

# **(re)Descubrimiento automático del teorema de Simson y las generalizaciones de Steiner y Guzmán**

**José Luis Valcarce Gómez  
Francisco Botana Ferreiro**

**D**ESCRIBIMOS aquí, con ánimo ilustrador, una aplicación de un prototipo experimental de programa de computadora que une las capacidades de un entorno de geometría dinámica con las funcionalidades de un sistema de cálculo simbólico. Se trata de (re)descubrir, de manera sencilla, el teorema de Simson y dos de sus generalizaciones por un usuario dotado de regla y compás virtuales y conocedor de unos pocos conceptos geométricos básicos.

Consideremos un triángulo  $ABC$  y un punto  $X$ , desde el que trazamos perpendiculares a los lados del triángulo, siendo  $M$ ,  $N$  y  $P$  los pies de éstas. Si hacemos esta construcción en un entorno de geometría dinámica (aquí y en lo que sigue utilizaremos REX (Valcarce y Botana, 1999)) tendremos un diagrama similar al mostrado en la figura 1.

Arrastrando el punto  $X$  se observa que, *a veces*, los puntos  $M$ ,  $N$  y  $P$  aparentan estar alineados. La pregunta surge de modo natural: ¿qué circunstancias en el diagrama producen esta alineación? Puesto que lo único que hemos hecho es arrastrar el punto  $X$ , parece razonable reformularla en estos términos: ¿cuáles son las posiciones, es decir, el lugar geométrico, de  $X$  para las que  $M$ ,  $N$  y  $P$  están alineados? El lector bien informado habrá recordado al punto uno de los teoremas más conocidos de la geometría euclídea, el teorema de Simson, que establece como condición necesaria para el alineamiento buscado, la pertenencia de  $X$  al circuncírculo del triángulo. Este teorema se utiliza como primer ejemplo ilustrador de un trabajo de Roanes y Roanes (1999) acerca de la búsqueda automática de lugares geométricos, donde también se referencian sus demostraciones usual y automática. El propósito declarado de dicho artículo es «el de contribuir a la divulgación de modernos métodos de investigación en Geometría» —concretamente utilizan el método de Wu (1994)—, «presentándolos desprovistos de todo formalismo, de modo que sean aprovechables por los no especializados en técnicas de

Describimos aquí, con ánimo ilustrador, una aplicación de un prototipo experimental de programa de computadora que une las capacidades de un entorno de geometría dinámica con las funcionalidades de un sistema de cálculo simbólico. Se trata de (re)descubrir, de manera sencilla, el teorema de Simson y dos de sus generalizaciones por un usuario dotado de regla y compás virtuales y conocedor de unos pocos conceptos geométricos básicos.

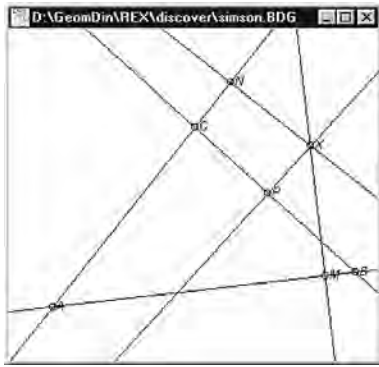


Figura 1

Álgebra Computacional». El camino para esta divulgación pasa por la exploración experimental del teorema en un entorno de geometría dinámica y, posteriormente, por el descubrimiento del lugar geométrico mediante la realización, *por el usuario*, de los cálculos necesarios para el algoritmo de Wu en un sistema de cálculo simbólico. Recio (1998) estudia las posibilidades didácticas de la conexión informática entre geometría y álgebra, poniendo por ello el énfasis en el descubrimiento de teoremas, más que en su demostración automática. También aquí es utilizado el teorema de Simson para ilustración de las técnicas propuestas: tras la exploración geométrica del problema, el usuario ha de utilizar un sistema de cálculo simbólico que «sepa» calcular bases de Groebner para obtener la ecuación analítica del lugar buscado.

