la solución errónea de Pascal, 125/1296, frente al valor de 1/6 de Fermat.

Este error de Pascal, así como otros que surgirán en la correspondencia entre ambos autores, han conducido a muchos investigadores a disminuir la importancia de Pascal en su contribución al cálculo de probabilidades frente a Fermat. Recogemos las siguientes líneas de M. De Mora Charles (1989), tomadas de F.N. David (1962), como muestra de esta opinión negativa:

> Siempre fue tras él (tras Fermat) en los descubrimientos referentes al cálculo de probabilidades y tardó mucho más en comprender los problemas que el propio Fermat. Se insinúa incluso la influencia que su fracaso como geómetra pudo tener en su decisión de abandonar las matemáticas y convertirse por segunda vez (su conversión al jansenismo). La personalidad de Pascal no aparece favorable a través de sus cartas y de sus otras obras, en cambio Fermat parece haber sido un hombre que incluso después de trescientos años atrae a todos los que lo leen.

Una respuesta, que nosotros compartimos, frente a esta opinión de David, es la dada por A.W.F. Edwards (1987):

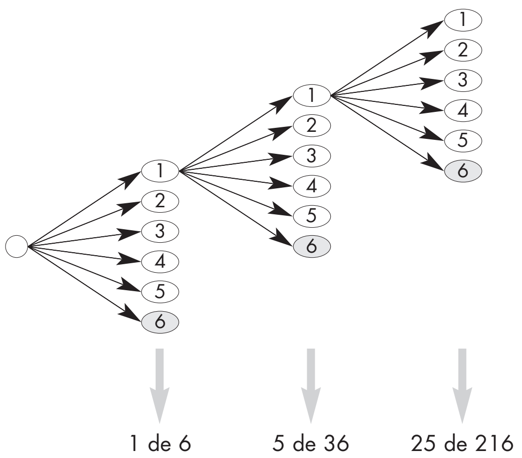
> David omite mencionar cualquier contribución de Pascal, y entonces atribuye (como muchos otros investigadores) el concepto de esperanza a Huygens, aunque no solo fue usado por Pascal, sino que Huygens conocía este hecho antes de que publicase su libro de *De ratiociniis in alea ludo* (1667), como veremos. No hay duda de que esta opinión de David proviene de su falta de familiaridad con el relevante libro de Pascal, su *Traité du triangle aritmétique* (1665), en el que él resuelve completamente el problema de los puntos, haciendo uso del concepto de *esperanza matemática*.

Veamos a continuación una explicación de la solución que Fermat da en su carta al problema del dado con partidas no jugadas, así como una aplicación del método universal de Pascal a este problema del dado.

La solución de Fermat y Pascal: una explicación

Consideremos un juego con un dado perfecto, donde un jugador A va a jugar 8 partidas, o sea, va a efectuar 8 lanzamientos consecutivos y ganará el total apostado *K* si saca un seis en una de las partidas. En caso contrario, si el jugador A no obtiene seis en ninguno de los 8 lanzamientos, entonces el total apostado será para el jugador B. Si el jugador A decide no jugar las cuatro primeras partidas, es decir, quiere asegurarse una parte de lo apostado, veamos que la solución de Fermat es equivalente a que la cantidad que retira el jugador A, del total apostado *K*, debe ser proporcional al número de alternativas que le harían ganar si se jugasen esas cuatro primeras partidas.

