

La demostración en el currículo: una perspectiva histórica

Marcelino J. Ibañes Jalón
Tomás Ortega del Rincón

EL PRIMER plan de estudios de enseñanza secundaria se remonta al 4 de agosto de 1836 (Ministerio de Educación Nacional, 1964). Con él se inicia una larga lista: veinte durante los dos últimos tercios del siglo XIX y diez a lo largo del siglo XX, cuyas características generales –en cuanto a la asignatura de Matemáticas– pueden verse en Ibañes (1993). Un análisis detenido de los últimos se encuentra en Rico y Sierra (1994). A continuación se hace una lectura más específica –en lo que se refiere al tema de la demostración (prueba)– de los planes más recientes.

Plan de 1934 (Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, 1934a y b)

En este plan el Bachillerato consta de 7 cursos, y el cuestionario de Matemáticas consiste en una enumeración detallada de los contenidos de cada curso. Al final hay un apartado de *Observaciones* que incluye los siguientes párrafos:

En el tercer año se inicia el estudio racional de la Aritmética y de la Geometría, sin que esto quiera decir que se explique Aritmética y Geometría de carácter abstracto. Por el contrario, se procurará limitar el grado de abstracción de las materias enseñadas en todos los cursos, adaptándolo a la edad mental de los alumnos. En cambio, los cursos intuitivos no deben reducirse a una mera exposición de recetas para resolver ejercicios prácticos, sino que se hará razonar al alumno en todo momento, siempre dentro de los límites que imponga su desarrollo mental.

La dosificación de la intensidad y grado de abstracción de las materias estudiadas es una cuestión de tacto, fundamental en el arte de la enseñanza, y que ha de ser confiada a los profesores, pues solamente ellos pueden resolverla en cada caso particular con el criterio que les dicte su experiencia.

No hay referencias explícitas de la demostración (prueba), y como muestra la cita anterior, simplemente se hace una

En la primera parte de este artículo se hace un breve análisis histórico del tratamiento que los distintos planes de estudios, cuestionarios o sistemas educativos que se han sucedido en España en las últimas décadas, han dado a las demostraciones (pruebas). Finalmente, teniendo en cuenta la investigación que desde hace unos años venimos desarrollando en nuestra Universidad, desde la óptica de la Didáctica de la Matemática, se comentan las aportaciones del currículo actual, que suponen una mejora sobre los anteriores, y las deficiencias observadas, que podrían ser subsanadas con la propuesta curricular que se hace aquí.

llamada de atención a la transición de los «cursos intuitivos» a los de «estudio racional», que deja al buen criterio de los profesores.

Plan de 1938 (Ministerio de Educación Nacional, 1938 y 1939)

En este plan el Bachillerato consta de 7 cursos. El cuestionario de Matemáticas consiste en una enumeración detallada de los contenidos de cada curso. Después de los cursos primero, tercero, quinto y séptimo, se especifican unas *Instrucciones metodológicas*, de las que extraemos los siguientes comentarios:

Las materias que componen el cuestionario de este primer curso se expondrán de forma intuitiva sin demostraciones y con el único objeto de que el alumno se habitúe a la nomenclatura y notación propia de la Aritmética y de la Geometría...

Durante el segundo y tercer curso podrán iniciarse ya los alumnos en las demostraciones y razonamientos elementales que justifiquen los enunciados y teoremas de la Aritmética y Geometría que vayan aprendiendo. De manera que comiencen a adquirir nociones del rigor y exactitud lógicos, así como el proceso sistemático que exige la ciencia. La exactitud analítica y el rigor lógico nunca serán, sin embargo, llevados a una exageración tal que resulten repulsivos para las inteligencias vivas e imaginativas de los niños. Siempre, sobre todo, en presencia de conceptos y figuras nuevas, se utilizará el método intuitivo y directo en la medida de lo posible...

Durante el cuarto y quinto cursos podrán exigirse ya de los alumnos la precisión, el rigor lógico y el espíritu sistemático propios de las Ciencias Exactas; de manera que sus espíritus se formen y se desarrollen según estas saludables directrices.

Las demostraciones y razonamientos no sobrepasarán, sin embargo, del nivel elemental...

Hay algunas referencias explícitas a las demostraciones, aunque no se orienta sobre qué proposiciones pueden ser demostradas, ni se especifica nada acerca de las técnicas de demostración adecuadas o exigibles. Se establece una gradación en cuanto al rigor y abstracción de los razonamientos, en la que se observa cierta prisa respecto a la adquisición, por parte de los alumnos, del razonamiento hipotético deductivo. En este sentido, parece muy exagerado pretender que en los cursos cuarto y quinto –14 y 15 años– puedan «exigirse de los alumnos la precisión, el rigor lógico y el espíritu sistemático propios de las Ciencias Exactas». Además, este comentario está en contradicción con el siguiente párrafo: «Las demostraciones y razonamientos no sobrepasarán, sin embargo, del nivel elemental...».