La necesidad de que el usuario, en ambas aproximaciones, maneje un sistema de cálculo simbólico constituye la principal dificultad para su repercusión escolar. Recio señala que «la simplificación fundamental vendría de la mano del establecimiento de una Comunicación entre el programa gráfico y el programa (o programas) de Cálculo Simbólico» y que «los primeros años de la enseñanza superior pueden ser, en el estado actual de las cosas, el marco idóneo» (70-71). El prototipo que aquí se ilustra es un REX, un entorno de geometría dinámica desarrollado por los autores, con el programa Mathematica (Wolfram, 1996) en su versión 3.0, en un interfaz que permite describir gráficamente la construcción y, de manera transparente para el usuario, utiliza los recursos simbólicos necesarios para el descubrimiento. Se amplía así el uso de estas técnicas a los alumnos de Secundaria.

REX ha sido ya descrito en Valcarce y Botana (1999), donde también se presenta una breve comparación con otros entornos de geometría dinámica en el terreno de la demostración automática. REX obtuvo el segundo premio en el concurso de software educativo de las IX JAEM. El ejecutable se encuentra también disponible en el CD IX JAEM (1999). Estas referencias aluden a un entorno de geometría dinámica originalmente construido como soporte gráfico a la implementación de métodos automáticos de prueba en geometría euclídea que posteriormente derivó

*REX obtuvo el segundo premio en el concurso de software educativo de las IX JAEM.*

a un programa estándar de geometría dinámica. Actualmente hemos abandonado parcialmente esa línea para enfocarnos en el descubrimiento automático (Recio, 1998) y en la obtención automática de lugares geométricos (Roanes y Roanes, 1999). En cuanto al descubrimiento automático en geometría elemental, el prototipo aquí descrito ha requerido leves cambios en REX (relacionados principalmente con la comunicación entre él y Mathematica) y el desarrollo de un *package* de Mathematica encargado de la automatización de los cálculos simbólicos necesarios. El interfaz se describe, pues, no a nivel de código, sino de producción. Los ejemplos que siguen dan pautas suficientes para remedar «a mano» el proceso seguido. Empero, se ha insertado el código de Mathematica con las tareas que el *package* realizaría sobre los ejemplos. Así las tres tareas (generación de ecuaciones analíticas, eliminación de variables en sistemas de ecuaciones polinómicas y factorización de polinomios, y generación de enunciados lingüísticos y matching entre éstos y ecuaciones) pueden ser realizadas a mano de manera cuasi automática.

### **Primer (re)descubrimiento: el teorema de Simson**

Tras haber realizado la construcción de la figura 1, REX «conoce» la existencia de siete puntos y de seis relaciones geométricas. De los primeros,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $X$  pueden situarse en cualquier posición del plano, mientras que  $M$ ,  $N$  y  $P$  no tienen ningún grado de libertad. El programa asigna coordenadas simbólicas a los puntos, distinguiendo sus tipos por el nombre:  $Un$  indica una coordenada libre y  $x[m]$  una ligada. Además puede fijarse un sistema de referencia escogiendo dos puntos con coordenadas libres. Finalmente la información de REX relativa a los puntos de la construcción y sus coordenadas simbólicas es:  $A(0, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(U5, U6)$ ,  $X(U7, U8)$ ,  $M(x[1], x[2])$ ,  $N(x[3], x[4])$  y  $P(x[5], x[6])$ . Las relaciones geométricas son

Alineados( $M, A, B$ ), Perpendiculares( $AB, MX$ ), Alineados( $N, A, C$ ), Perpendiculares( $AC, NX$ ), Alineados( $P, B, C$ ) y Perpendiculares( $BC, PX$ ). La condición impuesta a los pies de las perpendiculares, Alineados( $M, N, P$ ), se añade a las anteriores y se generan las correspondientes ecuaciones analíticas:

$$\begin{aligned} (0 - x[2]) * (1 - 0) - (0 - 0) * (0 - x[1]) &= 0, \\ (0 - 0) * (x[2] - U8) + (1 - 0) * (x[1] - U7) &= 0, \\ (0 - x[4]) * (U5 - 0) - (U6 - 0) * (0 - x[3]) &= 0, \\ (U6 - 0) * (x[4] - U8) + (U5 - 0) * (x[3] - U7) &= 0, \\ (0 - x[6]) * (U5 - 1) - (U6 - 0) * (1 - x[5]) &= 0, \\ (U6 - 0) * (x[6] - U8) + (U5 - 1) * (x[5] - U7) &= 0, \\ x[6] - x[4] * (x[1] - x[5]) - (x[2] - x[6]) * (x[5] - &- x[3]) = 0. \end{aligned}$$