Dividamos el total de alternativas favorables al jugador A en cuatro grupos: *el primero*, el jugador A ganaría el juego de las cuatro partidas, si sale un seis en la primera partida, y esto lo consigue con 1 alternativa favorable de un total de 6. Todas estas alternativas son iguales de probables. *Segundo*, el jugador gana si sale un seis en la segunda partida, es decir, en la primera no sale un seis, lo que supone 5 alternativas en contra de un total de 6, y en la segunda sale un seis que es 1 alternativa favorable de un total de 6. En el lanzamiento de dos veces consecutivas de un dado hay $6^2 = 36$ alternativas de igual probabilidad de las que 5 representan la situación descrita en segundo lugar, o sea, 5 son favorables al jugador A. *Tercero*, el jugador gana si sale un seis en la tercera partida, es decir no sale un seis ni en la primera ni segunda partida y si sale en la tercera. Tendríamos 5 alternativas en la primera, 5 en la segunda y 1 en la tercera. Lanzando tres veces consecutivas el dado tenemos $6^3 = 216$ alternativas igualmente probables de las que $5^2 = 25$ son favorables al jugador A. Representamos parcialmente el árbol de decisiones que ayuda a ilustrar los cálculos anteriores:



Donde suponemos que salen flechas de todos los círculos-óvalos en blanco y no así de los que están rayados, ya que ahí se ha producido el éxito y, por tanto, la terminación del juego.

…mientras que las alternativas dentro de cada grupo son comparables, al ser igual de probables, esto no ocurre si queremos comparar alternativas de distintos grupos.

Y *cuarto*, el jugador A gana si sale un seis en la cuarta partida. En este caso el total de alternativas es 1296 y todas son comparables. Las alternativas favorables al jugador A son 125.

En la tabla siguiente recogemos todos los cálculos:

Salir un 6 en la partida	Alternativas favorables al jugador A	Total de alternativas
1ª	1	6
2ª	5	$6^2 = 36$
3ª	$5^2 = 25$	$6^3 = 216$
4ª	$5^3 = 125$	$6^4 = 1296$

Ahora bien, mientras que las alternativas dentro de cada grupo son comparables, al ser igual de probables, esto no ocurre si queremos comparar alternativas de distintos grupos. Por ejemplo, la probabilidad de que el jugador A saque un seis en la primera partida es 1/6, mientras que la probabilidad de sacar un cinco en la primera partida y un seis en la segunda es 1/36, con lo que no podemos sumar las alternativas de los distintos grupos. Vamos a resolver este problema por medio de sumergir el juego de las cuatro partidas, que como hemos vistos puede acabar con una, dos, tres o cuatro partidas, en un juego imaginario que siempre finalice con cuatro partidas. Este método fue utilizado por Fermat y Pascal para resolver el problema de los puntos (carta de Pascal a Fermat del 24 de agosto de 1654.)

En este juego imaginario que siempre finaliza con cuatro partidas, el primer grupo debe ampliarse a un total de 1296 alternativas, todas comparables, y donde las alternativas favorables al jugador A son 216. Es decir, siempre lanzaremos el dado cuatro veces, de ahí los 1296 posibles resultados, y una vez ha salido un seis en la primera partida, todos los resultados que provienen de lanzar tres veces el dado, un total de 216, son las alternativas favorables al jugador A. El segundo grupo se amplía a un total de 1296 alternativas, y una vez ha salido un seis en la segunda partida, este resultado ocurre con 5 alternativas, todos los resultados que provienen de lanzar dos veces el dado, un total de 36, lo que hace un total de 5·36 = 180 alternativas favorables al jugador A. No vamos a continuar por no cansar al lector. Recogemos los cálculos en la siguiente tabla:

A partir de sacar un 6 en la partida	Alternativas favorables	Total de alternativas
1ª	$5^0 \cdot 6^3 = 216$	$6^4 = 1296$
2ª	$5^1 \cdot 6^2 = 180$	$6^4 = 1296$
3ª	$5^2 \cdot 6^1 = 150$	$6^4 = 1296$
4ª	$5^3 \cdot 6^0 = 125$	$6^4 = 1296$

Ahora, al ser todas las alternativas comparables (son igualmente probables), podemos sumar las favorables de cada uno de los cuatro grupos. La cantidad que el jugador A debe retirar, del total apostado K, es:

$$K\left(\frac{6^3 + 5\cdot 6^2 + 5^2\cdot 6 + 5^3}{6^4}\right) = K\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{5^2}{6^3} + \frac{5^3}{6^4}\right) \qquad [1]$$