Plan de 1953 (Ministerio de Educación Nacional, 1953 y 1954)

En este plan el Bachillerato consta de 6 cursos, más un curso preuniversitario. El cuestionario de Matemáticas con-

siste en una enumeración detallada de los contenidos de cada curso. Al final se incluyen unas *Orientaciones metodológicas*, que se especifican para cada curso, y de las que extraemos los siguientes comentarios:

En el primer curso inicial de Matemáticas se omitirá todo razonamiento abstracto. Las propiedades numéricas esenciales se harán notar con la repetición de ejercicios. Lo mismo cabe decir con las propiedades geométricas...

La Geometría queda circunscrita en este curso segundo a una parte de la Geometría plana, y con ella han de iniciar los alumnos el razonamiento lógico, que es una de las finalidades de la enseñanza de la Matemática en el Bachillerato. Sin embargo, no se estima lo anterior como un *desideratum*, pues es imposible que los niños de once a doce años puedan realizar un razonamiento lógico perfecto...

El tercer curso, en el que se han de exponer someramente, pero con carácter lógico, los fundamentos de la teoría de los números exige por parte del profesor una atención profunda para no recargar al alumno con teoremas innecesarios. No parece conveniente tratar la teoría de la divisibilidad por la de congruencias, aunque la elegancia que éstas imprimen en las demostraciones sea manifiesta. Ello obligaría a recargar el estudio del alumno con varias propiedades que pueden dejarse de lado, empleando otros caminos de demostración...

En el segundo ciclo del Bachillerato, las Matemáticas deben desarrollarse, sin dejar de presentarlas en contacto con la realidad, dándoles un carácter más riguroso, en un desarrollo lógico deductivo, intensificando, además, el propio «descubrir» del alumno, haciendo a los estudiantes pensar más y reduciendo al mínimo la información directa; es preciso despertar el interés, que, por otra parte, es el mejor estímulo del trabajo.

Hay referencias explícitas a la clase de razonamiento y a las demostraciones. Se indica alguna materia en la que puede llevarse a cabo el razonamiento hipotético deductivo, y, también, qué clase de demostraciones no proceden. No se especifican las técnicas de demostración adecuadas o exigibles. Igual que en el Plan anterior, el razonamiento lógico se inicia en el segundo curso; sólo en primero se omite del razonamiento abstracto, pero no se señalan vías alternativas de razonamiento intuitivo.

*...parece
muy exagerado
pretender
que en los cursos
cuarto y quinto
–14 y 15 años–
puedan
«exigirse
de los alumnos
la precisión,
el rigor lógico
y el espíritu
sistemático
propios
de las Ciencias
Exactas».*

Plan de 1957 (Ministerio de Educación Nacional, 1961)

En este plan el Bachillerato consta de 6 cursos, más el curso preuniversitario. El cuestionario de Matemáticas consiste en una enumeración detallada de los contenidos de cada curso, divididos, a su vez, en *lecciones*. Al final se incluyen unas *Orientaciones metodológicas* para todos los cursos, de las que extraemos los siguientes comentarios:

En el primer curso la enseñanza de la Matemática tendrá un carácter práctico e intuitivo, debiendo renunciar el profesor a explicar siguiendo cualquier clase de razonamiento abstracto...

La Geometría debe tratarse por procedimientos preferentemente empíricos. Se recurrirá, por tanto, al empleo de pliegues, papel transparente para el transporte y superposición de figuras, hilos, etc. La frecuente resolución de ejercicios gráficos con regla y compás, y la construcción y observación de modelos geométricos sencillos permitirá al alumno captar multitud de propiedades geométricas. La «evidencia sensible» debe preceder a la «evidencia racional», y, en muchas ocasiones, la primera será suficiente. Hay que prescindir, por consiguiente, de la justificación de propiedades evidentes. No debe darse al alumno la impresión de que el buen sentido es inútil. Será preferible, por ejemplo, que el alumno realice ejercicios de construcción y superposición de triángulos con los datos adecuados, a obligarle a una justificación racional de los casos de igualdad...

Los cursos tercero y cuarto constituyen un ciclo que podemos considerar de transición entre el método empírico practicado en primero y segundo cursos y el método racional que habrá de seguirse en el Bachillerato Superior. Se puede considerar, por tanto, como un ciclo intuitivo de tendencia racional, y en él no será necesario presentar los conocimientos matemáticos constituyendo una estructuración lógica perfectamente eslabonada. Por este motivo no se considerará imprescindible empezar los estudios de Álgebra de los números racionales siguiendo directrices de carácter lógico...

En Geometría no deben abandonarse prematuramente las consideraciones de tipo práctico-intuitivo. Se hará ver al alumno, poco a poco, lo procedente de las demostraciones, en la seguridad de que sólo cuando consiga un espíritu fino, sentirá su necesidad con carácter imperioso. Se prescindirá de teoremas secundarios o de escasa utilidad, presentando sólo los verdaderamente esenciales.