REX pasa entonces el control a Mathematica, que trata de eliminar en el anterior sistema de ecuaciones las variables  $x[m]$ , devolviendo la ecuación

$$U6^2 * (U5 - U5^2 - U6^2) * U8 + U6^3 * U8^2 + U8^2 * U6 * (1 - U7) * U7 = 0.$$

Cualquier asignación de coordenadas que haga verdaderas las ecuaciones del sistema, también convertirá en identidad la ecuación resultante de la eliminación, la cual establece restricciones únicamente para las variables libres de la construcción. La ecuación, factorizada, puede reescribirse como:

$$U6^2 * (U5 - U5^2 - U6^2) * U8 + U6 * U8^2 - U6 * (1 - U7) * U7 = 0.$$

En resumen, para que las ecuaciones del sistema sean identidades ha de ocurrir que al menos una de las siguientes lo sea también:

$$U6=0, \text{ o } (U5 - U5^2 - U6^2) * U8 + U6 * U8^2 - U6 * (1 - U7) * U7 = 0.$$

La transcripción de la sesión en Mathematica es:

$$\begin{aligned} \text{ecs} = \{ & (0 - x[2]) * (1 - 0) - (0 - 0) * (0 - x[1]) == 0, \\ & (0 - 0) * (x[2] - U8) + (1 - 0) * (x[1] - U7) == 0, \\ & (0 - x[4]) * (U5 - 0) - (U6 - 0) * (0 - x[3]) == 0, \\ & (U6 - 0) * (x[4] - U8) + (U5 - 0) * (x[3] - U7) == 0, \\ & (0 - x[6]) * (U5 - 1) - (U6 - 0) * (1 - x[5]) == 0, \\ & (U6 - 0) * (x[6] - U8) + (U5 - 1) * (x[5] - U7) == 0, \\ & x[6] - x[4] * (x[1] - x[5]) - (x[2] - x[6]) * (x[5] - x[3]) == 0 \}; \end{aligned}$$

Eliminate, { $x[1], x[2], x[3], x[4], x[5], x[6]$ }

$$U6^2 (U5 - U5^2 - U6^2) U8 + U6^3 U8^2 == U6^3 (1 - U7) U7$$

$$\text{pol} = \%[[1]] - \%[[2]]$$

$$-U6^3 (1 - U7) U7 + U6^2 (U5 - U5^2 - U6^2) U8 + U5^3 U8^2$$

Factor [pol]

$$-U6^2 (U6U7 - U6U7^2 - U5U8 + U5^2 U8 + U6^2 U8 - U5U8^2)$$

En este punto REX asume de nuevo el control y busca en una base de enunciados lingüísticos relativos a la construcción cuáles de ellos se traducen analíticamente en alguna de las anteriores ecuaciones. Nótese que bajo el rótulo «Search criterio» en la figura 2 aparece una ventana con propiedades geométricas. Así por ejemplo, si un criterio de búsqueda es «aligned» se generará un enunciado lingüístico («Los puntos  $-$ ,  $-$  y  $-$  están alineados») y la correspondiente ecuación polinómica por cada triple de puntos distintos.

En el ejemplo la primera ecuación casa con la del enunciado «Los puntos  $A, B$  y  $C$  están alineados» y la segunda con «Los puntos  $X, A, B$  y  $C$  están en una circunferencia». Nótese que el programa ha encontrado una condición de degeneración (para la cual  $M = N = P$ ) y una condición necesaria no trivial para la alineación buscada. La razón por la que el segundo enunciado no habla explícitamente del circuncírculo del triángulo es doble: en primer lugar, en la construcción hecha no aparece el circuncentro por lo que ningún enunciado lingüístico lo incluye; en segundo lugar, razones de eficiencia nos han impedido introducir en el prototipo conocimiento del tipo «la circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo no degenerado se llama circuncírculo».