Vamos a ver que es la misma solución que la propuesta por Fermat en su carta. Operando en la expresión [1]:

$$K\left(\frac{1}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{5^2}{6^3} + \frac{5^3}{6^4}\right) =$$

$$\frac{K}{6} + \left(K - \frac{K}{6}\right)\cdot\frac{1}{6} + \left[\left(K - \frac{K}{6}\right) - \left(K - \frac{K}{6}\right)\frac{1}{6}\right]\cdot\frac{1}{6} +$$

$$+\left\{\left[\left(K - \frac{K}{6}\right) - \left(K - \frac{K}{6}\right)\frac{1}{6}\right] - \left[\left(K - \frac{K}{6}\right) - \left(K - \frac{K}{6}\right)\frac{1}{6}\right]\frac{1}{6}\right\}\cdot\frac{1}{6}$$

Donde lo que retira el jugador A por no jugar las cuatro primera partidas es igual a la sexta parte de *K* (primer término del segundo miembro), que Fermat identifica por el valor de la primera partida, y, por tanto, lo que se llevaría el jugador A por no jugarla. De lo que queda:

$$\left(K - \frac{K}{6}\right) = K\cdot\left(1 - \frac{1}{6}\right) = K\cdot\frac{5}{6}$$

el jugador vuelve a retirar la sexta parte (segundo término del segundo miembro), que Fermat identifica como valor de la segunda partida. De nuevo, de lo que queda:

$$\left[\left(K - \frac{K}{6}\right) - \left(K - \frac{K}{6}\right)\frac{1}{6}\right]$$

el jugador retira su sexta parte (tercer término del segundo miembro), lo que Fermat identifica como valor de la tercera partida. Por último, de lo que queda, el jugador A vuelve a tomar su sexta parta (último término del segundo miembro), que Fermat identifica como valor de la cuarta, y por tanto, la *indemnidad* por no jugarla.

De la expresión [1], el total de lo que se lleva el jugador A por no jugar las cuatro primeras partidas se puede escribir como:

$$\frac{K}{6}\left[1 + \frac{5}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^3\right] = \frac{K}{6}\left(\frac{1 - (5/6)^4}{1 - 5/6}\right) = \frac{K}{6}\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4\right]$$

Lo que queda, $K\cdot(5/6)^4$ es la apuesta que permanece en el juego, a partir de la quinta partida.

El artificio de sumergir el juego original en un juego imaginario, pretende, como hemos visto, operar con resultados comparables, con las mismas probabilidades. Este artificio será utilizado por Fermat y Pascal en la resolución del problema de los puntos. Ahora bien, como es conocido, Pascal tuvo que defenderse de las dudas que le planteó el matemático Roberval. Este método de enumerar todas las alternativas fue llamado por Pascal como el método combinatorio frente a su método universal de la *esperanza matemática*. Sabemos que cuando Pascal quiso aplicar el método combinatorio al problema de los puntos con tres o más jugadores, se encontró con dificultades que no logró resolver por este método (carta del 24 de agosto 1654). Pascal acabará su carta solicitando ayuda a Fermat.

Tanto las dudas presentadas sobre el método de sumergir el juego original en un juego imaginario, como las dificultades que encontró Pascal en la resolución del problema de los puntos con tres jugadores, conducirán a Fermat a trabajar con lo que hoy conocemos como el *modelo geométrico*. Con este nuevo método introducido por Fermat en su carta del 25 de septiembre de 1654, se resolverá definitivamente el problema de los puntos con dos o más jugadores.

Veamos que la solución de Fermat al problema del dado con partidas no jugadas coincide con la suma de probabilidades, mediante la función de cuantía de un modelo geométrico (o con la función de distribución del propio modelo).