...cabe destacar la consideración de tres ciclos: los cursos primero y segundo son de carácter empírico; en tercero y cuarto, debe producirse una transición entre el método empírico y el racional; éste último es el adecuado para los cursos quinto y sexto.

También debe iniciarse la Geometría del espacio mediante procedimientos intuitivos y prácticos que permitan al alumno vislumbrar las primeras propiedades del espacio geométrico por evidencia racional simple, y poder abordar rápidamente el estudio de los poliedros...

En todo caso, se procurará aprovechar las situaciones creadas por las cuestiones concretas como introducción a los desarrollos teóricos y que el alumno adquiera la experiencia de los entes y relaciones matemáticas antes de iniciarle en el razonamiento deductivo.

En cuanto a la metodología de los cursos que integran el Grado Superior, de carácter preeminentemente racional, importa extender progresivamente la construcción deductiva de la Matemática y favorecer la iniciativa individual tanto como el trabajo en equipo; dar prioridad a la reflexión y al razonamiento antes que al adiestramiento...

Hay referencias explícitas a las demostraciones y, sobre todo, al tipo de razonamiento. En este sentido, cabe destacar la consideración de tres ciclos: los cursos primero y segundo son de carácter empírico; en tercero y cuarto, debe producirse una transición entre el método empírico y el racional; éste último es el adecuado para los cursos quinto y sexto. En comparación con los planes anteriores se mejora notablemente, puesto que se establecen con más claridad las pautas para una evolución progresiva del razonamiento, retrasándose la edad en la que se exige el pensamiento lógico. Además –a diferencia de los anteriores–, cuando se recomienda un planteamiento intuitivo, se establecen alternativas al razonamiento deductivo, indicando actividades manipulativas concretas para el aprendizaje de la Geometría. No se especifica nada acerca de las técnicas de demostración adecuadas o exigibles, aunque sí hay algunas orientaciones acerca de cuándo procede o no hacer demostraciones.

En el programa de quinto curso se incluye una lección –la primera– titulada *Iniciación al método racional*, cuyo índice de conceptos es:

Postulados.– Teoremas: hipótesis y tesis; demostración.– Cadenas deductivas. Teoremas directos, recíprocos y contrarios.– Condición necesaria y suficiente.– Ejemplos de aplicación.– Ejercicios.

Así pues, se introduce una terminología y se abordan los conceptos relativos al razonamiento hipotético-deductivo: postulados, teoremas, hipótesis y tesis, y demostración. También se distinguen diversos tipos de teoremas: directos, recíprocos y contrarios. Por último, se explican las expresiones *condición necesaria* y *condición suficiente*. Como aplicación inmediata de estos conocimientos, en las lecciones 2 a 7, el programa oficial propone:

Dedíquense seis lecciones como mínimo y ocho como máximo al desarrollo racional de un capítulo de la Aritmética y un capítulo de la Geometría libre elección del autor del texto o del profesor.

En el temario de este mismo curso hay varias referencias a los *métodos* matemáticos que se proponen utilizar. Así, las lecciones ocho a once se dedican a los *Métodos de resolución de problemas* y a los *Métodos especiales de la Geometría métrica*.

A lo largo del temario del último ciclo –tanto en quinto curso como en sexto– se propone el estudio de multitud de teoremas referidos no sólo a la Geometría, sino también a otras ramas de las Matemáticas: Aritmética, Álgebra y Análisis.

En este plan de estudios, que introduce tantas novedades, se nota la influencia del profesor D. Pedro Puig Adam –en la Nota de la Redacción titulada «Balance de cuatro años de labor» e incluida en la obra de Puig Adam (1960: 132-136) se detalla el trabajo de éste, entre los años 1953 y 1956, para modernizar la enseñanza de las Matemáticas y sus repercusiones en los programas oficiales–. La influencia de Puig Adam no se reduce al plan de 1957, sino que reaparece en los primeros movimientos de reforma del sistema educativo de los años ochenta, que toman como referencia sus publicaciones didácticas (Rico y Sierra, 1994: 192).

Plan de 1970 (Ministerio de Educación y Ciencia, 1975 y 1978)

En este plan el Bachillerato consta de 3 años, más el Curso de Orientación Universitaria. Los cuestionarios de Matemáticas consisten en una enumeración bastante escueta de los contenidos de cada curso. Después de cada uno de ellos se incluyen unos comentarios en los que se mezclan la formulación de objetivos, la enumeración más detallada de conceptos y algunas orientaciones. No hay referencias a la demostración (prueba) y muy pocas referencias directas al razonamiento; no obstante, a continuación se reproducen algunas citas. En lo concerniente al Bachillerato, en una breve presentación para el Área de las Ciencias Matemáticas y de la Naturaleza, se alude a la formación de los alumnos en cuanto al razonamiento:

El área de las ciencias matemáticas y de la naturaleza tratará de capacitar al alumno para comprender los fenómenos naturales, científicos y técnicos de su entorno. Se resaltarán la importancia del mecanismo lógico implícito en el razonamiento científico habituando al alumno a los métodos deductivo e inductivo y a la experimentación.