## Segundo (re)descubrimiento: el teorema de Steiner

Puesto que la alineación de los puntos  $M, N$  y  $P$  equivale a la nulidad del área del triángulo con esos vértices, cabe preguntarse cuál es el lugar geométrico de los puntos  $X$  que mantienen constante el área de dicho triángulo. Steiner enunció que este lugar es una circunferencia de centro el circuncentro del triángulo  $ABC$ .

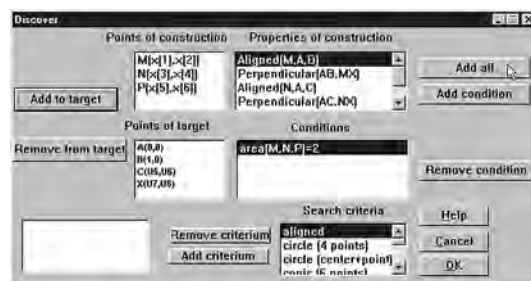


Figura 2

Para el descubrimiento automático de este lugar usaremos de nuevo la construcción de la figura 1. Como en la Sección anterior, escogemos como referencia el punto  $A$  y como unidad el segmento  $AB$ , e introducimos, por medio de un editor de línea, la condición de la constancia del área del triángulo  $MNP$ :  $\text{area}(M, N, P)=2$ .

Cuando seleccionamos la opción Descubrir, se abre un cuadro de diálogo en el que indicamos cuáles son los puntos relevantes para el eventual hecho a descubrir y cuáles las condiciones sobre las que trabajar (figura 2).

El programa devuelve la siguiente condición necesaria:



Figura 3

siendo ahora la sesión de Mathematica como sigue

```
ecs = {(0 - x[2]) * (1 - 0) - (0 - 0) * (0 - x[1]) == 0,
(0 - 0) * (x[2] - U8) + (1 - 0) * (x[1] - U7) == 0,
(0 - x[4]) * (U5 - 0) - (U6 - 0) * (0 - x[3]) == 0,
(U6 - 0) * (x[4] - U8) + (U5 - 0) * (x[3] - U7) == 0,
(0 - x[6]) * (U5 - 1) - (U6 - 0) * (1 - x[5]) == 0,
(U6 - 0) * (x[6] - U8) + (U5 - 1) * (x[5] - U7) == 0,
Def[{{x[1], x[2], 1}, {x[3], x[4], 1}, {x[5], x[6], 1}]/2 == 2];
```

```
Elineinatele[ecs, {x[1], x[2], x[3], x[4], x[5], x[6]}]
```

```
U6^2 (U5 - U52 - U62) U8 + U63 U82 ==
4 U52 - 8 U53 + 4 U54 + 4 U62 - 8 U5 U62 + 8 U52 U62 + 4 U64 + U63 U7 - U63 U72
```

```
pol = %[[1]] - %[[2]]
```

```
-4 U52 + 8 U53 - 4 U54 - 4 U62 + 8 U5 U62 - 8 U52 U62 -
4 U54 - U63 U7 + U63 U72 + U62 (U5 - U52 - U62) U8 + U63 U82
```

```
Factor[pol]
```

```
-4 U52 + 8 U53 - 4 U54 - 4 U62 + 8 U5 U62 - 8 U52 U62 - 4 U64 -
U53 U7 + U63 U72 + U5 U62 U8 - U52 U62 U8 - U64 U8 + U63 U82
```

Obsérvese que no puede haber ahora condiciones de degeneración debido a la exigencia explícita de no alineamiento de los puntos  $M$ ,  $N$  y  $P$ . Por otra parte, no se ha obtenido la forma lingüística de la condición debido a que ninguna de las que se generan acerca de los puntos seleccionados ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $X$ ) incluye un enunciado de la forma « $X$  está en la circunferencia de centro  $O$ », punto este último que ni siquiera aparece en la construcción. Esta cuestión, aparecida en la sección anterior y que volveremos a encontrar en la siguiente, es actualmente objeto de estu-

dio: puesto que la mayoría de los lugares en geometría elemental son rectas y circunferencias, un sencillo análisis simbólico de la ecuación obtenida permitirá su traducción lingüística. En este análisis también serán consideradas las secciones cónicas.