De la primera tabla, el jugador A saca un seis en las cuatro partidas siempre que el seis salga en la primera, segunda, tercera o cuarta. También, obsérvese que estos cuatro sucesos son excluyentes y exhaustivos, con lo que la probabilidad de que el jugador A saque un seis en las cuatro partidas es:

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6^2} + \frac{5^2}{6^3} + \frac{5^3}{6^4} \qquad [2]$$

y entonces, el jugador A debe retirar, por no jugar las cuatro partidas, la cantidad que resulta de multiplicar *K* por el valor de la expresión [2], que es precisamente la expresión [1].

Si ahora recordamos el concepto de variable aleatoria geométrica X, como el número de lanzamientos de un dado que debemos efectuar hasta lograr obtener un seis, por primera vez, con valores en los enteros {1, 2,…}. Su función de probabilidad o cuantía viene dada por la siguiente expresión:

$$f_X(x) = q^{x-1}p$$

donde $q = 1 - p$ y $p = 1/6$ en nuestro problema.

La expresión [2] es ahora equivalente a:

$$f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) + f_X(4)$$

O sea, la suma de los cuatro primeros valores de la función de probabilidad de un modelo geométrico (o el valor de la función de distribución del modelo geométrico).

Veamos a continuación cómo por medio del *método universal* de Pascal (como él lo llamaba) podemos resolver el problema del dado con partidas no jugadas. Este método universal fue introducido por Pascal en su *Traité du Triangle aritmétique* (aunque publicado en 1665, tres años después de la muerte de Pascal, las ideas fundamentales expresadas en el *Traité* ya habían sido desarrolladas por él mismo cuando se produjo el intercambio de correspondencia con Fermat en 1654, como lo atestigua la propia correspondencia), una exposición de parte de este libro puede verse en A. W. F. Edwards (1987). Vamos a recordar, en primer lugar, sus dos principios y los dos corolarios que se sigue de ellos, y que dan lugar al nacimiento de la esperanza matemática.

El *primer principio* afirma que en la lotería: «lanzar una moneda perfecta, si sale cara el jugador gana K unidades monetarias y si sale cruz también gana K unidades monetarias». Entonces si el jugador no juega debe llevarse la cantidad K.

El *segundo principio* afirma que en la lotería: «lanzar una moneda perfecta, si sale cara el jugador gana K unidades monetarias y si sale cruz cero unidades monetarias. Es decir, pierde todo lo apostado». Entonces, el jugador debe llevarse la mitad de la apuesta, es decir, $K/2$, si decide no participar en el juego.

A partir de estos dos principios, Pascal propone los siguientes corolarios.

Corolario I: En la lotería, «lanzar una moneda perfecta, si sale cara entonces el jugador gana $K + W$ unidades monetarias (u.m.), y si sale cruz gana K unidades monetarias», entonces el jugador debe llevarse la cantidad de $K + W/2$, si no participa en el juego.

En este corolario debe observase que el jugador tiene seguras K unidades monetarias, ya que por el primer principio le pertenecen. El resto, W, puede ganarlo si sale cara, o perderlo si sale cruz. En consecuencia, por el segundo principio, el jugador debe retirar $W/2$. En resumen, el jugador retira $K + W/2$ por no jugar a dicha lotería.

…cómo por medio del método *universal de Pascal (como él lo llamaba) podemos resolver el problema del dado con partidas no jugadas. Este método universal fue introducido por Pascal en su* Traité du Triangle aritmétique…

Corolario II: En la lotería, «lanzar una moneda perfecta, si sale cara entonces el jugador gana $K + W$ unidades monetarias (u.m.), y si sale cruz gana K unidades monetarias», entonces el jugador debe llevarse la cantidad de $(K + K + W)/2$ si no participa en el juego.

Es evidente que este último corolario es equivalente al primero.