El enfoque estructuralista característico de este plan de estudios (Rico y Sierra, 1994: 148) se deja ver en el inicio del comentario correspondiente al primer curso, donde se expone que:

Partiendo de los conceptos de anillo y cuerpo introducidos en la segunda etapa de Educación General Básica, se pretende... [enumera los objetivos para el primer curso].

No hay otras instrucciones explícitas en este sentido en los programas de Bachillerato, pero la excesiva –en nuestra opinión– tendencia al formalismo se inicia ya en la Educación General Básica y esto va a condicionar el tratamiento de la «demostración». En unas orientaciones dictadas por el Ministerio de Educación y Ciencia (1971) se dice que:

...en los planes de 1934, 1938 y 1953 se propone que la adquisición del razonamiento deductivo se haga de forma gradual, pero no se clarifica cómo debe hacerse el escalonamiento.

La segunda etapa de E.G.B. (11-14 años) pretende ir hacia una mayor profundidad en el formalismo matemático. Se hace preciso desarrollar en el alumno la capacidad de elaborar los sistemas formales necesarios en la resolución de problemas.

Y, entre los objetivos para el octavo curso de EGB figura el siguiente:

Construcción rigurosa del conjunto Q de los números racionales.

Se puede resumir lo anteriormente expuesto para los planes de estudios comprendidos entre 1934 y 1970 en los siguientes puntos:

- Hay muy pocas referencias explícitas a las demostraciones (pruebas), aunque sí hay más alusiones a la clase de razonamiento –sobre todo hipotético-deductivo.
- En los planes de 1934, 1938 y 1953 se advierte una excesiva –a nuestro juicio– prisa en la introducción del razonamiento deductivo, lo que se hace en el segundo curso. Esto es corregido en el plan de 1957, ya que esa introducción se retrasa al tercer curso.
- También en los planes de 1934, 1938 y 1953 se propone que la adquisición del razonamiento deductivo se haga de forma gradual, pero no se clarifica cómo debe hacerse el escalonamiento.
- En el plan de 1957 se establecen claramente tres fases: la empírica, la de transición y la deductiva.
- En el plan de 1970 se pretende una iniciación muy prematura en el formalismo matemático, y un predominio excesivo del enfoque estructuralista.
- No hay comentarios sobre las distintas técnicas de demostración que podrían utilizarse.
- Salvo lo ya mencionado para el plan de 1957, no hay propuestas concretas a una exposición deductiva de los temas.
- Destaca, por el lado positivo, la incorporación –en el plan de 1957– de un tema para exponer los con-

ceptos de teorema, demostración, etcétera, e introducir el lenguaje matemático asociado.

Currículo de la LOGSE

En el currículo de la ESO (MEC, 1991a), en la Introducción del apartado correspondiente a Matemáticas (véanse las páginas 74 a 81 del Anexo) se pueden leer las siguientes citas:

... la tradicional idea de las matemáticas como ciencia puramente deductiva, idea ciertamente válida para el conocimiento matemático en cuanto producto desarrollado y ya elaborado, ha de corregirse con la consideración del proceso inductivo y de construcción a través del cual ha llegado a desarrollarse ese conocimiento. La especial trascendencia que para la educación matemática tiene el proceso, tanto histórico como personal, de construcción empírica e inductiva del conocimiento matemático, y no sólo formal o deductiva, invita a resaltar dicho proceso de construcción...

Es preciso, por tanto, que el currículo refleje el proceso constructivo del conocimiento matemático, tanto en su progreso histórico, como en su apropiación por el individuo. La formalización y estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo no es el punto de partida, sino más bien un punto de llegada de un largo proceso de aproximación a la realidad, de construcción de instrumentos intelectuales eficaces para interpretar, representar, analizar, explicar y predecir determinados aspectos de la realidad...

Y, a continuación (página 75), se enuncian tres principios de selección y organización de los contenidos, de los que reproducimos el primero:

Las Matemáticas han de ser presentadas a alumnos y alumnas como un conjunto de conocimientos y procedimientos que han evolucionado en el transcurso del tiempo, y que, con seguridad, continuarán evolucionando en el futuro. En esa presentación, han de quedar resaltados los aspectos inductivos y constructivos del conocimiento matemático, y no sólo los aspectos deductivos de la organización formalizada que le caracteriza como producto final. En el aprendizaje de los propios alumnos hay que reforzar el uso del razonamiento empírico inductivo en paralelo con el uso del razonamiento deductivo y de la abstracción.