Volviendo a la ecuación obtenida, podemos obtener un aprovechamiento didáctico con alumnos de Bachillerato o nivel superior si se plantea su reconocimiento como una ecuación polinómica de grado dos en las variables  $U7$  y  $U8$  que tienen iguales coeficientes, es decir, una circunferencia.

Coefficient[%, U7, 2]

U63

Coefficient[%%, U8, 2]

U69

Puede ampliarse la propuesta a la determinación de su centro, que, dice Steiner, es el circuncentro de  $ABC$ . Esta cuestión, aún no resuelta en nuestro prototipo y que implica el uso por el alumno del sistema de cálculo simbólico, es sin duda interesante pero nos aleja del objetivo de este artículo, la automatización efectiva del descubrimiento.

### Tercer (re)descubrimiento: el teorema de Guzmán

Guzmán (1999) ha considerado el caso en que las proyecciones desde  $X$  a los lados del triángulo  $ABC$  sigan tres direcciones fijas cualesquiera, salvo que sean paralelas a los respectivos lados. El lugar geométrico de los puntos  $X$  que determinan un triángulo  $MNP$  de área constante es una cónica. La construcción de esta situación se muestra en la figura 4, donde las tres direcciones fijas se muestran en la esquina superior izquierda.

Tras un proceso idéntico al seguido en el teorema de Steiner (origen  $A$ , unidad  $AB$ ,  $\text{area}(M, N, P) = 2$ ), el programa devuelve una ecuación en las variables  $U5, \dots, U16$  con ¡154 términos y cada término, en media, 5 factores! Tal longitud es en gran

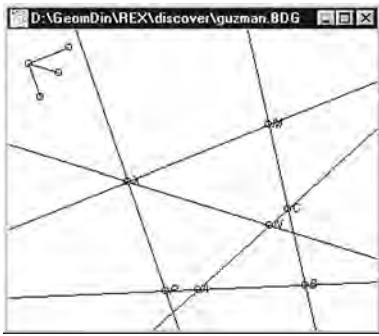


Figura 4

parte debida a las ocho variables  $U_9, \dots, U_{16}$ , que corresponden a los puntos que fijan las direcciones de proyección. Un análisis análogo al realizado para Steiner, esta vez con el concurso altamente recomendable del sistema de cálculo simbólico, muestra que la ecuación obtenida es

**José Luis Valcarce**  
 IES Pontepedriña  
 Santiago  
**Francisco Botana**  
 Departamento de Matemática  
 Aplicada  
 EUET Forestal  
 Universidad de Vigo

la correspondiente a una cónica para las variables  $U_7$  y  $U_8$ , coordenadas del punto  $X$ .

## Bibliografía

- CD IX JAEN: <soft\rex\> (debido al compilador utilizado para la ejecución de REX sitúe el calendario de su PC en 1999)
- GUZMÁN, M. (1999): «An extension of the Wallace-Simson theorem: projecting in arbitrary directions», *American Math. Monthly*, n.º 106 (6), 574-580.
- RECIO, T. (1998): *Cálculo simbólico y geométrico*, Síntesis, Madrid.
- ROANES MACÍAS, E. y E. ROANES LOZANO (1999): «Búsqueda automática de lugares geométricos», *Boletín de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas-Congreso IMACS-ACA'99*, n.º 53, 67-77.
- VALCARCE, J. L. y F. BOTANA (1999): «REX: un recurso para el estudio de la geometría», *Actas de las IX Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Lugo*, 260-262. <<http://www-mapo.uvigo.ees/dg/rex>>
- WOLFRAM, S. (1996): *The Mathematica book*, Cambridge University Press, Cambridge.
- WU, W. T. (1994): *Mechanical Theorem Proving in Geometries*, Springer, Viena.

7. Entre los conjuntos  $A = \{a, b, c, d\}$  y  $B = \{x, y, z\}$  se establece la función  $f$  definida por el grafo adjunto. ¿Qué clase de función es  $f$ ? Detalla los pares que la integran.

8. En el problema anterior, ¿cuál es la función inversa? Detalla un par. ¿Es uniforme?

9. ¿Qué clases de funciones son las representadas por los siguientes grafos?

5.º EGB