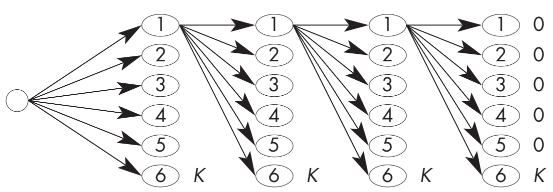
Si representamos la siguiente lotería: «lanzar una moneda perfecta, si sale cara el jugador gana 30 u.m. y si sale cruz gana 20 u.m», por {30, 1/2; 20, 1/2}, donde 1/2 es la probabilidad de salir cara. El corolario I valora esta lotería por la cantidad:

$$20 + \frac{30 - 20}{2} = 30 \cdot \frac{1}{2} + 20 \cdot \frac{1}{2}$$

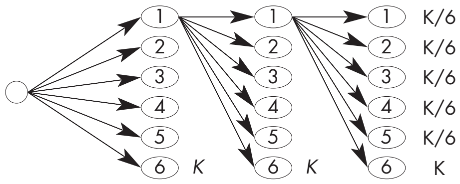
que es precisamente la esperanza matemática de la lotería.

En nuestro problema del dado, si el jugador saca un seis en una partida, gana K, el total apostado, y si no saca el seis no retira cantidad alguna. Esta lotería es de la forma {K, 1/6; 0, 5/6}, donde la probabilidad de salir el seis es 1/6. Esta lotería es equivalente a la siguiente: {K, 1/6; 0, 1/6; 0, 1/6; 0, 1/6; 0, 1/6; 0, 1/6}, que por el *segundo principio* de Pascal, que nosotros extendemos a un número finito de alternativas comparables y exhaustiva, es valorada por la cantidad $K/6$. En consecuencia, la lotería {K, 1/6; 0, 5/6} es valorada por $K/6 + 0 \cdot (5/6) = K/6$ En general, la lotería {K_1, 1/6; K_2, 5/6}, con $K_1 > K_2$, será valorada por la cantidad $K_2 + (K_1 - K_2) \cdot (1/6)$, que coincide con la esperanza matemática $K_1 \cdot (1/6) + K_2 \cdot (5/6)$ como se deduce del Corolario de Pascal extendido a nuestro problema.

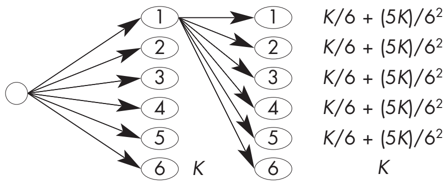
Veamos ahora como aplicamos estas ideas de Pascal al problema del dado con partidas no jugadas. El árbol de decisión de nuestro problema es:



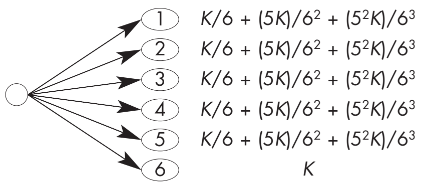
donde sólo hemos desarrollado algunas de las ramas del árbol. También, hemos indicado que si sale el seis, el jugador A se lleva todo lo apostado, *K*, y en otro caso no se modifica el total apostado. Si valoramos las últimas loterías del este árbol, es decir, {*K*, 1/6; 0, 5/6}, por *K*/6, segundo principio. Esta lotería es equivalente a:



Si valoramos ahora las últimas loterías del este segundo árbol, es decir, {*K*, 1/6; *K*/6, 5/6} por *K*/6 + (5*K*)/6², por el Corolario. Esta lotería es equivalente a:



Si valoramos de nuevo las últimas loterías del este tercer árbol, es decir, {*K*, 1/6; *K*/6 + (5*K*)/6², 5/6}, por *K*/6 + (5*K*)/6² + (5²*K*)/6³, por el Corolario, entonces esta lotería es equivalente a:



y esta última lotería, es por el corolario de Pascal, valorada por *K*/6 + (5*K*)/6² + (5²*K*)/6³ + (5³*K*)/6⁴, coincidiendo con la expresión [1] de Fermat.