Después —en la misma página—, se dice:

*... cita
las habilidades
en la comprensión
y en el uso
de los diferentes
lenguajes
matemáticos,
las rutinas
y algoritmos
particulares,
las estrategias
heurísticas,
y las competencias
relativas
a la toma
de decisiones,
pero no hace
referencia a
los procedimientos
de verificación.*

... El desarrollo de la competencia cognitiva general de los alumnos, en estos años, y, en concreto, la posibilidad de llevar a cabo razonamientos de tipo formal abre nuevas posibilidades para avanzar en el proceso de construcción del conocimiento matemático, asegurando niveles intermedios de abstracción, simbolización y formalización.

Esas posibilidades aparecen en una doble línea. En primer lugar, la capacidad que el adolescente tiene de abstraer relaciones y realizar inferencias, no sólo a partir de operaciones concretas con objetos físicos, como en la etapa educativa anterior, sino también a partir de operaciones sobre representaciones simbólicas referidas a dichos objetos, permite avances sustanciales en el conocimiento matemático. En segundo lugar, y en estrecha relación con lo anterior, la capacidad del adolescente de trascender las informaciones concretas sobre la realidad y los datos de la experiencia inmediata, dando entrada a las conjeturas e hipótesis como forma de pensamiento y de razonamiento, hace posible la introducción del pensamiento hipotético deductivo y abre una vía de acceso a los componentes más formales del conocimiento matemático.

De todas formas, debe reconocerse que los contenidos más complejos, formales y deductivos de las matemáticas siguen estando a menudo fuera de las posibilidades de comprensión de los alumnos, incluso al final de la educación obligatoria...

También en la misma página 75, se añade:

... En consecuencia, en el currículo básico deben incluirse los contenidos más generales del conocimiento matemático, los que son transversales a sus distintos ámbitos e incluyen conceptos y procedimientos de carácter más común, a la vez que más funcional.

Y, cita las habilidades en la comprensión y en el uso de los diferentes lenguajes matemáticos, las rutinas y algoritmos particulares, las estrategias heurísticas, y las competencias relativas a la toma de decisiones, pero no hace referencia a los procedimientos de verificación.

En los *Objetivos generales* (página 76), se formulan diez, de los que destacamos el segundo:

2. Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas, realizar inferencias y deducciones, y organizar y relacionar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.

En las páginas 76 a 80 se especifican los *Contenidos*. A continuación se indican aquellos que se relacionan con la demostración (prueba). En el primer bloque de contenidos, *Números y operaciones*, en el procedimiento 22, se dice:

Formulación de conjeturas sobre situaciones y problemas numéricos, y comprobación de las mismas mediante el uso de ejemplos y contra-ejemplos, el método de ensayo y error, etc.

En el tercer bloque, *Representación y organización del espacio*, hay varios procedimientos que nos conciernen:

8. Utilización del Teorema de Tales para obtener o comprobar relaciones métricas entre figuras.

9. Búsqueda de propiedades, regularidades y relaciones en cuerpos, figuras y configuraciones geométricas.

14. Formulación y comprobación de conjeturas acerca de propiedades geométricas en cuerpos y figuras y de la solución de problemas geométricos en general.

16. Utilización de métodos inductivos y deductivos para la obtención de propiedades geométricas de los cuerpos y de relaciones entre ellos.

En el mismo bloque, en *Actitudes*, se cita:

2. Reconocimiento y valoración de las relaciones entre diferentes conceptos, como la forma y el tamaño de los objetos, y entre los métodos y lenguajes matemáticos que permiten tratarlos.

5. Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.

Por último, el procedimiento 10 del quinto bloque, *Tratamiento del azar*, es:

Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.

En el resto de los bloques de contenido no hay referencias a los procedimientos de verificación.

El currículo de Matemáticas se finaliza con la formulación de trece *Criterios de evaluación* (página 81), ninguno de los cuales parece relacionarse con el tema que nos ocupa.

Para facilitar a los centros de enseñanza secundaria el desarrollo del currículo, el MEC publicó unas orientaciones para la distribución de objetivos, contenidos y criterios de evaluación para cada uno de los ciclos (MEC, 1992a). A continuación, se detallan las citas que tienen relación con el aprendizaje de la demostración (prueba). Para el *primer ciclo*, en el bloque de *Organización y representación del espacio*, se indica (página 9868):

Otro aspecto destacable en el que inciden estos contenidos es el que se refiere a la utilización de las distintas formas de razonamiento. De entre ellas cabe resaltar la importancia que deben tener aquí las formas inductivas y, en menor medida, una cierta presencia del razonamiento deductivo.

En el resto de los bloques de contenido no hay referencias a los procedimientos de verificación. Y, en los *procedimientos* (página 9869):

Junto a técnicas de recogida y organización de la información, en algún caso ya indicadas, se pueden poner en práctica, en tareas de resolución de problemas, algunas estrategias tales como la búsqueda de casos particulares, los métodos de ensayo y error, etc. Todo ello en situaciones suficientemente conocidas por los alumnos, o sobre las que tengan la posibilidad de manejar y experimentar con los objetos a los que se refiere.

En contraposición, para el *segundo ciclo*, en el bloque de *Organización y representación del espacio*, se indica (página 9869):

En definitiva, se trata de llevar a cabo un estudio más profundo de las propiedades de las figuras geométricas en todos sus aspectos: reconocimiento, representación, propiedades métricas, etcétera. Se puede esperar, por otra parte, una utilización más ajustada de las distintas formas de razonar, con una presencia mayor de los métodos deductivos.

En el resto de los bloques de contenido no hay referencias a los procedimientos de verificación. Y, en los *procedimientos* (página 9870):

Junto a ello, los alumnos de este ciclo están más capacitados para la formulación y comprobación de conjeturas y para realizar generalizaciones en situaciones diversas, que constituyen herramientas de gran potencia, en particular, en tareas de resolución de problemas.

En todos los ámbitos de la actividad matemática, en el tratamiento de distintos objetos y en diferentes situaciones, pueden en este ciclo introducirse un mayor «rigor» en cuanto a la justificación de las conclusiones, tanto las obtenidas por el propio alumno como las que obtengan o le presenten otros. Llegar a la justificación, que en algún caso puede ser demostración, pero no necesariamente siempre, requiere ir desarrollando paulatinamente ideas y actitudes más ajustadas sobre el rigor y la coherencia en la argumentación, sobre la necesidad de precisión al utilizar términos y al realizar medidas, sobre la exactitud y control del error en la utilización de cantidades.

Termina el documento con unas *especificaciones para el cuarto curso* –en el que, como se sabe, hay dos opciones: Matemáticas A y Matemáticas B–. En ellas (páginas 9870 y 9871), no hay ninguna referencia a la demostración (prueba).

En el *Curriculum del Bachillerato* (MEC, 1992b) se establecen los objetivos, contenidos y criterios de evaluación para todas las materias. En el apartado correspondiente a Matemáticas I y II, en la *Introducción* (página 97 del Anexo) se pueden leer las siguientes citas:

Las Matemáticas... Les caracteriza la naturaleza lógico-deductiva de su versión acabada, el tipo de razonamientos que utilizan y la fuerte cohesión interna dentro de cada campo y entre unos campos y otros...

En la Educación Secundaria Obligatoria los alumnos se han aproximado a varios campos del conocimiento matemático que ahora están en condiciones de asentar y utilizar. Esta será la base sobre la que se apoyará el desarrollo de capacidades tan importantes como la de abstracción, la de razonamiento en todas sus vertientes, la de resolución de problemas de cualquier tipo, matemático o no, la de investigación y la de analizar y comprender la realidad...

El conocimiento matemático, en el Bachillerato, debe tener un cierto respaldo teórico.

Para facilitar a los centros de enseñanza secundaria el desarrollo del currículo, el MEC publicó unas orientaciones para la distribución de objetivos, contenidos y criterios de evaluación para cada uno de los ciclos.

Las definiciones, demostraciones y los encañamientos conceptuales y lógicos, en tanto que dan validez a las intuiciones y confieren solidez y sentido a las técnicas aplicadas, deben ser introducidos en estas asignaturas. Sin embargo, este es el primer momento en el que el alumno se enfrenta con cierta seriedad a la fundamentación teórica de las matemáticas, y el aprendizaje, por tanto, debe de ser equilibrado y gradual.

En los *Objetivos generales* (página 97), se formulan nueve, de los que destacamos el primero y el cuarto:

1. Comprender los conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas que les permitan desarrollar estudios posteriores más específicos de ciencias o técnicas y adquirir una formación científica general.
4. Utilizar, con autonomía y eficacia, las estrategias características de la investigación científica y los procedimientos propios de las matemáticas (plantear problemas, formular y contrastar hipótesis, planificar, manipular y experimentar) para realizar investigaciones y, en general, explorar situaciones y fenómenos nuevos.

En las páginas 97 y 98 se especifican los *Contenidos*, pero no hay referencias directas a los procedimientos de verificación (pruebas o demostraciones).

Para finalizar, se formulan los *Criterios de evaluación* (páginas 98 y 99). Hay nueve en Matemáticas I y ocho en Matemáticas II. Solamente uno en cada una de estas asignaturas se podría relacionar con las pruebas (demostraciones). En Matemáticas I, el número 9:

Organizar y codificar informaciones, seleccionar estrategias, comparándolas y valorándolas, para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, y utilizar las herramientas matemáticas adquiridas.

Se pretende que el alumno utilice la modelización de situaciones, la reflexión lógico-deductiva, los modos de argumentación propios de las matemáticas y las destrezas matemáticas adquiridas para realizar investigaciones enfrentándose con situaciones nuevas.