Estas sustituciones de loterías compuestas por otras loterías, al sustituir loterías simples por valores, es semejante al axioma 3 del Herstein y Milnor (1953). Este axioma fundamental permite a estos dos autores obtener el criterio del valor esperado de la utilidad del dinero como la regla para valorar loterías. Este criterio del valor esperado, donde las probabilidades entran de forma lineal, será criticado por M. Allais (1953), por medio de experimentos, sobre el comportamiento de los individuos en situaciones de toma de decisiones bajo incertidumbre.

El segundo principio de Pascal reduce la función de utilidad a una función lineal, con pendiente positiva, del dinero, es decir, Pascal describe situaciones de individuos bajo condiciones de *riesgos neutros*. Aquí, Pascal está más interesado en un problema de justicia, ya que supone que ambos jugadores son «iguales» en todo. No se trata de la toma de un seguro entre un individuo y una empresa de seguros, donde las diferencias, las necesidades y la aversión al riesgo del individuo, son utilizadas por la empresa en su provecho. Respecto del primer principio, sirve para reducir a loterías ciertas las apuestas totales de ambos jugadores.

Obsérvese que si definimos una función $h(x)$ donde x toma los valores enteros 1, 2, 3 y 4, que valora la esperanza matemática en cada una de las cuatro partidas. Es fácil de comprobar que $h(x)$ es solución de la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$h(x) = \frac{K}{6} + h(x+1)\frac{5}{6} \qquad \text{donde } h(4) = k/6$$

Esta ecuación en diferencias finitas se resuelve fácilmente por medio de sustituciones hacia adelante, siendo su solución, como puede comprobar el lector, igual a:

$$h(x) = K\left[1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{5-x}\right]$$

El valor $h(1)$ coincide con la expresión [1] de Fermat si se usa la suma de una progresión geométrica finita. Por ejemplo, si el total apostado es K = 100 u.m., la cantidad que retira el jugador por no jugar las cuatro primeras partidas es de $h(1)$ = 51,774 u.m. ¿Qué han apostado cada uno de los jugadores antes de comenzar el juego? La respuesta es: la apuesta del jugador A es $100 \cdot [1 - (5/6)^8]$ = 76,74 u.m., y la del jugador B es 100 – 76,74 = 23,26 u.m. Obsérvese que el jugador A ahorró la cantidad de 51,774 por no jugar las cuatro primeras partidas, apostando para las siguientes cuatro partidas la cantidad de 76,74 – 51,774 = 24,996, lo que genera un total de 24,996 + 23,26 = 48,226 u.m. El valor que espera ganar el jugador B, una vez que el jugador A ha decido no jugar las cuatro primeras partidas, es $48{,}226 - 48{,}226 \cdot [1 - (5/6)^4]$ = 23,26, que es lo apostado, al comienzo, por el mismo.

Vamos a finalizar esta sección con el planteamiento y la solución de Pascal, del problema del dado con partidas no jugadas. Pascal plantea el problema bajo la situación de que el jugador A decide no jugar la cuarta partida cuando no ha tenido éxito en las tres primeras.

La solución de Pascal es 125/1296, que como señala Fermat es errónea, siendo la solución verdadera igual a 1/6.

Las tres primeras partidas jugadas por el jugador A, sin éxitos, sin haber salido un seis, no contribuyen al cálculo de los valores de las partidas no jugadas. En su carta, Fermat señala que la cantidad apostada K no se modifica después de cada una de estas partidas jugadas sin éxito. La independencia de los sucesivos lanzamientos del dado justifica la solución correcta de Fermat. Estas partidas jugadas sin sacar un seis no modifican, por ejemplo, la probabilidad de sacar un seis en la cuarta partida, que como sabemos es de 1/6.

Si, por ejemplo, las probabilidades 1/6 y 5/6 midiesen las habilidades de los jugadores A y B, respectivamente, la hipótesis de independencia entre los sucesivos lanzamientos del dado recogería el hecho de que ambos jugadores «no se cansan», «no se deterioran», «en cada nueva partida los jugadores se encuentra como en la primera partida», y mantienen sus habilidades.