Y, en Matemáticas II, el número 8:

Realizar investigaciones en las que haya que organizar y codificar informaciones, seleccionar comparar y valorar estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, eligiendo las herramientas matemáticas adecuadas en cada caso.

*Propuesta
de una transición
gradual,
en función de
la competencia
cognitiva
de los alumnos,
del razonamiento
inductivo
con objetos físicos
concretos
a la introducción
del pensamiento
hipotético
deductivo.*

Se pretende evaluar la madurez del alumno para enfrentarse con situaciones nuevas, utilizando la modelización de situaciones, la reflexión lógico-deductiva, los modos de argumentación propios de las matemáticas y las destrezas matemáticas adquiridas.

En las recién aparecidas modificaciones a las enseñanzas mínimas de ESO y bachillerato (MECD 2001a y 2001b) no hay ninguna novedad en el tema que nos ocupa.

De todo lo dicho en este apartado y teniendo en cuenta el trabajo de investigación desarrollado por los autores, (Ibañez, 1993, 1996 y 2001; Ibañez y Ortega, 1997), se pueden extraer las siguientes reflexiones:

1. En primer lugar, hay que constatar que se intuye la presencia de la demostración (prueba) en muchos de los comentarios de las distintas disposiciones que desarrollan la LOGSE, lo que ya, en sí mismo, es un aspecto muy positivo, pero, además, supone una mejora muy importante respecto de planes de estudios anteriores. A continuación se recogen las principales aportaciones en este sentido:

- Múltiples referencias al razonamiento matemático.
 - Distinción entre el proceso de construcción de las Matemáticas y su presentación como ciencia elaborada, con la consiguiente consideración y diferenciación de las clases de razonamiento propias de cada una de estas fases: inductivo en la primera y deductivo en la segunda.
 - Esta distinción en las Matemáticas como ciencia induce a una secuenciación para su aprendizaje. En primer lugar, se atiende a la construcción de instrumentos intelectuales para interpretar, analizar y explicar la realidad; y, después se busca la formalización y estructuración del conocimiento matemático como sistema deductivo. De ello se pueden extraer pautas para la elección de los procedimientos de verificación adecuados a cada fase.
 - Apuesta por una conjugación de los fines funcional y formativo de la enseñanza de las matemáticas, con el consiguiente enriquecimiento en la diversidad de razonamientos y estrategias que deben aplicarse.
 - Propuesta de una transición gradual, en función de la competencia cognitiva de los alumnos, del razonamiento inductivo con objetos físicos concretos a la introducción del pensamiento hipotético deductivo. Esta evolución se observa en las propuestas para el primer ciclo de ESO, para el segundo ciclo, y para el Bachillerato.
2. Pero, también es preciso señalar algunas deficiencias:
- Hay muy pocas referencias explícitas a los procedimientos de verificación.
 - No se indica qué clase de pruebas –comprobaciones, justificaciones, explicaciones, demostraciones...– se puede esperar de los alumnos; y, por

supuesto, tampoco se dice nada de las distintas técnicas de demostración.

- Entre los objetivos que se formulan, tanto en la ESO como en el Bachillerato, hay varios que pueden relacionarse con las demostraciones (pruebas). Sin embargo, no se produce la correspondiente presencia de estos procedimientos en los contenidos, en los que, como se ha podido observar en los comentarios anteriores, hay muy pocas citas.
- Ajustándonos a los contenidos, no hay un equilibrio adecuado entre las referencias a la demostración en Geometría y en otras áreas. Es de sobra conocido que la Geometría constituye un campo muy adecuado para introducirse en el razonamiento deductivo, y así se ha hecho tradicionalmente; pero ello no justifica que se vuelva a un viejo y persistente vicio en la enseñanza de las Matemáticas, consistente en llevar a cabo un razonamiento muy riguroso en Geometría, para abandonarlo en el resto de los temas, con el consiguiente desconcierto de los alumnos.
- Parece también incongruente con los objetivos enunciados que los procedimientos de verificación no sean tenidos en cuenta a la hora de formular los criterios de evaluación, ya que, como se ha comentado anteriormente, éstos no incluyen referencia alguna a las demostraciones (pruebas).

3. Se propone corregir estas deficiencias curriculares, incluyendo referencias explícitas a los procedimientos de verificación, indicando qué clase de pruebas se puede esperar de los alumnos, formulando distintas técnicas de demostración, guardando un equilibrio en toda las áreas, teniendo en cuenta los procedimientos de verificación en los criterios de evaluación.

Referencias bibliográficas

- IBAÑES, M. (1993): «Matemáticas en la secundaria a través de los planes de estudios», *Sigma*, n.º 15, 25-31.
- IBAÑES, M. (1996): «Alumnos de bachillerato interpretan una demostración y reconocen sus funciones», *Uno*, n.º 13, 95-101.
- IBAÑES, M. (2001): *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*, Universidad de Valladolid. Valladolid
- IBAÑES, M., y T. ORTEGA (1997): «La demostración en Matemáticas. Clasificación y ejemplos en el marco de la educación Secundaria», *Educación Matemática*, vol. 9, n.º 2, 65-104.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1971): *Nuevas orientaciones pedagógicas para la segunda etapa de E.G.B.*, Madrid.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1975a): *Orden de 22 de marzo de 1975 por la que se desarrolla el Decreto 160/75 de 23 de enero, que aprueba el Plan de Estudios de bache-*

Parece también incongruente con los objetivos enunciados que los procedimientos de verificación no sean tenidos en cuenta a la hora de formular los criterios de evaluación.

rato y se regula el Curso de Orientación Universitaria, B.O.E. de 18 de abril de 1975.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1975b): *Resolución de 21 de agosto de 1975 por la que desarrolla la disposición transitoria 4.ª de la Orden Ministerial de 22 de marzo, referida al Curso de Orientación Universitaria*, B.O.E. de 6 de septiembre de 1975.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1978): *Resolución de 1 de marzo de 1978 sobre contenidos y orientaciones metodológicas para el Curso de Orientación Universitaria*, B.O.E. de 17 de marzo de 1978.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1990): *Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación general del Sistema Educativo*, B.O.E. de 4 de octubre de 1990.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1991a): *Real Decreto 1345/1991, de 6 de septiembre por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria*, B.O.E. de 13 de septiembre de 1991.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1991b): *Real Decreto 1700/1991, de 29 de Noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato*, B.O.E. de 2 de diciembre de 1991.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1992a): *Resolución de 5 de marzo de 1992, de la Secretaría de Estado de Educación, por la que se regula la elaboración de proyectos curriculares para la Educación Secundaria Obligatoria, y se establecen orientaciones para la distribución de objetivos, contenidos y criterios de evaluación para cada uno de los ciclos*, B.O.E. de 25 de marzo de 1992.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1992b): *Real Decreto 1179/1992, de 2 de octubre por el que se establece el currículo del Bachillerato*, B.O.E. de 21 de octubre de 1992.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE (2001a): *Real Decreto 3473/2000, de 29 de diciembre, por el que se modifican el Real Decreto 1700/1991, por el que se establece la estructura del bachillerato y el Real Decreto 1178/1992, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de bachillerato*, B.O.E. de 16 de enero de 2001.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN, CULTURA Y DEPORTE (2001b): *Real Decreto 3474/2000, de 29 de diciembre, por el que se modifica el Real Decreto*

1007/1991, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la educación secundaria obligatoria, B.O.E. de 16 de enero de 2001.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1938): *Ley de 20 de septiembre de 1938 de Reforma de la segunda enseñanza*, B.O.E. de 13 de septiembre de 1938.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1939): *Orden de 14 de abril de 1939 aprobando los Cuestionarios de Enseñanza Media*, B.O.E. de 8 de mayo de 1939.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1953): *Decreto de 12 de junio de 1953 por el que se establece el Plan de Estudios de Bachillerato*, B.O.E. de 2 de julio de 1953.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1954): *Orden Ministerial de 21 de Enero de 1954 por la que se establecen*

Marcelino J. Ibañes
Instituto «Vega del Prado»
Valladolid.

Tomás Ortega
Facultad de Educación.
Universidad de Valladolid

los Cuestionarios del Plan de 1953, B.O.E. de 10 de febrero de 1954.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1961): *Legislación de Enseñanza Media. Tomo I*, Publicaciones de la Revista «Enseñanza Media», Madrid.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (1964): *Legislación de Enseñanza Media. Tomo V: Planes de Estudio (1787-1938)*, Publicaciones de la Revista «Enseñanza Media», Madrid.

MINISTERIO DE INSTRUCCIÓN PÚBLICA Y BELLAS ARTES (1934a): «Decreto de 29 de agosto de 1934 por el que se establece un nuevo plan de Estudios», *Gaceta* de 21 de octubre de 1934.

MINISTERIO DE INSTRUCCIÓN PÚBLICA Y BELLAS ARTES (1934b): «Cuestionarios del plan de 1934», *Gaceta* de 21 de octubre de 1934.

PUIG ADAM, P. (1960): *La matemática y su enseñanza actual*, Publicaciones de la Revista de Enseñanza Media, Madrid.

RICO, L., M. y SIERRA (1994): «Educación matemática en la España del siglo XX», en KILPATRICK, RICO y SIERRA: *Educación matemática e investigación*, Síntesis. Madrid.

Formación de conjuntos disjuntos

Juan y María forman conjuntos con elementos de R. Mira lo que hacen y lo que dicen.



Hacen esto		Dicen esto
 	<p>No hemos tomado los dos un mismo elemento.</p> <p>J y M son conjuntos disjuntos.</p>	
 	<p>Hemos repetido los dos el elemento .</p> <p>J y M no son conjuntos disjuntos.</p>	

3.º EGB