Un ejemplo ilustrativo

Un juego semejante al del dado con partidas no jugadas puede ser observado actualmente cuando un jugador (una empresa de seguros), B, propone abonar la cantidad K_2, valor de un cierto bien, en el caso de que éste se pierda, asegurándose dicho bien, por ejemplo, por períodos de un mes hasta un máximo de 10 meses. El jugador A, que es dueño del bien valorado en K_2, puede necesitar asegurarlo durante 8 meses. El problema surge sobre qué cantidad, K_1 debe pagar el jugador A al B para que, en el caso de pérdida del bien en un período de 8 meses, el jugador B abone el valor del bien, K_2 al jugador A.

Un juego semejante al del dado con partidas no jugadas puede ser observado actualmente cuando un jugador (una empresa de seguros), B, propone abonar la cantidad K_2, valor de un cierto bien, en el caso de que éste se pierda, asegurándose dicho bien, por ejemplo, por períodos de un mes hasta un máximo de 10 meses.

Si la cantidad K_1 es elevada para el jugador A, éste puede estar interesado en jugar (en este caso, no asegurar), algunas partidas, (durante algunos meses). De nuevo surge el problema de calcular la cantidad que el jugador A debe abonar al B por los meses asegurados, es decir, no jugados. En este último caso, el jugador A corre el riesgo de perder el bien en aquellos meses no asegurados.

Si suponemos que la probabilidad de perder el bien es 1/6, igual que la de ganar el jugador A en el caso del dado, entonces es fácil ver que si el jugador A quiere asegurar 8 meses el bien, debe abonar al jugador B la cantidad:

$$K_2\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^8\right]$$

que coincide con el valor que espera perder el jugador A si corre el riesgo durante los 8 meses.

Mientras que, en el caso del dado, si el jugador A quiere jugar las 8 partidas, debe apostar la cantidad:

$$K\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^8\right]$$

donde, recordemos, K es la cantidad total apostada por ambos jugadores.

También, en el problema del dado, cuando el jugador A no jugaba las dos primeras partidas, entonces podía retirar la cantidad:

$$K\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]$$

Mientras, en el juego del seguro, si el jugador A decide asegurar sólo los dos primeros meses, no jugar las dos primeras partidas, entonces debe abonar al jugador B la cantidad:

$$K_2\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]$$

Por último, si en el juego del dado, el jugador A no ha tenido éxito en las tres primeras partidas, y decide no jugar la cuarta, entonces sabemos que el jugador A debe retirar la cantidad:

$$K\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)\right]$$

Mientras que en el juego del seguro, si el jugador A ha jugado las tres primeras partidas y «no ha tenido éxito», es decir, no se ha perdido el bien en los tres primeros meses no asegurados. Si el jugador A decide asegurar el cuarto mes, entonces debe pagar al jugador B la cantidad:

$$K_2\left[1-\left(\frac{5}{6}\right)\right]$$

que por la hipótesis de independencia, las partidas jugadas «sin éxito» no contribuyen a los pagos por la partidas aseguradas.

Vemos que si lo apostado en el juego del dado es K, en el juego del seguro lo apostado es K_2.

Jesús Basulto
José Antonio Camúñez
Facultad de Ciencias
Económicas y Empresariales.
Universidad de Sevilla

Bibliografía

ALLAIS, M. (1953): «Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: critique des postulats et axiomes de l'ecole americane», *Econometrica*, Vol 21, 503-546.

COUMET, E. (1970): La thèorie du hasard esselle neè par hasard?, *Annales: Economies, Societes, Civilisation*. Vol 25, 574-598.

DAVID, F.N. (1962): *Games, gods and gambling*, Griffin, London.

DE MORA CHARLES, M.S. (1989): *Los Inicios de la Teoría de la Probabilidad: siglos XVI y XVII,* Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco.

EDWARDS, A.W.F. (1987): *Pascal' s arithmetical triangle*, Griffin, London.

HERSTEIN, I.N y J. MILNOR (1953): «An axiomatic approach to measurable utility», *Econometrica*, Vol 21, 291.297.